Повторим математику

ШУВАЛОВА Э. З., АГАФОНОВ Б. Г.,
БОГАТЫРЕВ Г. И.

ПОВТОРИМ МАТЕМАТИКУ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

Рекомендовано Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для поступающих в вузы

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1974

512/514
Ш 95
УДК 512/514(075.4)

Шувалова Э. З. и др.

Ш 95 Повторим математику. Изд. 2-е, доп. Учеб. пособие для поступающих в вузы. М., «Высш. школа», 1974.

519 с. с илл.

Перед загл. авт.: Шувалова Э. З., Агафонов Б. Г., Богатырев Г. И.

Учебное пособие рассчитано на лиц, уже имеющих среднее образование и готовящихся к поступлению в технические вузы либо самостоятельно, либо в системе подготовительных курсов.

Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров и задач средней и повышенной трудности. По возможности эти задачи и методы их решений систематизированы.

Предназначается для поступающих во втузы.

Ш $\frac{60601—435}{001(01)—74}$ 299—74 512/514

Рецензент
канд. физ.-матем. наук доц. Р. С. Гутер

© — Издательство «Высшая школа», 1974 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 3
Предисловие к первому изданию 3
Введение 5
Глава I. Действительные и комплексные числа 7
§ 1. Натуральные и целые числа 7
§ 2. Рациональные числа 11
§ 3. Иррациональные числа 19
§ 4. Действительные числа 22
§ 5. Решение задач 31
§ 6. Комплексные числа 34
§ 7. Решение задач 44
Глава II. Равенства. Преобразования алгебраических выражений. Неравенства 48
§ 1. Равенства алгебраических выражений 48
§ 2. Классификация алгебраических выражений 49
§ 3. Действия над многочленами. Теорема Безу 51
§ 4. Многочлены (решение задач) 57
§ 5. Алгебраические дроби. Пропорции. Иррациональные выражения 61
§ 6. Тождественные преобразования алгебраических выражений (решение задач) 67
§ 7. Неравенства и их основные свойства 73
§ 8. Задачи на доказательство неравенств 76
Глава III. Уравнения, системы уравнений. Решение неравенств 84
§ 1. Основные понятия и определения, связанные с уравнениями . . 84
§ 2. Основные свойства уравнений 87
§ 3. Основные понятия и определения, связанные с системами уравнений. Основные свойства систем уравнений 88
§ 4. Целые рациональные уравнения с одним неизвестным 95
§ 5. Решение линейных и квадратных уравнений 98
§ 6. Исследование решений квадратного уравнения с действительными коэффициентами 100
§ 7. Двучленные уравнения 101
§ 8. Биквадратные и трехчленные уравнения 103
§ 9. Возвратные уравнения четвертой степени 105
§ 10. Подбор рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами 107
§ 11. Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными 108
§ 12. Система, состоящая из одного линейного уравнения и одного уравнения второй степени с двумя неизвестными 112
§ 13. Система двух уравнений второй степени с двумя неизвестными 114
§ 14. Решение рациональных неравенств и систем неравенств с одним неизвестным 117
Глава IV. Решение задач на алгебраические уравнения, системы уравнений и неравенства 126
§ 1. Решение рациональных уравнений с одним неизвестным 126
§ 2. Решение рациональных систем 133

§ 3. Иррациональные уравнения 142
§ 4. Решение иррациональных неравенств 152
§ 5. Решение иррациональных систем 154
§ 6. Решение уравнений, неравенств и систем, содержащих абсолютную величину 158
§ 7. Разные задачи, связанные с уравнениями, неравенствами, системами 166

Глава V. **Последовательность. Прогрессии** 174

§ 1. Последовательность 174
§ 2. Арифметическая прогрессия 178
§ 3. Геометрическая прогрессия 181
§ 4. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия 183
§ 5. Задачи 185
§ 6. Суммирование последовательностей 192

Глава VI. **Соединения и бином Ньютона** 196

§ 1. Соединения. Виды соединений 196
§ 2. Бином Ньютона 200
§ 3. Задачи 202

Глава VII. **Функции** 210

§ 1. Постоянные и переменные величины 210
§ 2. Функция 211
§ 3. Способы задания функции 211
§ 4. Четные и нечетные функции 213
§ 5. Периодические функции 215
§ 6. Ограниченные и неограниченные функции. Монотонные функции 217
§ 7. Обратная функция 219
§ 8. Простейшие преобразования графиков 221
§ 9. Обзор свойств некоторых простейших элементарных функций. Построение их графиков 223

Глава VIII. **Показательная и логарифмическая функции** 232

§ 1. Показательная функция. Ее свойства и график 232
§ 2. Логарифмическая функция 234
§ 3. Упражнения 238
§ 4. Решение показательных и логарифмических уравнений 242
§ 5. Решение неравенств, содержащих логарифмическую и показательную функцию 250

Глава IX. **Тригонометрические функции** 254

§ 1. Угол в тригонометрии 254
§ 2. Тригонометрический круг. Определение тригонометрических функций 255
§ 3. Свойства тригонометрических функций 258
§ 4. Графики тригонометрических функций 261
§ 5. Тригонометрические функции острого угла 267
§ 6. Задачи 268

Глава X. **Теоремы сложения и их следствия** 273

§ 1. Формулы тригонометрических функций от алгебраической суммы аргументов (формулы сложения) 273
§ 2. Формулы приведения 275
§ 3. Тригонометрические функции кратных аргументов 277
§ 4. Формулы преобразования произведения синусов и косинусов в сумму. Формулы понижения степени 278
§ 5. Тригонометрические функции половинного аргумента. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента 280

§ 6. Числовые значения тригонометрических функций некоторых аргументов 282
§ 7. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение 285
§ 8. Соотношения между аргументами α и β, вытекающие из равенства их одноименных тригонометрических функций 287

Глава XI. **Задачи на тождественные преобразования в тригонометрии** 289

§ 1. Упрощение тригонометрических выражений 289
§ 2. Вычисление без таблиц 292
§ 3. Вычисление значений тригонометрических выражений по известным значениям других тригонометрических выражений 295
§ 4. Преобразование тригонометрических выражений в произведение 300
§ 5. Доказательство тождеств 303
§ 6. Условные равенства 305
§ 7. Исключение аргументов из системы равенств 310
§ 8. Доказательство тригонометрических неравенств 312
§ 9. Суммирование последовательностей тригонометрических выражений 314

Глава XII. **Обратные тригонометрические функции** 318

§ 1. Арксинус 318
§ 2. Арккосинус 320
§ 3. Арктангенс и арккотангенс 321
§ 4. Основные тождества 324
§ 5. Задачи 325

Глава XIII. **Тригонометрические уравнения** 337

§ 1. Простейшие тригонометрические уравнения 337
§ 2. Сведение тригонометрических уравнений к простейшим с помощью тождественных преобразований. 339
§ 3. Сведение тригонометрического уравнения к рациональному уравнению с одним неизвестным 350
§ 4. Системы тригонометрических уравнений 358
§ 5. Тригонометрические неравенства 361
§ 6. Решение трансцендентных уравнений и неравенств 365

Глава XIV. **Графики** 369

§ 1. Построение графиков с помощью геометрических преобразований 369
§ 2. Графики функций, заданных разными формулами на различных промежутках области определения 377
§ 3. График суммы и разности двух функций 379
§ 4. График произведения двух функций 381
§ 5. График функции $y=\frac{1}{f(x)}$ 383
§ 6. График частного двух функций 385
§ 7. График «функции от функции» 388
§ 8. Применение графиков к решению уравнений, систем и неравенств 392
§ 9. Разные задачи 396

Глава XV. **Приложения тригонометрии к решению треугольников. Вычисление площадей прямолинейных фигур** 400

§ 1. Соотношения между элементами прямоугольного треугольника. Основные случаи решения прямоугольных треугольников 401
§ 2. Соотношения между элементами любого треугольника 402
§ 3. Основные случаи решения косоугольных треугольников 406
§ 4. Понятие об измерении площадей плоских фигур 408
§ 5. Площадь прямоугольника и треугольника 410
§ 6. Площадь четырехугольника и многоугольника 414
§ 7. Задачи 416

Глава XVI. **Прямые и плоскости в пространстве** 435

§ 1. Основные определения 435
§ 2. Признаки параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей 437
§ 3. Свойства многогранных углов 442
§ 4. Площадь проекции 443

Глава XVII. **Многогранники. Цилиндрические тела и конусы. Шар** . . . 446

§ 1. Многогранники 446
§ 2. Цилиндрическая поверхность. Цилиндрическое тело 448
§ 3. Коническая поверхность. Конус 451
§ 4. Усеченный конус 455
§ 5. Определение и свойства шара 456

Глава XVIII. **Объемы и площади поверхностей многогранников, цилиндрических тел, конусов, шара и его частей** 459

§ 1. Понятие об измерении объемов геометрических тел 459
§ 2. Объем прямоугольного параллелепипеда 460
§ 3. Объем прямого цилиндрического тела 462
§ 4. Объем наклонного цилиндрического тела 463
§ 5. Объем конуса 465
§ 6. Объем усеченного конуса 467
§ 7. Объем шара и его частей 468
§ 8. Площади поверхностей многогранников, цилиндров и конусов . . 471
§ 9. Площадь поверхности шара и его частей 473

Глава XIX. **Обзор задач по стереометрии** 475

§ 1. Угол между прямой и плоскостью. Двугранные углы. Трехгранные углы 477
§ 2. Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми 481
§ 3. Задачи на сечения 484
§ 4. Задачи на комбинации вписанных друг в друга тел 490
§ 5. Задачи на произвольные комбинации тел 505

Предметный указатель 510

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во второе издание включены новые главы XVI, XVII, XVIII и XIX, написанные Э. З. Шуваловой. В этих главах в несколько нетрадиционной форме дается полное изложение курса стереометрии в объеме программы средней школы. Глава XIX посвящена обзору наиболее часто встречающихся задач по стереометрии и методам их решений.

Для удобства пользования книгой в конце ее дается предметный указатель.

Кроме того, в издание внесены поправки редакционного характера и исправлены опечатки. Часть из этих исправлений вызвана замечаниями читателей. Всем им мы выражаем глубокую благодарность.

Авторы

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Это пособие предназначено для тех, кто уже прошел курс элементарной математики в объеме программы средней школы и хочет повторить алгебру и тригонометрию.

Очевидно, что изложение такого повторительного курса должно быть несколько иным, чем в учебниках и учебных пособиях, написанных для средней школы. Это и имели в виду авторы, когда допускали ссылки в начальных главах на последующее. Так, например, в главе I использовалась формула суммы членов бесконечно

убывающей геометрической прогрессии, данной лишь в главе V, в главе IX использовались формулы главы X и т. д.

Помимо материала, входящего в обязательную программу приемных экзаменов, даны и некоторые дополнительные сведения. В пособии они приведены мелким шрифтом.

Главы I и II написаны Г. И. Вогатыревым, главы III, IV, X, XI, XIV—Б. Г. Агафоновым, главы V—IX, XII, XIII, XV—Э. З. Шуваловой.

Авторы выражают глубокую благодарность Р. С. Гутеру, очень внимательно прочитавшему рукопись и давшему много ценных замечаний, которые были учтены в процессе работы над пособием.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим некоторые важные математические понятия.

1. **Доказательство от противного.** Пусть A — условие теоремы, т. е. то, что предполагается данным, а B — ее заключение, т. е. то, что требуется доказать. Тогда теорема схематически записывается в виде $A \longrightarrow B$ и читается так: «из A следует B».

Метод доказательства от противного теоремы $A \longrightarrow B$ состоит в следующем. Предполагается противное (противоречивое) искомому B положение $\overline{B}$. Если на основании сделанного предположения $\overline{B}$ и условия A удается получить некоторое неверное утверждение, то положение $\overline{B}$ не имеет места, т. е. справедливо B и тем самым теорема $A \longrightarrow B$ доказана.

2. **Необходимость и достаточность.** Пусть B — какое-либо положение, A — некоторое условие.

A называется *необходимым* условием для B, если из B вытекает $A : B \longrightarrow A$.

A называется *достаточным* условием для B, если из A следует $B : A \longrightarrow B$.

Всякую теорему можно сформулировать с помощью терминов «необходимо», «достаточно».

A называется *необходимым и достаточным* условием для B, если $B \longrightarrow A$ и одновременно $A \longrightarrow B$.

Термин «необходимо и достаточно» можно заменить выражениями «если и только если», «тогда и только тогда».

Поясним понятия «необходимости» и «достаточности» на примерах.

Пример 1. Четность числа есть необходимый признак делимости на 4.

Здесь A — четность числа, B — его делимость на 4. Очевидно, что $B \longrightarrow A$. Однако из A не следует B (так, четное число 6 не делится на 4). Поэтому четность числа — необходимое, но не достаточное условие делимости на 4.

Пример 2. Достаточным условием делимости на 4 (положение B) является следующий признак: число оканчивается двумя нулями (условие A).

В самом деле, из A следует B (см. гл. I, § 1). Однако из B не вытекает A (так, число 24 делится на 4, но не оканчивается двумя нулями). Поэтому условие A только достаточное; необходимым для B оно не является.

Пример 3. Для делимости на 3 (B) необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа делилась на 3 (A).

В самом деле, здесь справедливы два утверждения: если число делится на 3 (B), то и сумма его цифр делится на 3 (A), т. е. $B \longrightarrow A$ (необходимость), и обратно—если сумма цифр числа делится на 3 (A), то и само число делится на 3 (B), т. е. $A \longrightarrow B$ (достаточность).

Доказательство приведено в гл. I, § 1.

3. **Метод математической индукции.** Пусть некоторое утверждение зависит определенным образом от натурального числа n, которое принимает все значения, начиная от данного p (p—натуральное число или $p=0$).

Принимается следующий принцип. *Если:* а) *утверждение верно для* $n=p$ *и* б) *из справедливости этого утверждения для какого-нибудь натурального числа* $n=k$ *вытекает справедливость его и для следующего числа* $n=k+1$, *то утверждение справедливо для любого натурального* $n \geqslant p$.

На этом принципе основан метод математической индукции.

Чтобы доказать методом математической индукции, что некоторое утверждение верно для любого натурального $n \geqslant p$, надо: а) проверить справедливость утверждения для $n=p$ и б) допустив справедливость этого утверждения для $n=k$, доказать справедливость его и для $n=k+1$. Только при одновременном выполнении а) и б) заключаем, что утверждение верно для любого $n \geqslant p$.

Часто наименьшим числом p, для которого верно утверждение, является число $p=1$.

ГЛАВА I
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Числа 1, 2, 3, ..., появившиеся в результате счета, называются *натуральными* числами. Совокупность чисел 0, ± 1, ± 2, ± 3, ... образует множество всех *целых* чисел.

Над целыми числами устанавливаются действия сложения и умножения, которые обладают следующими основными свойствами.

1. *Переместительное свойство сложения:* $a+b=b+a$*.
2. *Сочетательное свойство сложения:* $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. *Переместительное свойство умножения:* $a\cdot b=b\cdot a$.
4. *Сочетательное свойство умножения:* $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.
5. *Распределительное свойство, связывающее сложение и умножение:*

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

Основные свойства (законы арифметики) остаются справедливыми для любого конечного числа слагаемых и сомножителей.

Полагают $a+0=a$, $a\cdot 0=0$ при всех a.

Вычитание и деление определяются как действия, обратные сложению и умножению.

Число c называется *разностью* чисел a и b,

$$c=a-b,$$

если $b+c=a$. Вычитание всегда выполнимо и единственно, т. е. для любых a и b существует и притом единственная разность c.

Число q называется *частным* от деления a на b,

$$q=a:b \text{ или } q=\frac{a}{b},$$

если $b\cdot q=a$. Деление не всегда выполнимо в множестве целых чисел.

Невозможно деление на нуль. Если $a\neq 0$, а $b=0$, то, очевидно, нет такого q, для которого $b\cdot q=a$. Если $a=b=0$, то q — любое. Поэтому деление на нуль не определено.

---

* Буквы a, b, c, ... обозначают целые числа.

Если для чисел a и b существует частное q, т. е. $bq=a$, то говорят, что a делится на b (или b делит a). При этом a называется *кратным* числа b (или делимым), а b—*делителем* числа a. Число называется четным, если оно делится на 2, и нечетным в противном случае. Нуль—четное число.

Для любых чисел a и b $(b>0)$ справедливо следующее утверждение: *число a всегда можно представить и притом единственным образом в виде*

$$a=bq+r, \quad \text{где } 0\leqslant r<b. \tag{1}$$

Очевидно, что всякое целое число a представимо в виде (1). Покажем единственность такого представления.

Допустим, что $a=bq+r$ и также $a=bq_1+r_1$, где $0\leqslant r<b$ и $0\leqslant r_1<b$. Тогда

$$0=b(q_1-q)+(r_1-r),$$

и, следовательно, число r_1-r делится на b. Так как $0\leqslant r<b$ и $0\leqslant r_1<b$, то это возможно только при $r_1-r=0$, т. е. при $r_1=r$. Отсюда вытекает, что и $q_1=q$. Утверждение доказано.

Представление числа a в виде (1) называется *делением числа a на число b $(b>0)$ с остатком*. При этом q называется *неполным частным*, а r—*остатком* от деления a на b.

Для натуральных чисел вводятся понятия простого и составного числа.

Определение. Натуральное число, не равное единице, называется *простым*, если оно делится только на себя и на единицу. Натуральное число, отличное от единицы и не являющееся простым, называется *составным*.

Единица—единственное число, которое не является ни простым, ни составным.

Доказано, что *всякое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде произведения простых сомножителей и притом единственным способом (произведения, отличающиеся только порядком сомножителей, различными не считаются)*.

Объединяя равные сомножители, получим

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ \dots\ p_n^{\alpha_n}, \tag{2}$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$—различные простые делители числа a, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$—число их повторений в разложении числа a.

Представление (2) называется *каноническим разложением натурального числа на простые сомножители*.

Например, $72=2^3\cdot 3^2$, $17=17^1$.

Если $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$, то любой натуральный делитель a имеет вид

$$d=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n}, \tag{3}$$

где $0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1$, $0\leqslant\beta_2\leqslant\alpha_2$, $\dots$, $0\leqslant\beta_n\leqslant\alpha_n$ (равенство $\beta_k=0$ означает, что соответствующее основание p_k не содержится в разложении числа d).

В самом деле, пусть d делит a. Тогда $a=dq$. У чисел d и q могут оказаться равными их простые делители. Поэтому все простые делители числа d входят в каноническое разложение числа a с показателями, не меньшими тех, с которыми они входят в каноническое разложение d. Следовательно, d имеет вид (3), что и утверждалось.

Обратно, всякое число вида (3), очевидно, делит a.

Пример 1. Показать, что число различных положительных делителей числа $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ (включая 1 и a) равно произведению

$$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1).$$

Решение. Каждый делитель числа a имеет вид (3), где β_1 принимает α_1+1 значений: 0, 1, 2, ..., α_1; β_2 независимо от β_1 принимает α_2+1 значений: 0, 1, 2, ..., α_2 и т. д. Каждой такой комбинации β_1, β_2, ..., β_n соответствует один делитель числа a, причем различным комбинациям соответствуют различные делители (в противном случае у одного и того же числа существовали бы различные канонические разложения, что невозможно).

Число всех таких комбинаций, а значит и делителей числа a, равно произведению $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$.

Например, число различных делителей $72=2^3\cdot3^2$ равно $(3+1)(2+1)=12$. Каждый делитель 72 имеет вид $2^{\beta_1}\cdot3^{\beta_2}$, где $\beta_1=0, 1, 2, 3$; $\beta_2=0, 1, 2$. Придавая β_1 и β_2 эти значения, получим все различные положительные делители числа 72:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8;\ 3,\ 6,\ 12,\ 24;\ 9,\ 18,\ 36,\ 72.$$

Определение. Всякое число, делящее одновременно числа $a, b, \ldots, l$, называется их *общим делителем*. Наибольший из общих делителей называется *наибольшим общим делителем* и сокращенно обозначается НОД или символом $(a, b, \ldots, l)$. Если $(a, b, \ldots, l)=1$, то числа $a, b, \ldots, l$ называются *взаимно простыми*.

Например, числа 6, 8, 15 взаимно простые, так как $(6, 8, 15)=1$.

Всякое число, которое делится на каждое из чисел $a, b, \ldots, l$, называется их *общим кратным*. Наименьшее положительное общее кратное называется *наименьшим общим кратным* и сокращенно обозначается НОК.

Например, для чисел 24 и 36 НОД $=12$, НОК $=72$. Справедливы следующие свойства взаимно простых чисел.

1. Если число a делится на каждое из взаимно простых чисел, то оно делится и на произведение этих чисел. Например, если число делится на 3 и на 5 ($(3, 5)=1$), то оно делится и на 15. Однако нельзя утверждать, что число, делящееся на 4 и на 6 ($(4, 6)\neq1$), обязательно делится и на 24. Например, это неверно для 36.

2. Если произведение ab делится на c, где b и c — взаимно простые числа, то a делится на c.

Найдем НОД и НОК чисел a и b. С этой целью запишем их канонические разложения:

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n},\quad b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_n^{\beta_n},$$

где некоторые из α_k и β_k могут обращаться в нуль.

Согласно формуле (3) любой общий делитель чисел a и b имеет вид

$$p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_n^{\gamma_n}, \tag{4}$$

где каждое γ_k не превосходит чисел α_k и β_k.

Полагая в разложении (4) каждое γ_k равным наименьшему из чисел α_k и β_k, получим наибольший общий делитель чисел a и b.

Очевидно, число вида (4) будет делиться одновременно на a и b, если в качестве каждого γ_k принять наибольшее из чисел α_k и β_k. Оно является наименьшим натуральным числом, делящимся на a и b, т. е. является НОК чисел a и b. Аналогично находятся НОД и НОК чисел $a, b, \ldots, l$.

Пример 2. Найти НОД и НОК чисел 72 и 60.

Решение. Запишем для данных чисел их канонические разложения:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$

тогда НОД $= 2^2 \cdot 3 = 12$, НОК $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Из самого способа нахождения НОД и НОК вытекают следующие их свойства:

1. НОД чисел a и b делится на любой их общий делитель.

2. НОК $= \frac{ab}{\text{НОД}}$.

Практически при разложении числа на множители и нахождении НОД и НОК пользуются признаками делимости. Признаком делимости числа a на некоторое число b называется необходимое и достаточное условие делимости a на b.

Пусть N — делимое. В десятичной системе счисления натуральное число N записывается в виде

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{5}$$

где a_0 — число единиц, a_1 — число десятков, a_2 — число сотен и т. д.

Рассмотрим признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9.

Признак делимости на 2 и на 5. *На 2 (или на 5) делятся те и только те числа, цифра единиц которых выражает число, делящееся на 2 (или соответственно на 5).*

В самом деле, $N = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10) + a_0$. В скобках стоит число, кратное 10, и оно делится на 2 и на 5. Поэтому для делимости N на 2 (или на 5) необходимо и достаточно, чтобы на 2 (или соответственно на 5) делилось a_0.

Признак делимости на 4. *На 4 делятся те и только те числа, у которых две последние цифры выражают число, делящееся на 4.*

Утверждение вытекает из записи делимого в виде

$$N = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2) + (a_1 \cdot 10 + a_0).$$

Признак делимости на 3 и на 9. *На 3 (или на 9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (или соответственно на 9).*

Для доказательства запишем делимое в виде

$$N=[a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1)]+ \\ +(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0).$$

Очевидно, что число

$$10^k-1=\underbrace{99\ldots9}_{k \text{ цифр}}$$

делится на 3 и на 9. Поэтому для делимости N на 3 или на 9 необходимо и достаточно, чтобы число, стоящее в круглых скобках и равное сумме цифр числа N, делилось на 3 или на 9.

Признак делимости на 6. *На* 6 *делятся те и только те числа, которые одновременно делятся на* 2 *и на* 3. Это следует из свойства делимости числа на произведение взаимно простых чисел.

Отметим следующее свойство последовательных чисел. Из n *последовательных целых чисел*

$$a,\ a+1,\ \ldots,\ a+n-1 \tag{6}$$

одно и только одно делится на n.

Действительно, если $a=nq$, то утверждение справедливо.

Пусть $a=nq+k$, где k одно из чисел

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Тогда число $a+(n-k)=nq+k+(n-k)=n(q+1)$ находится среди чисел (6) и делится на n.

Среди чисел (6) нет других чисел, делящихся на n, так как в противном случае разность таких чисел, меньшая n, делилась бы на n, что невозможно.

Например, число $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ делится на 2, на 3, и, следовательно, на 6.

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Определение. *Рациональным числом* называется выражение вида

$$\frac{a}{b}, \tag{7}$$

где a и b—целые, причем $b\neq 0$.

В частном случае, когда $b=1$, полагают

$$\frac{a}{1}=a.$$

Таким образом, множество всех рациональных чисел содержит в себе как часть множество всех целых чисел.

Два рациональных числа (или дроби) $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

если $ad=bc$.

По определению $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, если $(ad-bc)bd > 0$ и $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, если $(ad-bc)bd < 0$. Из определения равенства двух дробей вытекает основное свойство дроби: *величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, т. е.*

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} = \frac{a:n}{b:n}.$$

На этом свойстве основано сокращение дробей, т. е. деление числителя и знаменателя на их общий делитель, и приведение дробей к общему знаменателю.

Сложение и умножение дробей определяются по правилам:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

В связи с тем, что целое число есть частный вид рационального числа, возникает вопрос: не противоречат ли введенные действия сложения и умножения по этим формулам ранее известным операциям сложения и умножения целых чисел?

Если a и b — целые, то

$$a+b = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1}; \quad a \cdot b = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1},$$

т. е. противоречия нет.

Вычитание и деление дробей определяются как действия, обратные сложению и умножению. Из этого определения выводятся правила этих действий:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Для рациональных чисел сохраняются основные свойства арифметических действий над натуральными числами (см. § 1).

В частности, если a и b целые, то $a:b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = \frac{a}{b}$, т. е. всякое рациональное число есть результат деления целых чисел.

В множестве рациональных чисел деление всегда возможно, кроме деления на нуль.

Дробь вида

$$\frac{N}{10^n}, \tag{8}$$

где N — целое, n — натуральное число, называется *десятичной* дробью. Ее знаменатель — степень числа 10.

В отличие от дроби десятичной дробь (7) с каким угодно знаменателем называется *обыкновенной* или *простой*.

Всякая положительная десятичная дробь (при $N > 0$) представима в виде суммы

$$a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \ldots + \frac{b_n}{10^n}, \qquad (9)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — цифры.

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, то (9) есть целое число. При $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_0 = 0$ дробь (9) называется *правильной* десятичной дробью. В общем случае, когда не все $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и не все $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны нулю, дробь (9) называется *смешанной*.

Условились десятичную дробь (9) записывать также в виде

$$a_m a_{m-1} \ldots a_0, \; b_1 b_2 \ldots b_n \quad \text{или} \quad A, \; b_1 b_2 \ldots b_n, \qquad (10)$$

где $A = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_0$ — целое число, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — десятичные знаки.

Так как (10) — иная запись суммы (9), то после b_n можно приписать любое число нулей, и величина дроби от этого не изменится.

Изображение десятичных дробей в виде (10) удобно для сравнения таких дробей и для выполнения действий над ними.

Наряду с десятичными дробями, которые в дальнейшем будем называть также конечными десятичными дробями, рассматриваются и так называемые бесконечные десятичные дроби.

Определение. *Бесконечной десятичной дробью*

$$A, \; b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \qquad (11)$$

называется символ

$$A + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \ldots,$$

составленный из целого числа A и бесконечной последовательности цифр $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ (понятие последовательности см. в гл. V, § 1).

Частным случаем бесконечных десятичных дробей являются периодические дроби.

Определение. Бесконечные десятичные дроби вида

$$A, \; \underbrace{b_1 b_2 \ldots b_n} \; \underbrace{b_1 b_2 \ldots b_n} \ldots \qquad (11')$$

или вида

$$A, \; b_1 b_2 \ldots b_k \underbrace{b_{k+1} b_{k+2} \ldots b_{k+n}} \; \underbrace{b_{k+1} b_{k+2} \ldots b_{k+n}} \ldots, \qquad (11'')$$

где одна или несколько цифр повторяются в неизменном порядке, называются *периодическими*. Совокупность повторяющихся цифр называется *периодом* такой дроби. При этом вместо записей (11′) и (11″) употребляют сокращенные записи

$$A, \; (b_1 b_2 \ldots b_n)$$

и

$$A, \; b_1 b_2 \ldots b_k (b_{k+1} b_{k+2} \ldots b_{k+n}).$$

Например,

$$0{,}131313\ldots = 0{,}(13),\quad 2{,}1444\ldots = 2{,}1\,(4).$$

Дробь вида (11′) называется *чистой периодической*, дробь вида (11″)—*смешанной периодической*.

Для простоты изложения будем рассматривать обыкновенные дроби с положительным числителем и знаменателем и положительные десятичные дроби, конечные и бесконечные.

Обрывая дробь (11) на каком-нибудь n-м десятичном знаке, получим тогда конечную десятичную дробь $A, b_1b_2\ldots b_n$. С возрастанием n такая дробь не уменьшается, т. е. либо не изменяется, либо увеличивается.

Например, для дроби 0,15004 ... соответственно получаем

$$0{,}1 < 0{,}15 = 0{,}150 = 0{,}1500 < 0{,}15004 < \ldots .$$

Определение. Бесконечная десятичная дробь (11) считается *равной обыкновенной дроби:*

$$A,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots = \frac{a}{b}, \tag{12}$$

если при всех n выполняется неравенство

$$0 \leqslant \frac{a}{b} - A,\ b_1b_2\ldots b_n \leqslant \frac{1}{10^n}\ *.$$

Таким образом, равенство (12) означает, что любая конечная десятичная дробь $A, b_1b_2\ldots b_n$ дает приближение (с недостатком) к дроби $\frac{a}{b}$ с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

В частности, отсюда следует, что все периодические дроби с периодом 9 равны соответствующим конечным десятичным дробям. Например,

$$0{,}(9) = 1;\quad 4{,}12\,(9) = 4{,}13.$$

Обратить обыкновенную дробь в десятичную—значит найти такую десятичную дробь, конечную или бесконечную, которая равна данной обыкновенной дроби.

Покажем, что несократимую дробь $\frac{a}{b}$ можно обратить в конечную десятичную дробь в том и только в том случае, если знаменатель b не содержит других простых множителей, кроме 2 и 5.

В самом деле, равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{N}{10^n},\ \text{или}\ \ \frac{a\cdot 10^n}{b} = N,$$

---

* Нетрудно понять, что это определение справедливо и в случае равенства $A, b_1b_2\ldots b_n = \frac{a}{b}$ для конечной десятичной дроби.

где N — целое, $(a, b)=1$, возможно тогда и только тогда, когда 10^n делится на b (см. § 1), и значит $b=2^k\cdot 5^l$.

Если $b\neq 2^k\cdot 5^l$, то дробь $\frac{a}{b}$ можно приближенно обратить в конечную десятичную дробь с точностью до $\frac{1}{10^n}$ с недостатком или избытком. Для этого надо найти две конечные десятичные дроби, удовлетворяющие условию

$$\frac{m}{10^n}\leqslant\frac{a}{b}\leqslant\frac{m+1}{10^n}.$$

Из последнего следует, что

$$m\leqslant\frac{a\cdot 10^n}{b}\leqslant m+1,$$

т. е. m — это целая часть дроби $\frac{a\cdot 10^n}{b}$, или иначе, неполное частное от деления $a\cdot 10^n$ на b, а оно существует и единственно (см. § 1).

Практически для обращения дроби делят числитель на знаменатель (по правилу деления конечной десятичной дроби на целое число). Например, обратим дробь $\frac{11}{6}$ в конечную десятичную с точностью до 0,001: $\frac{11}{6}\approx 1{,}833$ (с недостатком), $\frac{11}{6}\approx 1{,}834$ (с избытком).

Если у несократимой дроби $\frac{a}{b}$ знаменатель $b=2^k\cdot 5^l$, то процесс деления после конечного числа его повторения закончится и в результате будет получена конечная десятичная дробь. Если $b\neq 2^k\cdot 5^l$, то процесс деления можно продолжать неограниченно и в результате будет получена бесконечная десятичная дробь.

Вывод. Всякую обыкновенную дробь можно обратить в десятичную дробь, конечную или бесконечную.

Например,

$$\frac{11}{6}=1{,}833\ldots=1{,}8\,(3),\quad \frac{4}{33}=0{,}1212\ldots=0{,}(12).$$

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема. *Всякое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной или периодической дроби и обратно — всякая конечная десятичная дробь или дробь периодическая изображает рациональное число* *.

Доказательство. Достаточно рассмотреть положительные рациональные числа и положительные дроби, конечные десятичные или периодические.

1. Как уже было доказано, дробь $\frac{a}{b}$ при $b=2^k\cdot 5^l$ обращается в конечную десятичную дробь.

---

* Правило обращения периодических дробей см. в § 3.

Пусть $b \neq 2^k \cdot 5^l$. Обращая данную дробь в десятичную путем деления a на b, будем получать остатки вида 1, 2, ..., $b-1$. Так как процесс деления не может окончиться, то на некотором шаге в остатке должно вновь оказаться одно из этих чисел. Но если повторится какой-нибудь остаток, то должна повториться и соответствующая цифра частного, т. е. после этого остатка цифры частного будут повторяться в прежнем порядке. Полученная при обращении бесконечная десятичная дробь является периодической дробью.

Первое утверждение теоремы доказано.

2. Докажем справедливость обратного утверждения. Случай конечной десятичной дроби очевиден.

Рассмотрим для определенности (без ограничения общности доказательства) смешанную периодическую дробь вида

$$0,b_1(b_2b_3)=\frac{b_1}{10}+\frac{b_2b_3}{10^3}+\frac{b_2b_3}{10^5}+\dots . \tag{12}$$

Покажем сначала, что чистая периодическая дробь $0,(b_2b_3)$ равна некоторой обыкновенной дроби.

Обозначим через x и y конечные десятичные дроби, которые получаются из периодической дроби $0,(b_2b_3)$, если оставить соответственно $2n+1$ и $2n$ знаков, а остальные отбросить, т. е.

$$x=\frac{b_2b_3}{10^2}+\frac{b_2b_3}{10^5}+\dots+\frac{b_2b_3}{10^{2n-1}}+\frac{b_2b_3}{10^{2n+1}}, \tag{*}$$

$$y=x-\frac{b_3}{10^{2n+1}}.$$

Вычитая равенство

$$\frac{1}{10^2}\cdot x=\frac{b_2b_3}{10^5}+\frac{b_2b_3}{10^7}+\dots+\frac{b_2b_3}{10^{2n+1}}+\frac{b_2b_3}{10^{2n+3}}$$

из равенства (*), получим

$$\frac{99}{10^2}\cdot x=\frac{b_2b_3}{10^2}-\frac{b_2b_3}{10^{2n+3}},$$

откуда

$$x=\frac{b_2b_3}{990}-\frac{b_2b_3}{99}\cdot\frac{1}{10^{2n+1}}. \tag{**}$$

Тогда

$$y=\left(\frac{b_2b_3}{990}-\frac{b_2b_3}{99}\cdot\frac{1}{10^{2n+1}}\right)-\frac{b_3}{10^{2n+1}}=\frac{b_2b_3}{990}-\frac{1}{10^{2n+1}}\cdot\left(\frac{10b_2+b_3}{99}+b_3\right),$$

или

$$y=\frac{b_2b_3}{990}-\frac{b_3b_2}{99}\cdot\frac{1}{10^{2n}}. \tag{***}$$

Так как b_2 и b_3 — цифры, то

$$\frac{b_2b_3}{99}\leqslant 1,\quad \frac{b_3b_2}{99}\leqslant 1.$$

Обрывая дробь $0,0(b_2b_3)$ на каком-нибудь десятичном знаке, получим конечную десятичную дробь вида x или вида y. В силу равенств (**) и (***) дроби x и y дают приближения периодической дроби $0,0(b_2b_3)$ к обыкновенной дроби $\frac{b_2b_3}{990}$ соответственно с точностью до $\frac{1}{10^{2n+1}}$ и $\frac{1}{10^{2n}}$.

Так как это верно при всех n, то отсюда по определению из равенства (12) следует, что

$$0{,}0(b_2b_3)=\frac{b_2b_3}{990}.$$

Тогда смешанная периодическая дробь

$$0{,}b_1(b_2b_3)=\frac{b_1}{10}+\frac{b_2b_3}{990}.$$

Теорема доказана полностью.

Понятие о других системах счисления. В десятичной системе счисления любое положительное число представимо в виде

$$N=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\ldots+a_0+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\ldots+\frac{b_n}{10^n}+\ldots. \qquad (*)$$

Равенство (*) сокращенно записывают в виде

$$N=a_ma_{m-1}\ldots a_0,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots, \qquad (**)$$

где a_0, a_1, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n ...—цифры 0, 1, 2, ..., 9.

Вместо 10 (основания системы) можно взять любое натуральное число $p>1$. Например, если $p=3$ и $N=25$, то, очевидно, что

$$25=2\cdot 3^2+2\cdot 3+1.$$

Это представление аналогично представлению (*). Естественно его записать аналогично соотношению (**) в виде

$$25_{(10)}=221_{(3)},$$

где 221—запись числа 25 в системе счисления с основанием 3.

Число 25 можно записать и в другой, например двоичной, системе:

$$25=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+1,$$

т. е.

$$25_{(10)}=11001_{(2)}.$$

Вместо десятичных составляются p-ичные дроби. Например, двоичное число 11,1101 означает

$$1\cdot 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{1}{2^4}=\frac{61}{16}$$

в десятичной системе счисления.

В работе электронных цифровых машин применяется двоичная система счисления, в которой для изображения любого числа достаточно двух цифр: 0 и 1.

Для рациональных чисел вводятся действия возведения в степень и извлечения корня.

Пусть a—рациональное число, n—натуральное.

Определение. *Степень числа a с натуральным показателем n ($n\geqslant 2$)* есть произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$$a^n=\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ раз}}.$$

При $n=1$ полагают $a^1=a$.

Извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень.

Определение. *Корнем*, или *радикалом* n-й степени ($n \geqslant 2$) из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

Корень n-й степени из числа a обозначается через $\sqrt[n]{a}$. Запись $\sqrt[n]{a}=b$ означает, что $b^n=a$.

В множестве рациональных чисел действие извлечение корня не всегда выполнимо. Например, не существует рационального числа, равного квадратному корню из двух. Докажем это.

Предположим противное, что

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

где дробь $\frac{p}{q}$ будем считать несократимой.

Согласно определению корня

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2 \quad \text{или} \quad p^2=2q^2,$$

т. е. p — четное число:

$$p=2p_1,$$

где p_1 — целое. Тогда $(2p_1)^2=2q^2$ или $q^2=2p_1^2$, т. е. q — четное число. Значит, $q=2q_1$, где q_1 — целое. Следовательно, дробь $\frac{p}{q}=\frac{2p_1}{2q_1}$ сократима, что противоречит условию.

Из полученного противоречия вытекает, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Определение. Рациональное число $b>0$ называется *приближенным значением корня* $\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$ с недостатком с точностью до α (α — положительное рациональное число), если $b^n<a<(b+\alpha)^n$.

При этом число $b+\alpha$ называется приближенным значением корня $\sqrt[n]{a}$ с избытком с точностью до α.

Доказано, что приближенные значения корней из положительных чисел всегда существуют для любого рационального числа $\alpha>0$.

Пример. Извлечь $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{7}$.

Решение. Замечаем, что $2=\frac{2\cdot 7^2}{7^2}=\frac{98}{49}$. Поэтому достаточно извлечь корень $\sqrt{98}$ с точностью до 1 и разделить полученное число на 7.

Так как $\sqrt{98}\approx 9$ (с точностью до 1), то $\sqrt{2}\approx\frac{9}{7}$ $\left(\text{с точностью до } \frac{1}{7}\right)$. В самом деле,

$$\left(\frac{9}{7}\right)^2<2<\left(\frac{9}{7}+\frac{1}{7}\right)^2.$$

За меру точности α чаще всего принимают $\frac{1}{10^m}$ (m — некоторое натуральное число), а за приближенное значение корня принимают десятичную дробь с m знаками после запятой.

Советуем читателю применить известное правило извлечения квадратного корня и показать, что $\sqrt{72{,}6115} \approx 8{,}52$ (с недостатком, с точностью до 0,01), $\sqrt{113{,}5} \approx 10{,}655$ (с избытком, с точностью до 0,001).

§ 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Будем извлекать корень квадратный из двух с точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ..., $\frac{1}{10^n}$ и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим в результате бесконечную десятичную дробь, которая не может быть периодической, так как $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Таким образом, при извлечении корней появляются бесконечные непериодические десятичные дроби. Дроби такого типа определяют новые, нерациональные числа.

Определение. Всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь вида

$$a = A,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \tag{13}$$

($A \geqslant 0$, b_1, b_2, ... — цифры) называется *положительным иррациональным числом.*

Каждому положительному иррациональному числу (13) сопоставляется противоположное ему отрицательное число

$$-a = -A,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots .$$

Определения. 1. Два иррациональных числа

$$a = A,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \quad \text{и} \quad a' = A',\ b_1' b_2' \ldots b_n' \ldots$$

считаются *равными* в том и только в том случае, если

$$A = A',\ b_1 = b_1',\ b_2 = b_2',\ \ldots,\ b_n = b_n',\ \ldots \text{ и т. д.}$$

2. Число a *больше* числа a': $a > a'$, если $A > A'$, или если $A = A'$, но $b_1 > b_1'$, или если $A = A'$ и $b_1 = b_1'$, но $b_2 > b_2'$ и т. д.

3. Если $a > a' > 0$, то считают $-a < -a'$ и обратно.

Пусть $a = A,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$.

Дроби A, b_1; A, $b_1 b_2$; ...; A, $b_1 b_2 \ldots b_n$ и т. д. называются *десятичными приближениями* для иррационального числа a *по недостатку*. Дроби A, $b_1 + 1$; A, $b_1 (b_2 + 1)$; ...; A, $b_1 b_2 \ldots b_{n-1} (b_n + 1)$* и т. д. называются *десятичными приближениями* для иррационального числа a по избытку.

---

* $b_1 \leqslant 8$, $b_2 \leqslant 8$, ..., $b_n \leqslant 8$.

Для сравнения иррационального числа с числом рациональным последнее можно представить в виде периодической дроби и затем можно сравнить десятичные приближения для этих чисел по тому же правилу, как и при сравнении двух иррациональных чисел. При этом конечная десятичная дробь рассматривается как периодическая с периодом нуль. Например, $\sqrt{2} > 1{,}41$, так как $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, а $1{,}41 = 1{,}4100\ldots$.

Иррациональные числа разделяются на *алгебраические* и *трансцендентные* (неалгебраические). Алгебраическим иррациональным числом называется всякое иррациональное число, которое является корнем многочлена (см. гл. II, § 3) с рациональными коэффициентами вида

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n,$$

где $c_0 \neq 0$, n — натуральное число.

Например, $\sqrt{2}$ — алгебраическое иррациональное число, так как является корнем многочлена $x^2 - 2$.

Доказано, что число $\pi = 3{,}14\ldots$ — трансцендентное иррациональное число.

Извлечение корня приводит к алгебраическим иррациональным числам. Значения логарифмов положительных чисел и тригонометрических функций, как правило, — трансцендентные иррациональные числа.

Замечание. Конкретные иррациональные числа обычно обозначают символом той операции, в результате которой они возникают:

$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{2},\ \lg 3,\ \sin\frac{\pi}{7} \text{ и т. д.}$$

Над иррациональными числами устанавливаются арифметические действия, причем вычитание и деление определяются как действия, обратные сложению и умножению. Строгое обоснование этих действий и их свойств приводится в курсе высшей математики.

Поясним на примере понятие суммы.

Рассмотрим числа $a = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ и $b = \sqrt{3} = 1{,}732\ldots$. Возьмем последовательности десятичных приближений для a и b по недостатку:

$$1{,}4;\quad 1{,}41;\quad 1{,}414;\quad \ldots,$$
$$1{,}7;\quad 1{,}73;\quad 1{,}732;\quad \ldots$$

и по избытку

$$1{,}5;\quad 1{,}42;\quad 1{,}415;\quad \ldots,$$
$$1{,}8;\quad 1{,}74;\quad 1{,}733;\quad \ldots.$$

Образуем две новые последовательности:

$$1{,}4 + 1{,}7;\quad 1{,}41 + 1{,}73;\quad 1{,}414 + 1{,}732;\quad \ldots,$$
$$1{,}5 + 1{,}8;\quad 1{,}42 + 1{,}74;\quad 1{,}415 + 1{,}733;\quad \ldots.$$

Оказывается, существует и притом единственное число, для которого

эти последовательности являются последовательностями десятичных приближений соответственно по недостатку и по избытку. Это число и называется суммой чисел a и b.

После установления арифметических действий вводится важное понятие предела числовой последовательности (см. гл. V, § 1). На основе его определяется сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и выводится формула для вычисления суммы (см. гл. V, § 4). Эта формула позволяет получить правило для обращения периодических дробей.

Правило обращения периодических дробей. В § 2 доказана возможность обращения любой периодической дроби в дробь обыкновенную. Теперь дадим правило обращения.

Любая периодическая дробь вида $0,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots$ равна обыкновенной дроби, составленной по следующему правилу:

1) *ее числитель есть разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода;*

2) *ее знаменатель есть число, изображаемое цифрами* 9 *и нулями на конце. Цифра* 9 *повторяется столько раз, сколько цифр в периоде, а нуль — столько раз, сколько цифр содержится между запятой и периодом.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности (без ограничения общности доказательства) смешанную периодическую дробь вида

$$0,\ b_1(b_2b_3)=\frac{b_1}{10}+\frac{b_2b_3}{10^2}+\frac{b_2b_3}{10^5}+\ldots.$$

Надо доказать, что эта дробь равна дроби

$$\frac{b_1b_2b_3-b_1}{990}.$$

В самом деле, данная периодическая дробь равна

$$\frac{b_1}{10}+S,$$

где S — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (см. гл. V, § 4)

$$\frac{b_2b_3}{10^3},\ \frac{b_2b_3}{10^5},\ \frac{b_2b_3}{10^7},\ \ldots,$$

у которой первый член $a_1=\frac{b_2b_3}{10^3}$, а знаменатель $q=\frac{1}{10^2}$.

Так как $S=\frac{a_1}{1-q}$, то имеем

$$S=\frac{\frac{b_2b_3}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{b_2b_3}{990}.$$

Таким образом,

$$0,\ b_1(b_2b_3)=\frac{b_1}{10}+\frac{b_2b_3}{990}=\frac{(b_1\cdot10^2+b_2\cdot10+b_3)-b_1}{990},$$

или

$$0,\ b_1(b_2b_3)=\frac{b_1b_2b_3-b_1}{990},$$

что и утверждалось.

Например,

$$0{,}3\,(14)=\frac{314-3}{990}=\frac{311}{990},$$

$$2{,}(13)=2+\frac{13-0}{99}=2\frac{13}{99},$$

$$0{,}(7)=\frac{7-0}{9}=\frac{7}{9}.$$

§ 4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Определение. Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел образует множество *действительных* (или *вещественных*) чисел.

Таким образом, термином «действительное (или вещественное) число» обозначается число рациональное либо иррациональное.

Над действительными числами установлены арифметические действия — сложение, вычитание, умножение, деление. Основные свойства арифметических действий, сформулированные в § 1 для целых чисел, остаются справедливыми и для действительных чисел.

Сумма или разность рационального и иррационального чисел всегда есть число иррациональное. Это верно и для произведения или частного, если только рациональное число не равно нулю.

Однако арифметические действия над двумя иррациональными числами могут привести к рациональным числам. Например, $(2+\sqrt[3]{2})-\sqrt[3]{2}=2$, $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=3$ и т. п.

Возведение в степень с натуральным показателем и извлечение корня для действительных чисел определяются так же, как и для рациональных чисел.

Пусть a — действительное, n — натуральное число. По определению

$$a^n=\begin{cases}\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n\text{ раз}}, & \text{если } n\geqslant 2;\\ a, & \text{если } n=1\end{cases}$$

и $\sqrt[n]{a}=b$, если $b^n=a$ $(n\geqslant 2)$.

Из определения сразу вытекают свойства степеней с натуральными показателями:

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

2. $\dfrac{a^m}{a^n}=\begin{cases}a^{m-n}, & \text{если } m>n;\\ 1, & \text{если } m=n;\\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{если } m<n.\end{cases}$ $\qquad (a\neq 0)$

3. $(a^m)^n=a^{mn}$.

4. $(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{если } n\text{—четное;} \\ -a^n, & \text{если } n\text{—нечетное.} \end{cases}$

5. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$.

Доказательство всех этих свойств предоставим читателю.

Доказано, что в множестве действительных чисел извлечение корня всегда выполнимо, кроме случая, когда n—четно и $a < 0$. Однако действие извлечение корня не всегда однозначно.

Например, $\sqrt{16} = 4$ и $\sqrt{16} = -4$, так как $4^2 = (-4)^2 = 16$. В этом случае мы обязаны писать:

$$\sqrt{16} = \pm 4.$$

Чтобы внести определенность в употребление символа $\sqrt[n]{a}$, введено понятие арифметического корня.

Определение. *Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, для которого* $b^n = a$.

В дальнейшем под символом $\sqrt[n]{a}$ $(a \geqslant 0)$ будем понимать арифметическое значение корня. Например, $\sqrt{16} = 4$ есть арифметическое значение квадратного корня из 16.

Арифметическое значение корня существует для каждого $a \geqslant 0$. Докажем его единственность.

В самом деле, пусть $\sqrt[n]{a} = b_1$ и $\sqrt[n]{a} = b_2$, где $a \geqslant 0$, $b_1 \geqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$. Тогда $b_1^n = b_2^n = a$.

Если $b_1 \neq b_2$, например, $b_1 < b_2$, то $b_1^n < b_2^n$ (см. гл. II, § 7), что неверно. Из полученного противоречия следует единственность арифметического корня, т. е. $b_1 = b_2$.

Докажем следующие основные правила действий над радикалами.

1. Основное свойство корня. *Величина арифметического корня не изменяется, если показатель корня умножить на любое натуральное число k и одновременно подкоренное выражение возвести в степень с тем же показателем k*, т. е.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (a \geqslant 0).$$

В самом деле, пусть $\sqrt[n]{a} = b$ $(b \geqslant 0)$. Это означает, что $b^n = a$. Тогда по свойству степени

$$(b^n)^k = b^{nk} = a^k,$$

откуда следует, что $b = \sqrt[nk]{a^k}$.

Таким образом, $\sqrt[n]{a} = b = \sqrt[nk]{a^k}$, что и утверждалось.

2. Правило умножения корней. *При умножении арифметических корней с одинаковыми показателями подкоренные выражения умножаются, а показатель корня остается прежним*, т. е.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

В самом деле, по свойству степени имеем

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab,$$

так как $(\sqrt[n]{a})^n=a$, $(\sqrt[n]{b})^n=b$. Отсюда, согласно определению арифметического корня, следует, что

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \text{ или } \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}.$$

Утверждение доказано.

В частности, $\sqrt[n]{a^nb}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ (правило вынесения множителя за знак радикала).

3. Правило деления корней. *При делении арифметических корней с одинаковыми показателями подкоренные выражения делятся, а показатель корня остается прежним*, т. е.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (a\geqslant 0,\ b>0).$$

Это свойство доказывается так же, как и второе. В частности,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$$

(правило освобождения подкоренного выражения от знаменателя).

4. Правило возведения корня в степень. *При возведении арифметического корня в степень с натуральным показателем возводится в эту степень подкоренное выражение, а показатель корня остается прежним*, т. е.

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \quad (a\geqslant 0,\ m\text{—натуральное число}).$$

Это свойство есть следствие второго свойства.

5. Правило извлечения корня из корня. *При извлечении корня из корня перемножаются показатели корней, а подкоренное выражение остается прежним*, т. е.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \quad (a\geqslant 0;\ m,\ n\text{—натуральные числа},\ m\geqslant 2,\ n\geqslant 2).$$

В самом деле, согласно правилу возведения корня в степень, имеем

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})^{mn}}=\sqrt[m]{[(\sqrt[n]{a})^n]^m},$$

откуда

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\sqrt[m]{a^m}=a.$$

Следовательно, по определению корня,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a},$$

что и требовалось доказать.

Определение. Радикалы называются *подобными*, если у них одинаковы подкоренные выражения и одинаковы показатели корней.

В общем случае сумму или разность двух различных корней упростить нельзя. Упрощения возможны только в случае подобных радикалов.

Правило сравнения арифметических корней основано на следующем свойстве:

$$\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n]{b} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0), \text{ если } a \geqslant b,$$

и обратно,

$$\text{если } a \geqslant b \geqslant 0, \text{ то } \sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n]{b}.$$

Оно вытекает из свойств неравенств (см. гл. II, § 7).

Например,

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt{2},$$

так как

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2},\ \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} \text{ и } 3^2 > 2^3;$$

$$\sqrt{0{,}1} < \sqrt[3]{0{,}1},$$

так как

$$\sqrt{0{,}1} = \sqrt[6]{(0{,}1)^3},\ \sqrt[3]{0{,}1} = \sqrt[6]{(0{,}1)^2} \text{ и } (0{,}1)^3 < (0{,}1)^2.$$

При выполнении действий над радикалами иногда полезна следующая формула преобразования «сложного» квадратного радикала:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}, \qquad (14)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a^2 > b$ и знаки выбираются соответственно.

Для доказательства формулы (14) положим

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = x,\ \sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = y.$$

Очевидно, что $x > 0$. Так как $a+\sqrt{b} > a-\sqrt{b}$, то согласно правилу сравнения корней и $y > 0$.

Возведя в квадрат, получим:

$$x^2 = 2a + 2\sqrt{a^2-b},\quad y^2 = 2a - 2\sqrt{a^2-b},$$

откуда

$$x = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}},\quad y = \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}} = 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}} = 2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

Отсюда, после почленного сложения и вычитания, и получаем формулу (14).

Преобразуем, например, по формуле (14) корень $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$.

Здесь $a=4\sqrt{2}$, $b=24$. Поэтому

$$\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{32-24}}{2}}+\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{32-24}}{2}}=$$
$$=\sqrt{3\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}.$$

Замечание. Для корня нечетной степени справедлива формула

$$\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a} \quad (a\geqslant 0). \tag{15}$$

В самом деле, пусть $\sqrt[2k+1]{a}=b$. Тогда $b^{2k+1}=a$ или $(-b)^{2k+1}=-a$, откуда следует, что $(-b)=\sqrt[2k+1]{-a}$, т. е. $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$.

Из формулы (15) вытекает, что *корень нечетной степени из отрицательного числа имеет единственное действительное и притом отрицательное значение.*

С помощью формулы (15) нетрудно проверить, что правила 2—5 справедливы также и для корней нечетной степени с отрицательными подкоренными выражениями.

В общем случае для радикалов, не являющихся арифметическими, эти правила неверны. Например, для произведения $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}$ применение правил 1—2 приводит к неверному результату:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{(-3)^2}=\sqrt[6]{72}.$$

Правильное решение: так как $\sqrt[3]{-3}=-\sqrt[3]{3}$, то

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}=-(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3})=-(\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2})=-\sqrt[6]{72}.$$

Обобщение понятия о показателе степени. Ранее было определено понятие степени с натуральным показателем для любого действительного числа. Наряду с натуральным показателем рассматриваются также степени с любым действительным показателем.

Это обобщение понятия о показателе степени вводится таким образом, чтобы все свойства степеней с натуральными показателями* оставались справедливыми для любых действительных показателей.

По определению полагают:

1. $a^0=1$, где $a\neq 0$.

Символ 0^0 не имеет смысла.

2. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, где $a\neq 0$, n—натуральное число.

3. $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$, где $a\geqslant 0$, p и q—натуральные числа, $q\geqslant 2$.

4. $a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$, где $a>0$, p и q—натуральные числа, $q\geqslant 2$.

---

* Свойства степеней с натуральными показателями предполагаются известными читателю.

Замечание. Степень с дробным показателем $\frac{p}{q}$ рассматривается также при $a<0$, если дробь $\frac{p}{q}$ несократима и знаменатель q нечетное число.

5. Степень с иррациональным показателем. Пусть a—любое положительное число, α—иррациональное число.

Как всякое иррациональное число, α есть бесконечная непериодическая десятичная дробь: $\alpha=A,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots$.

Рассмотрим последовательность чисел

$$a^{A,b_1},\ a^{A,b_1b_2},\ \ldots,\ a^{A,b_1b_2\ldots b_n},\ \ldots.$$

Эта последовательность является монотонной и ограниченной и, следовательно, имеет предел (см. гл. V, § 1), который и принимают за a^α. Таким образом,

$$a^\alpha=\lim_{n\to\infty} a^{A,\,b_1b_2\ldots b_n}.$$

Например, степень $2^{\sqrt{2}}$ равна пределу последовательности

$$2^{1,4},\ 2^{1,41},\ 2^{1,414},\ 2^{1,4142},\ \ldots,$$

так как $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$.

Теорема. *Для любых действительных α и β и допустимых a и b справедливы равенства:*

I. $a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$.

II. $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$.

III. $\frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$.

IV. $(a\cdot b)^\alpha=a^\alpha\cdot b^\alpha$.

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

Строгое определение степени с иррациональным показателем и доказательство всех этих свойств для иррациональных α и β приводятся в курсе высшей математики.

Покажем справедливость свойств I—V для рациональных α и β.

I. Случай 1. $\alpha=m$, $\beta=-n$, где m и n—натуральные числа. Проверим, что $a^m\cdot a^{-n}=a^{m-n}$ $(a\neq 0)$.

Имеем

$$a^m\cdot a^{-n}=\frac{a^m}{a^n}=\begin{cases} a^{m-n}, & \text{если } m>n;\\ 1, & \text{если } m=n;\\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{если } m<n.\end{cases}$$

Так как $a^{m-m}=a^0=1$, $\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{m-n}$, то $a^m\cdot a^{-n}=a^{m-n}$ при любых соотношениях между m и n, что и утверждалось.

Случай 2. $\alpha=\frac{p}{q}$, $\beta=\frac{p_1}{q_1}$, где p, q, p_1, q_1—натуральные чис-

ла. Проверим, что $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p_1}{q_1}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p_1}{q_1}}$ $(a > 0)$. Имеем:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p_1}{q_1}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q_1]{a^{p_1}} = \sqrt[qq_1]{a^{pq_1}} \cdot \sqrt[qq_1]{a^{p_1 q}} =$$
$$= \sqrt[qq_1]{a^{pq_1+p_1q}} = a^{\frac{pq_1+p_1q}{qq_1}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p_1}{q_1}},$$

что и утверждалось.

Аналогично рассматриваются все остальные возможные случаи

II. Случай 1. $\alpha = -m$, $\beta = -n$, где m и n — натуральные числа Проверим, что $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$ $(a > 0)$. Имеем

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn},$$

что и утверждалось.

Случай 2. $\alpha = \frac{p}{q}$, $\beta = \frac{p_1}{q_1}$, где p, q, p_1, q_1 — натуральные числа. Проверим, что $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p_1}{q_1}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{p_1}{q_1}}$ $(a > 0)$. Имеем:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p_1}{q_1}} = \sqrt[q_1]{(\sqrt[q]{a^p})^{p_1}} = \sqrt[q_1]{\sqrt[q]{a^{pp_1}}} = \sqrt[q_1 q]{a^{pp_1}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{p_1}{q_1}},$$

что и утверждалось.

Аналогично проверяется справедливость свойства II во всех остальных случаях.

III. Имеем

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^\alpha \cdot a^{-\beta} = a^{\alpha+(-\beta)} = \alpha^{\alpha-\beta},$$

что и требовалось доказать.

IV. Это свойство доказывается разбором всех возможных случаев. Например, для $\alpha = \frac{p}{q}$ (p и q — натуральные числа) получаем:

$$\left(a \cdot b\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}},$$

что и утверждалось.

V. Это свойство вытекает из свойства IV:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = (a \cdot b^{-1})^\alpha = a^\alpha \cdot (b^{-1})^\alpha = a^\alpha \cdot b^{-\alpha} = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

Доказательство теоремы закончено.

Абсолютная величина действительного числа. *Абсолютной величиной*, или *модулем* действительного числа a называется неотрицательное число $|a|$, равное числу a, если $a \geqslant 0$, и числу $-a$, если $a < 0$.

Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $|4| = 4$, $|0| = 0$, $|-6| = -(-6) = 6$ и т. д.

Отметим следующие свойства абсолютной величины:

1. $|a| = |-a|$.

Это равенство непосредственно вытекает из определения абсолютной величины.

2. $|a| \geqslant a$, $|a| \geqslant -a$.

В самом деле, если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$ и подавно $|a| \geqslant -a$. Если $a < 0$, то $|a| = -a$ и подавно $|a| \geqslant a$, так как $|a| \geqslant 0$.

3. $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

Эти равенства вытекают из правила знаков.

4. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

В самом деле, есть две возможности:

1) $a+b \geqslant 0$, тогда

$$|a+b| = a+b,$$

но $a \leqslant |a|$, $b \leqslant |b|$ (см. свойство 2) и поэтому

$$a+b \leqslant |a| + |b|. \qquad (*)$$

2) $a+b < 0$, тогда

$$|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b),$$

но $-a \leqslant |a|$, $-b \leqslant |b|$ (см. свойство 2) и поэтому

$$(-a) + (-b) \leqslant |a| + |b|. \qquad (**)$$

Из неравенств (*) и (**) следует, что $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

5. $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

Так как $a = (a-b) + b$, то по свойству 4

$$|a| = |(a-b) + b| \leqslant |a-b| + |b|,$$

откуда следует, что

$$|a| - |b| \leqslant |a-b|, \text{ или } |a-b| \geqslant |a| - |b|.$$

Геометрическое изображение действительных чисел. Координаты точки. Для наглядности действительные числа принято изображать точками числовой оси — прямой, на которой выбрано положительное направление, масштаб и начало отсчета (рис. 1).

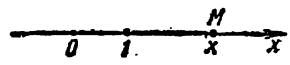


Рис. 1

Из геометрии известно, что всякий отрезок OM имеет длину, выраженную рациональным или иррациональным числом.

Поэтому каждой точке M на числовой оси соответствует вполне определенное действительное число x, положительное, если M лежит справа от O, и отрицательное, если M лежит слева от O. Абсолютная величина числа x равна длине отрезка OM.

Обратно, всякому действительному числу x соответствует на оси Ox определенная точка M, которая удалена от точки O на расстояние, равное $|x|$, и лежит справа от O, если $x>0$, и слева — если $x<0$. При $x=0$ точка M совпадает с точкой O. Таким образом, между всеми действительными числами и точками числовой оси установлено взаимно однозначное соответствие.

Определение. Действительное число x, соответствующее точке M на числовой или координатной оси, называется ее *координатой*.

При этом записывают: $M(x)$, где x — координата точки M. Координата точки определяет ее положение на прямой.

Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — две точки, расположенные на числовой оси.

Справедлива следующая формула для расстояния между двумя точками на оси:

$$M_1M_2=|x_2-x_1|. \tag{16}$$

Для доказательства рассмотрим все возможные случаи расположения точек M_1 и M_2:

1) $0\leqslant x_1<x_2$ (рис. 2, *а*). В этом случае

$$M_1M_2=OM_2-OM_1=x_2-x_1=|x_2-x_1|;$$

2) $0\leqslant x_2<x_1$ (рис. 2, *б*). В этом случае

$$M_1M_2=OM_1-OM_2=x_1-x_2=|x_2-x_1|;$$

3) $x_1<0<x_2$ (рис. 2, *в*). Тогда $OM_1=-x_1$, $OM_2=x_2$, в этом случае $M_1M_2=OM_1+OM_2=-x_1+x_2=|x_2-x_1|$.

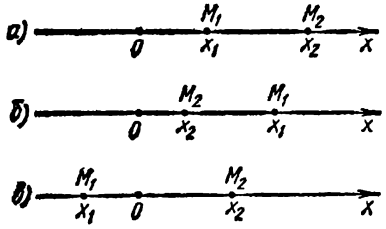


Рис. 2

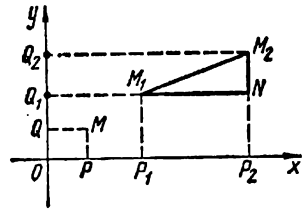


Рис. 3

Аналогично рассматриваются случаи, когда точки M_1 и M_2 лежат слева от точки O. И здесь мы получаем, что $M_1M_2=|x_2-x_1|$.

Таким образом, при любом расположении на оси точек $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ расстояние M_1M_2 равно $|x_2-x_1|$.

Перейдем от прямой к плоскости.

Две взаимно перпендикулярные оси с общим началом O образуют систему координат на плоскости. Горизонтальная ось называется *осью абсцисс* или осью Ox, вертикальная — *осью ординат* или осью Oy (рис. 3).

Пусть M — произвольная точка плоскости. Спроектируем ее на ось абсцисс и ось ординат (рис. 3).

Определение. Координата проекции точки M на ось Ox называется *абсциссой* точки M, координата проекции точки M на ось Oy называется *ординатой* точки M.

Абсцисса и ордината точки M, вместе взятые, называются *координатами* точки M. При этом записывают $M(x, y)$ (на первом месте всегда стоит абсцисса).

Таким образом, каждой точке плоскости соответствует определенная упорядоченная пара чисел — ее координат x и y.

Обратно, каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка плоскости $M(x, y)$. Таким образом, координаты x и y определяют положение точки на плоскости.

Пусть даны две точки: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Справедлива следующая формула для расстояния между двумя точками на плоскости:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (17)$$

Для доказательства рассмотрим треугольник M_1M_2N (рис. 3), в котором согласно формуле (16) катет M_1N равен $|x_2-x_1|$ и катет M_2N равен $|y_2-y_1|$. По теореме Пифагора

$$M_1M_2 = \sqrt{M_1N^2+M_2N^2} = \sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2} = \\ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Формула (17) остается верной и в том случае, когда $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$. Тогда эта формула дает либо

$$M_1M_2 = \sqrt{(y_2-y_1)^2} = |y_2-y_1|,$$

либо

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2} = |x_2-x_1|.$$

Например, найдем расстояние между точками $M_1(1,3)$ и $M_2(-3, 0)$. Согласно формуле (17)

$$M_1M_2 = \sqrt{(-3-1)^2+(0-3)^2} = 5.$$

§ 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Рассмотрим некоторые задачи, при решении которых используются свойство последовательных чисел (см. гл. I, § 1), деление с остатком, следствия из теоремы Безу (см. гл. II, § 3), формула бинома Ньютона (см. гл. VI, § 2) и метод индукции.

Пример 1. Доказать, что при любом простом $p > 3$ число p^2-1 делится на 24.

Решение. По свойству последовательных чисел произведение $(p-1)\,p\,(p+1)$ делится на 3.

Так как $p > 3$ — простое, то на 3 делится число $(p-1)(p+1) = p^2-1$. Оно является произведением двух последовательных четных чисел (всякое простое число, не равное 2, — нечетное), т. е. $(p-1)(p+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$, и, следовательно, оно делится на 8.

Итак, число p^2-1 делится на взаимно простые числа 3 и 8, а значит, делится и на их произведение.

Отсюда вытекает, что число p^2-q^2, где p и q — простые, бо́льшие 3, также делится на 24. В самом деле, $p^2-q^2=(p^2-1)-(q^2-1)$, и каждое слагаемое делится на 24.

Пример 2. Доказать, что квадрат любого простого числа $p\geqslant 5$ при делении на 12 дает в остатке 1.

Решение. Натуральное число при делении на 6 может дать в остатке лишь числа 0, 1, 2, 3, 4, 5. Поэтому всякое натуральное число имеет один из следующих видов:

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5.$$

Очевидно, что числа $6k$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ составные. Поэтому простое число $p\geqslant 5$ имеет вид $6k+1$ или $6k+5$. Если $p=6k+1$, то $p^2=(6k+1)^2=36k^2+12k+1$. Если $p=6k+5$, то $p^2=(6k+5)^2=36k^2+60k+25=12(3k^2+5k+2)+1$. Таким образом, в обоих случаях остаток при делении p^2 на 12 равен 1.

Пример 3. Доказать, что при любом натуральном n число $A=4^{2n}-3^{2n}-7$ делится на 84.

Решение. Так как 84 равно произведению взаимно простых чисел 3, 4 и 7, то для решения надо доказать, что число A делится на 3, 4 и 7.

Представив A в виде $A=(4^{2n}-3^{2n})-7$, замечаем, что число $4^{2n}-3^{2n}$ есть разность степеней с одинаковыми четными показателями. По следствию из теоремы Безу число $4^{2n}-3^{2n}$ делится на сумму оснований $4+3=7$. Таким образом, A делится на 7.

Представив A в виде $A=(4^{2n}-1)-3^{2n}-6$, замечаем, что $4^{2n}-1$ делится на разность оснований $4-1=3$. Поэтому A делится на 3.

Наконец, записав A в виде $A=4^{2n}-(3^{2n}-1)-8$, замечаем, что $3^{2n}-1$ делится на $3+1=4$, и следовательно, A делится на 4.

Пример 4. Доказать, что при любом натуральном n число

$$A=\frac{10^n-1}{81}-\frac{n}{9}$$

является целым.

Решение. По формуле бинома Ньютона

$$A=\frac{(9+1)^n-1-9n}{81}=\frac{9^n+n\cdot 9^{n-1}+\ldots+n\cdot 9+1-1-9n}{81}.$$

После приведения подобных членов каждое слагаемое в числителе содержит множитель $9^2=81$, т. е. A — целое.

Пример 5. Доказать, что число $A_n=4^n+15n-1$ делится на 3 и на 9.

Решение. Достаточно доказать, что число A_n делится на 9. С этой целью применим метод индукции.

При $n=1$ $A_1=4+15-1=18$ делится на 9.

Предположим, что A_k делится на 9. Тогда

$$A_{k+1}=4^{k+1}+15(k+1)-1=4\cdot 4^k+15k+14=$$
$$=4(4^k+15k-1)-45k+18=A_k-45k+18$$

также делится на 9. Таким образом, число A_n делится на 9 для любого $n \geqslant 1$.

Пример 6. Доказать, что при любом $n > 1$ число $n^4 + 4$ составное.

Решение. Имеем

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

Если $n > 1$, то

$$n^2 + 2n + 2 > 5, \quad n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > 1,$$

т. е. число $n^4 + 4$ разлагается на произведение двух чисел, каждое из которых не равно единице.

Пример 7. Определить показатель степени 2^α в каноническом разложении 100!

Решение. Очевидно, искомое α — показатель повторения 2 в разложении 100! равно числу всех чисел от 1 до 100, делящихся на 2, 4, ..., 64.

Таким образом,

$$\alpha = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{8}\right] + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right],$$

где $\left[\frac{100}{2^n}\right]$ — целая часть дроби $\frac{100}{2^n}$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{100}{2^n}$:

$$\left[\frac{100}{2}\right] = 50, \quad \left[\frac{100}{4}\right] = 25, \quad \left[\frac{100}{8}\right] = 12,$$
$$\left[\frac{100}{16}\right] = 6, \quad \left[\frac{100}{32}\right] = 3, \quad \left[\frac{100}{64}\right] = 1.$$

Отсюда $\alpha = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$.

Пример 8. Найти все рациональные x, для которых число $\sqrt{4x^2 + x - 1}$ также рационально.

Решение. Положим $\sqrt{4x^2 + x - 1} = 2x + a$. Число $2x + a$ при рациональном x будет рационально лишь при рациональном a. Имеем

$$4x^2 + x - 1 = 4x^2 + 4ax + a^2,$$

откуда $x = \frac{a^2 + 1}{1 - 4a}$, где $a \neq \frac{1}{4}$ — любое рациональное число, удовлетворяющее условию $2x + a \geqslant 0$.

Пример 9. Доказать, что $\log_2 3$ — иррациональное число.

Решение. Предположим противное: пусть $\log_2 3$ — рациональное число $\frac{p}{q}$, где p и q — целые. Тогда $\log_2 3 = \frac{p}{q}$, откуда $2^p = 3^q$. Но это равенство невозможно, так как 2^p — четное число, а 3^q — нечетное. Значит наше предположение неверно, и $\log_2 3$ является иррациональным числом.

§ 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Введение комплексных чисел вызвано уже тем, что в множестве действительных чисел невыполнимо извлечение квадратного корня или вообще корня четной степени из отрицательного числа.

Определение. *Комплексным* числом называется выражение вида $a+bi$, где a и b—действительные числа, а i—некоторый символ. При этом a называется *действительной* (или вещественной) *частью* данного комплексного числа, b—его *мнимой частью*, i—*мнимой единицей*. Символ $a+bi$ рассматривается сначала как цельный.

Если, в частности, $b=0$, то комплексное число $a+0i$ считается совпадающим с действительным числом a, т. е.

$$a+0i=a. \tag{18}$$

Таким образом, действительные числа представляют собой частный случай комплексных чисел.

Если, в частности, $a=0$, то комплексное число $0+bi$ обозначается просто bi и называется *чисто мнимым:*

$$0+bi=bi; \tag{19}$$

при этом полагают

$$0+1i=i, \quad 0-1i=-i. \tag{20}$$

Определение. Комплексные числа $a+bi$ и $c+di$ считаются *равными:*

$$a+bi=c+di, \tag{21}$$

тогда и только тогда, когда $a=c$, $b=d$.

В частности, $a+bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b=0$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются, т. е. комплексные числа по величине не сравниваются.

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$, отличающиеся только знаками при мнимой части, называются *комплексно сопряженными* или просто *сопряженными*.

Запись $\overline{c+di}=a+bi$ или $\overline{a+bi}=c+di$ означает, что числа $a+bi$ и $c+di$ являются сопряженными, т. е. $c=a$, $d=-b$.

Таким образом, знак «сопряжения»—черта над комплексным числом—означает изменение знака при мнимой части.

Как известно, действительные числа изображаются точками числовой оси. Комплексное число $z=a+bi$ принято изображать точкой на плоскости M с координатами a и b (рис. 4).

Очевидно, что при этом каждой точке плоскости соответствует определенное комплексное число, и обратно, каждому комплексному числу z соответствует единственная точка плоскости, которая служит для изображения z. В частности, действительные числа изображаются точками оси абсцисс, чисто мнимые—точками оси ординат. Точка с координатами (0, 1) служит изображением числа i. Сопряженным числам z и $\bar{z}$ отвечают соответственно точки с коор-

динатами (a, b) и $(a, -b)$. Очевидно, что эти точки симметричны относительно оси Ox.

Плоскость xOy, которая служит для изображения комплексных чисел, называется *комплексной плоскостью.*

Полезно и другое геометрическое истолкование комплексного числа: число $z=a+bi$ рассматривается как вектор $\overline{OM}$ с началом в точке O и с концом в точке $M(a, b)$ (рис. 4).

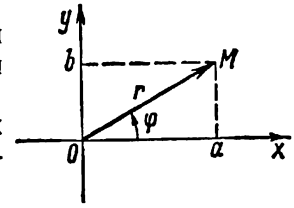


Рис. 4

Установим над комплексными числами арифметические действия, а также действия возведения в степень и извлечения корня.

Сложение. *Суммой* z_1+z_2 комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется комплексное число

$$z=z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\,i. \qquad (22)$$

В связи с тем, что действительное число есть частный случай комплексного числа возникает вопрос: не противоречит ли действие сложения по формуле (22) ранее введенному действию сложения действительных чисел?

Если положить в формуле (22) $b=0$ и $d=0$, то согласно соотношению (18) получаем справедливое равенство между действительными числами:

$$(a+0i)+(c+0i)=(a+c)+(0+0)\,i=a+c.$$

Таким образом, противоречия нет.

Символ $a+bi$ до сих пор рассматривался как цельный. Теперь из определения суммы следует, что комплексное число $a+bi$ можно рассматривать как сумму действительного числа a с чисто мнимым числом bi.

В самом деле, согласно формулам (18), (19) и (22) имеем:

$$(a)+(bi)=(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(b+0)\,i=a+bi,$$

что и утверждалось.

Вычитание вводится как действие, обратное сложению. *Разностью* z_1-z_2 комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется такое число z:

$$z_1-z_2=z,$$

что $z_2+z=z_1$.

Покажем, что для любых z_1 и z_2 разность $z=x+yi$ существует и единственна.

В самом деле, согласно формуле (22)

$$a+bi=(c+di)+(x+yi)=(c+x)+(d+y)\,i,$$

откуда по определению (21) следует, что $a=c+x$, $b=d+y$, т. е. $x=a-c$ и $y=b-d$.

Таким образом,

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i. \qquad (23)$$

Очевидно, что

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a,$$
$$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi,$$

т. е. *сумма двух комплексно сопряженных чисел есть действительное число, а разность — чисто мнимое.*

Умножение. *Произведением* z_1z_2 комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется комплексное число

$$z=z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i. \tag{24}$$

Предоставляем читателю убедиться с помощью формул (18) и (24), что определяемое формулой (24) действие умножения не противоречит действию умножения действительных чисел.

Из формул (24) и (20) вытекает, что:

1) $b\cdot i=(b+0i)\cdot(0+1i)=0+bi=bi$,

т. е. чисто мнимое число bi можно рассматривать как произведение действительного числа b на мнимую единицу i;

2) $i\cdot i=i^2=(0+1i)\cdot(0+1i)=-1+0i=-1$,

т. е. мнимая единица есть такое число, квадрат которого равен отрицательной единице.

Таким образом, символ $a+bi$, введенный ранее как цельный, теперь можно рассматривать как сумму действительного числа a с чисто мнимым bi, а последнее — как произведение числа b на мнимую единицу, и формула (24) получается по обычному правилу умножения буквенных двучленов с учетом равенства $i^2=-1$;

3) $z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$, т. е. *произведение двух комплексно сопряженных чисел есть действительное неотрицательное число.*

Деление вводится как действие, обратное умножению. *Частным* $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется такое число z, что $z_2\cdot z=z_1$.

Покажем, что для любого $z_2\neq 0$ частное $z=x+yi$ существует и единственно.

В самом деле, согласно формуле (24)

$$a+bi=(c+di)\cdot(x+yi)=(cx-dy)+(dx+cy)i,$$

откуда по определению (21) следует, что

$$\begin{cases} a=cx-dy \\ b=dx+cy. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

($c^2+d^2\neq 0$, так как $c+di\neq 0$). Таким образом,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \tag{25}$$

Замечание. Вывод формулы (25) необходим для доказательства существования и единственности частного. Практически деление выполняют по следующему правилу:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}.$$

Например,

$$\frac{1-i}{2+i}=\frac{(1-i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{1-3i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i.$$

Из формул (22), (23), (24), (25) вытекает, что для комплексных чисел сохраняются основные свойства арифметических действий:

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),$$
$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,\quad (z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3),$$
$$(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3.$$

Общий вывод. Все арифметические действия над комплексными числами производят по тем же правилам, по каким они производятся для чисел действительных, если учитывать при этом равенство $i^2=-1$.

Если в сумме, разности, произведении и частном комплексных чисел каждое число заменить сопряженным с ним, то и результаты заменятся сопряженными с ними числами:

1) $\overline{z_1}+\overline{z_2}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)\,i=\overline{z_1+z_2}$,

2) $\overline{z_1}-\overline{z_2}=(a-bi)-(c-di)=(a-c)-(b-d)\,i=\overline{z_1-z_2}$,

3) $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)\cdot(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)\,i=\overline{z_1z_2}$,

4) $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{a-bi}{c-di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}-\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i=\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

В этом нетрудно убедиться с помощью непосредственной проверки по формулам (22), (23), (24), (25). Отсюда вытекает следующее полезное правило.

Если в выражении, составленном из комплексных чисел, над которыми производятся арифметические действия, каждое комплексное число заменить сопряженным с ним, то и значение всего выражения заменяется на сопряженное.

Возведение в степень. Полагают

$$z^n=\begin{cases}\underbrace{z\cdot z\ldots z}_{n\text{ раз}}, & \text{если } n\geqslant 2;\\ z, & \text{если } n=1,\end{cases}\qquad(26)$$

где n — натуральное число.

Для $z\neq 0$ полагают

$$z^0=1,\quad z^{-n}=\frac{1}{z^n}.$$

Нетрудно проверить, что при возведении комплексного числа в сте-

пень с целым показателем справедливы следующие свойства:

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{pq}, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad (z_1 \cdot z_2)^p = z_1^p \cdot z_2^p, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p = \frac{z_1^p}{z_2^p},$$

где p и q — целые.

Найдем степени числа i. По определению $i^0 = 1$, $i^1 = i$; далее, известно, что $i^2 = -1$. Поэтому

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i.$$

Вообще

$i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$ (n — натуральное).

Для возведения в степень числа $a + bi$ используют формулу бинома Ньютона и уже известные степени числа i:

$$(a+bi)^n = a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} bi - C_n^2 \cdot a^{n-2} b^2 - C_n^3 \cdot a^{n-3} b^3 i + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k i^k + \ldots + b^n i^n.$$

Извлечение корня. *Корнем* n-й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w:

$$w = \sqrt[n]{z}, \tag{27}$$

что $w^n = z$ ($n \geqslant 2$ — натуральное).

Таким образом, извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень.

Извлечем, например, квадратный корень из действительного отрицательного числа ($-a^2$) и покажем, что

$$\sqrt{-a^2} = \pm ai;$$

в частности, $\sqrt{-1} = \pm i$.

Полагая $\sqrt{-a^2} = x + yi$, согласно равенству (27) имеем

$$(x+yi)^2 = -a^2,$$

или

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = -a^2.$$

Отсюда получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -a^2, \\ 2xy = 0, \end{cases}$$

решая которую, найдем, что

$$x = 0, \quad y = \pm a$$

(случай $y = 0$ невозможен, так как при этом $x^2 = -a^2$, что неверно для действительных чисел). Поэтому $\sqrt{-a^2} = \pm ai$.

Доказано, что корень $\sqrt[n]{z}$ всегда существует и имеет ровно n различных значений, если $z \neq 0$. Очевидно, $\sqrt[n]{0} = 0$.

Тригонометрическая форма. Комплексное число $z = a + bi$ геометрически изображается точкой $M(a, b)$ или вектором $\overrightarrow{OM}$ с началом

в точке O и с концом в точке M (рис. 4). Для задания комплексного числа достаточно указать изображающую его точку M или вектор $\overline{OM}$. Положение точки M ранее определялось ее координатами a и b.

Однако положение точки M можно характеризовать и другим способом. Обозначим через r расстояние точки M от начала координат (т. е. длину вектора $\overline{OM}$), а через φ — угол, который образует вектор $\overline{OM}$ с осью Ox, отсчитываемый от положительного направления оси (рис. 4). Очевидно, что задание величин r и φ однозначно определяет положение точки M на плоскости.

Из тригонометрии известно, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r},$$

откуда

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi. \tag{28}$$

Поэтому

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{29}$$

Правая часть равенства (29) называется *тригонометрической формой* комплексного числа z, тогда как запись z в виде $a + bi$ называется его *алгебраической формой*.

Из формул (28) или непосредственно из рис. 4 получим, что

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \ (a \neq 0). \tag{30}$$

Число r является неотрицательным действительным числом, причем оно равно нулю только для $z = 0$. Число r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается символом $|z|$.

Угол φ называется *аргументом* числа z и обозначается символом $\arg z$. Угол φ определяется с точностью до $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), так как углам φ и $\varphi + 2k\pi$ при одинаковом r соответствует одна и та же точка M. Аргумент не определен только для $z = 0$.

У равных комплексных чисел модули равны, а аргументы могут отличаться только на $2k\pi$.

Для перехода от алгебраической формы к тригонометрической форме удобно сначала изобразить комплексное число точкой или вектором и затем по формулам (30) найти $|z|$ и $\arg z$ (при определении аргумента φ по найденному значению $\operatorname{tg}\varphi$ нужно учитывать координатную четверть, в которой лежит изображающая точка). Переход от тригонометрической формы к алгебраической форме очевиден.

Отметим, что если некоторое комплексное число z записано в виде

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

где $\rho > 0$ и α — действительное число, то ρ является модулем числа z, а α — его аргументом.

В самом деле, для этого числа z, очевидно, $a=\rho\cos\alpha$ и $b=\rho\sin\alpha$. Тогда

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\rho^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=\rho,$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{\rho\cos\alpha}{\rho}=\cos\alpha,\qquad \sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{\rho\sin\alpha}{\rho}=\sin\alpha,$$

откуда $\varphi=\alpha$ (с точностью до $2k\pi$).

Пример. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

1) $z=-3$, 2) $z=2i$, 3) $z=1-i$, 4) $z=-3-4i$.

Решение. 1) Отрицательные действительные числа лежат на отрицательной полуоси Ox (рис. 5). Следовательно, их аргумент равен π, а модули совпадают с абсолютными величинами этих чисел. Поэтому $r=|-3|=3$, $\varphi=\arg(-3)=\pi$ и $-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$.

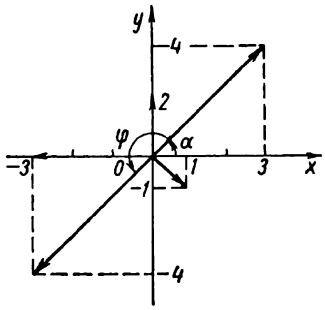


Рис. 5

2) Числа вида bi, где $b>0$, лежат на положительной полуоси Oy. Следовательно, их аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, а модуль совпадает с b ($r=\sqrt{a^2+b^2}=b$, $b>0$). Поэтому

$$r=|2i|=2,\qquad \varphi=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}$$

и

$$2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Заметим, что вторая из формул (30) здесь не применима.

3) По формулам (30) найдем для числа $z=1-i$, что

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{-1}{1}=-1.$$

Изображающая число z точка лежит в IV четверти или в первой отрицательной четверти (рис. 5). Поэтому для аргумента φ можно взять значения $\frac{7}{4}\pi$ или $-\frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Заметим, что равенство

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

не является тригонометрической формой числа $1-i$.

4) По формулам (30) найдем для числа $z=-3-4i$, что

$$r=5,\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{3}.$$

Учитывая положение изображающей точки (она лежит в III четверти), для φ остается найти такое значение, что $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{3}$ и $\pi<\varphi<\frac{3}{2}\pi$ (рис. 5).

Как видно из рис. 5, $\varphi=\pi+\alpha$, где α—острый угол и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. Поэтому $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ (см. гл. XII, § 3), т. е. $\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Тогда

$$-3-4i=5\left[\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right].$$

Выясним геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$. Этим числам соответствуют на плоскости точки $M_1(a_1, b_1)$ и $M_2(a_2, b_2)$.

Так как $z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$, то

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.$$

Правая часть полученного равенства есть расстояние между точками M_1 и M_2 (см. формулу (17)). Следовательно,

$$|z_1-z_2|=M_1M_2,$$

т. е. *модуль* $|z_1-z_2|$ *равен расстоянию между точками на плоскости, изображающими числа* z_1 *и* z_2.

Пусть z_0 и r—заданные числа, причем z_0—комплексное, а r—действительное и положительное. Рассмотрим окружность с центром в точке M_0, изображающей z_0, и радиусом, равным r. Обозначим через $M(x, y)$ точку на этой окружности. Тогда комплексное число $z=x+yi$ удовлетворяет равенству $|z-z_0|=r$.

Верно и обратное, т. е. из равенства $|z-z_0|=r$ вытекает, что точка, изображающая число z, лежит на указанной окружности. Таким образом, равенство

$$|z-z_0|=r \qquad (*)$$

можно рассматривать как уравнение окружности с центром в точке M_0 и радиусом, равным r.

Запишем равенство (*) в другом виде. Пусть $z_0=a+bi$. Тогда

$|z-z_0|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ и равенство (*) означает, что

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (31)$$

Заметим, что уравнение (31) можно сразу получить из формулы (17).

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Умножение. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$

Применяя известные из тригонометрии формулы сложения (гл. X), окончательно получим

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (32)$$

Итак, *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Деление. Имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (33)$$

Итак, *при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Из формул (32) и (33) следует, что

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0),$$

$$\arg(z_1\cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Возведение в степень. Применяя формулу (32) последовательно n раз, получим

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (34)$$

Формулу (34) называют *формулой Муавра.*

Например, вычислим

$$z = \frac{(1 - i\sqrt{3})^3}{(1+i)^2}.$$

Имеем

$$|z| = \frac{|1 - i\sqrt{3}|^3}{|1+i|^2} = \frac{2^3}{(\sqrt{2})^2} = 4,$$

$$\arg z = \arg[(1 - i\sqrt{3})^3] - \arg[(1+i)^2] = 3\arg(1 - i\sqrt{3}) - 2\arg(1+i).$$

Так как

$$\arg(1 - i\sqrt{3}) = \frac{5}{3}\pi, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4},$$

то

$$\arg z = 3\cdot\frac{5}{3}\pi - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{9}{2}\pi.$$

Поэтому

$$z = 4\left(\cos\frac{9}{2}\pi + i\sin\frac{9}{2}\pi\right) = 4i.$$

Извлечение корня. **Теорема.** *Корень* $\sqrt[n]{z}$ *всегда существует и имеет ровно* n *различных значений, если* $z \neq 0$.

Доказательство. Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Полагаем

$$\omega=\sqrt[n]{z}=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Тогда $\omega^n=z$ и по формуле Муавра

$$\omega^n=\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha),$$

т. е.

$$\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Так как модули равных комплексных чисел одинаковы, а аргументы могут отличаться только на $2k\pi$, то $\rho^n=r$, $n\alpha=\varphi+2k\pi$. Отсюда $\rho=\sqrt[n]{r}$ (корень берется арифметический), $\alpha=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}$. Тогда

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{35}$$

В формуле (35) достаточно положить $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

В самом деле, для этих значений k все полученные по формуле (35) значения корней будут различны, так как их аргументы не отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

При $k=n$ получаем $\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}=\dfrac{\varphi}{n}+2\pi$ и соответствующий корень совпадает с корнем, который отвечает значению $k=0$.

Любое другое целое k представимо в виде $k=nq+l$, где q — целое, $0\leqslant l<n$. Поэтому

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2l\pi}{n}+2q\pi.$$

Отсюда следует, что соответствующий корень совпадает с корнем, отвечающим значению $k=l$. Теорема доказана.

Например, вычислим $\sqrt[3]{-1}$. Имеем

$$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right).$$

Придавая k значения 0, 1, 2, получим три значения $\sqrt[3]{-1}$:

при $k=0$ $\quad\omega_1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

при $k=1$ $\quad\omega_2=-1$,

при $k=2$ $\quad\omega_3=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Рассмотрим некоторые задачи на комплексные числа.

Пример 1. Найти действительные числа x и y, если

$$(5x-3y)+(x-2y)\,i=6+(8-x+y)\,i.$$

Решение. Используя условие равенства комплексных чисел, получаем

$$\begin{cases} 5x-3y=6, \\ x-2y=8-x+y. \end{cases}$$

Из этой системы определяем неизвестные x и y:

$$x=-\frac{2}{3},\quad y=-\frac{28}{9}.$$

Пример 2. Возвести в степень

$$(1+i)^{20},\quad (1-i)^{21}.$$

Решение. Можно воспользоваться формулой бинома Ньютона, но проще поступить по-другому. Заметим, что

$$(1+i)^2=2i,\ (1-i)^2=-2i.$$

Тогда

$$(1+i)^{20}=[(1+i)^2]^{10}=(2i)^{10}=-2^{10};$$
$$(1-i)^{21}=[(1-i)^2]^{10}\cdot(1-i)=(-2i)^{10}\cdot(1-i)=-2^{10}(1-i).$$

Пример 3. Извлечь корень $\sqrt{5+12i}$.

Решение. Пусть $\sqrt{5+12i}=x+yi$. По определению корня имеем

$$(x+yi)^2=5+12i,$$

или

$$(x^2-y^2)+2xyi=5+12i,$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ 2xy=12. \end{cases} \qquad (*)$$

Возведя оба уравнения в квадрат и сложив их, получим

$$(x^2+y^2)^2=25+144 \text{ и } x^2+y^2=13.$$

Тогда из системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x^2-y^2=5, \end{cases}$$

определим неизвестные x и y:

$$x=\pm 3,\ y=\pm 2.$$

Из второго уравнения системы (*) следует, что знаки x и y совпадают. Поэтому $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=-3$, $y_2=-2$.

Итак, $\sqrt{5+12i}$ имеет два значения

$$3+2i \text{ и } -3-2i.$$

Пример 4. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^2+|z|=0$.

Решение. Пусть $z=x+yi$. Тогда

$$z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi,\ |z|=\sqrt{x^2+y^2},$$

и данное уравнение можно записать в виде

$$(x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2})+2xyi=0.$$

Последнее возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0, \\ xy=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Из второго уравнения системы (*) следует, что либо $x=0$, либо $y=0$.

Если $x=0$, то первое уравнение (*) принимает вид

$$-y^2+\sqrt{y^2}=0,\ \text{т. е.}\ -y^2+|y|=0.$$

Так как $y^2=|y|^2$ (по свойству абсолютной величины действительного числа), то имеем

$$|y|\cdot(|y|-1)=0,$$

откуда либо $|y|=0$, либо $|y|-1=0$.

Таким образом, при $x=0$ имеем: $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=-1$.

Если $y=0$, то из первого уравнения системы (*) получим, что $x^2+\sqrt{x^2}=0$, т. е. $x^2+|x|=0$. Но это возможно только при $x=0$ (ведь x—действительное число!).

Итак, данное уравнение имеет три корня:

$$z_1=0,\ z_2=i,\ z_3=-i.$$

Пример 5. Комплексные числа удовлетворяют условию $|z-i|=|z+2|$. Где расположены точки, изображающие эти числа?

Решение. Используем геометрический смысл модуля разности. Модули $|z-i|$ и $|z+2|=|z-(-2)|$ равны соответственно расстояниям от точки, изображающей число z, до точек $A(0,\ 1)$ и $B(-2,\ 0)$.

По условию эти расстояния равны. Следовательно, решением задачи будет геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B, т. е. перпендикуляр, проведенный через середину отрезка AB.

Пример 6. Комплексные числа удовлетворяют условиям $1<|z|<2$, $\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{4}$. Где расположены точки, изображающие эти числа?

Решение. Так как $1<|z|<2$, то точки, удовлетворяющие этому условию, лежат внутри кольца, ограниченного окружностями с центром в точке O и радиусами 1 и 2. Поскольку же $\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{4}$, решению задачи удовлетворяют только точки, лежащие внутри области, изображенной на рис. 6.

Пример 7. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-25i| \leqslant 15$, найти число, имеющее наименьший аргумент.

Решение. Условию $|z-25i| \leqslant 15$ удовлетворяют только числа, изображаемые точками, которые лежат внутри и на границе круга с центром в точке $C(0,25)$ и радиусом 15 (рис. 7).

Как видно из рис. 7, числу с наименьшим аргументом отвечает точка M, в которой прямая OM касается окружности. Из прямоугольного треугольника OMC найдем, что

$$OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20,$$

$$\cos\alpha = \frac{MC}{OC} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{OM}{OC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Поэтому $x = OM \cdot \cos\alpha = 12$, $y = OM \cdot \sin\alpha = 16$, значит искомое число $z = 12 + 16i$.

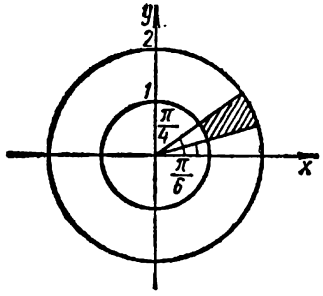


Рис. 6

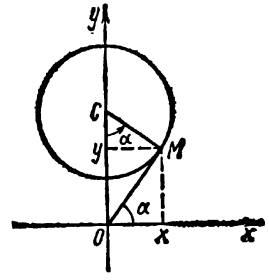


Рис. 7

Пример 8. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где α—данный угол, причем: а) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Преобразуем данное число z:

а) $z = 1 + i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Так как число $\frac{1}{\cos\alpha} > 0$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и в скобке стоит косинус и синус одного и того же аргумента, то полученное выражение есть тригонометрическая форма числа z;

б) при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ число $\frac{1}{\cos\alpha} < 0$ и, значит, выполненное выше преобразование не дает тригонометрической формы числа z.

Преобразуем z по-другому:

$$z = -\frac{1}{\cos\alpha}[(-\cos\alpha) + i(-\sin\alpha)] = -\frac{1}{\cos\alpha}[\cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha)],$$

что и дает тригонометрическую форму числа z при условии $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Пример 9. Найти аргумент числа $w = z^2 - z$, если известно, что $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Решение. Имеем:

$$w = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 - (\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi) - (\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= (\cos 2\varphi - \cos\varphi) + i(\sin 2\varphi - \sin\varphi).$$

Преобразуя выражения в скобках, получаем, что

$$w = -2\sin\frac{3\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2} + i\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{3\varphi}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\left(-\sin\frac{3\varphi}{2} + i\cos\frac{3\varphi}{2}\right) =$$
$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}\right)\right].$$

При $0 < \varphi < 2\pi$ число $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$ и полученное выражение есть тригонометрическая форма числа w. Поэтому $\arg w = \frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}$.

При $\varphi = 0$ число $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, откуда $w = 0$. В этом случае аргумент числа w не определен.

ГЛАВА II

РАВЕНСТВА. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ. НЕРАВЕНСТВА

§ 1. РАВЕНСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Алгебраическим выражением называется выражение, составленное из чисел (обозначенных буквами или цифрами) при помощи алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня)*.

Алгебраическое выражение, содержащее величины x, y, ..., z, сокращенно записывается в виде $A(x, y, \ldots, z)$. Заранее должно быть указано, на каком множестве оно рассматривается, т. е. какие значения могут принимать величины x, y, ..., z — действительные или комплексные, или целые и т. д.

Значения величин, при которых выполнимы все действия, указанные в выражении A, называются *допустимыми* значениями. Они образуют *область определения* или *множество допустимых значений* выражения A. Иногда в связи с конкретным смыслом A на допустимые значения налагаются дополнительные условия.

В дальнейшем алгебраические выражения будем рассматривать на множестве действительных чисел, если не сделано специальных оговорок.

При совместном рассмотрении нескольких алгебраических выражений нужно брать общую часть их областей определения. Например, рассматривая совместно выражения

$$A=\frac{x}{x+1} \quad \text{и} \quad B=\frac{y}{x(y+2)},$$

считают, что $x\neq -1$, $x\neq 0$, $y\neq -2$.

Два алгебраических выражения A и B, соединенные знаком равенства $(=)$, образуют *равенство*:

$$A=B. \tag{1}$$

При любом конкретном выборе значений величин (из общей части областей определения выражений A и B) равенство (1) обращается в числовое равенство. Полученное числовое равенство может быть справедливым (верным) или несправедливым (ложным). Например, очевидно, что равенство $x^2+1=-x^4$ является несправедливым для любого действительного числа x.

Определение 1. Равенство, верное для всех допустимых значений, входящих в него величин, называется *тождеством*. Тождествами называются также и все верные числовые равенства.

---

* Предполагается, что указанные действия применяются конечное число раз.

Для обозначения тождественности двух выражений применяется также символ $\equiv$:

$$A(x, y, \ldots, z) \equiv B(x, y, \ldots, z). \qquad (2)$$

Простейшими тождествами являются равенства, выражающие основные свойства арифметических действий:

$$a+b \equiv b+a,\ (a+b)+c \equiv a+(b+c),\ a \cdot b \equiv b \cdot a,$$
$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c),\ (a+b) \cdot c \equiv a \cdot c + b \cdot c.$$

Определение 2. Равенство, верное не для всех допустимых значений входящих в него величин, называется *уравнением.*

Таким образом, равенства (1) бывают двух видов: тождества и уравнения.

Замечание. Понятия равенства, тождества и уравнения установлены не только для алгебраических, но и для любых математических выражений.

Тождества (2) обладают следующими основными свойствами:

1) если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$;

2) если $A \equiv B$, то $A + C \equiv B + C$;

3) если $A \equiv B$, то $A \cdot C \equiv B \cdot C$,

где выражения A, B и C рассматриваются на одном и том же множестве допустимых значений.

Переход от алгебраического выражения A к тождественному с ним алгебраическому выражению B называется *тождественным преобразованием.*

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Алгебраические выражения подразделяются на рациональные и иррациональные.

Алгебраическое выражение называется *рациональным* относительно какой-нибудь величины, входящей в это выражение, если над этой величиной производятся только действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Алгебраическое выражение называется *иррациональным* относительно какой-нибудь величины, если оно содержит эту величину под знаком корня (радикала).

Если говорят «рациональное алгебраическое выражение», не добавляя относительно каких величин, то предполагается, что оно рационально относительно всех величин, которые входят в это выражение. Например, выражения

$$2+x-x^3,\ \frac{x^4-y}{x^2+y^2+1}$$

— рациональные выражения, а выражения $\sqrt{x^2+1}$, $y^2\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{x^2}$ иррациональны относительно x и последнее из них рационально относительно y.

Рациональные выражения подразделяются на целые и дробные.

Целым рациональным выражением или *многочленом* (*полиномом*) относительно какой-нибудь величины называется выражение, в котором над этой величиной производятся только действия сложения, вычитания и умножения. Например, $y^2\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{x^2}$ — многочлен относительно y.

Многочлен n-й степени относительно x имеет вид

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \tag{3}$$

(где $a_0\neq 0$, $n\geqslant 0$ — целое число), если его расположить по убывающим степеням x. Тот же многочлен $P(x)$ можно расположить и в ином порядке, например, по возрастающим степеням x.

Многочленом нулевой степени является любое не равное нулю число. Число нуль также считается многочленом; это единственный многочлен, степень которого не определена.

Многочлен или целое рациональное выражение $P(x, y, \ldots, z)$ является суммой членов вида

$$ax^ky^l\ldots z^q, \tag{4}$$

где a — числовой коэффициент, $k, l, \ldots, q$ — неотрицательные целые числа.

Выражение (4) называется *одночленом*, а сумма $k+l+\ldots+q$ — *степенью* одночлена. Очевидно, что одночлен — частный случай многочлена.

Многочлен $P(x, y, \ldots, z)$ равен сумме одночленов. Наибольшая из степеней одночленов, составляющих многочлен, называется степенью многочлена (относительно совокупности величин $x, y, \ldots, z$).

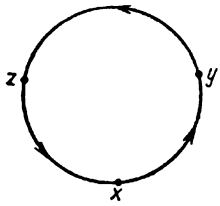


Рис. 8

Дробным рациональным выражением, или *алгебраической дробью* называется отношение двух многочленов

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}. \tag{5}$$

Алгебраическое выражение $A(x, y, \ldots, z)$ называется *однородным* с показателем однородности α, если при любом t и $x, y, \ldots, z$

$$A(tx, ty, \ldots, tz)=t^{\alpha}\cdot A(x, y, \ldots, z) \tag{6}$$

(лишь бы левая и правая части этого соотношения имели смысл).

Например, для $A=\sqrt{2x-y}$ имеем

$$A(tx, ty)=\sqrt{2tx-ty}=\sqrt{t}\cdot\sqrt{2x-y}=t^{\frac{1}{2}}\cdot A(x, y).$$

Следовательно, выражение A однородно с показателем $\alpha=\frac{1}{2}$.

Выражение $B(x, y)=x-y+2$ не является однородным, так как условие (6) здесь не выполняется ни при каком α.

Замена в алгебраическом выражении $A(x, y, \ldots, z)$ первой буквы второй, второй буквы третьей и т. д., наконец, последней буквы

первой называется *круговой перестановкой* величин x, y, ..., z. На рис. 8 изображена круговая перестановка трех величин. Она переводит x в y, y в z, z в x. Повторная круговая перестановка переводит y в z, z в x, x в y.

Алгебраическое выражение $A(x, y, \ldots, z)$ называется *симметрическим*, если оно не изменяется при любой круговой перестановке. Например, выражение

$$\frac{x-y}{(z-x)(z-y)}+\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\frac{z-x}{(y-z)(y-x)}$$

является симметрическим, а выражение $x+y-z$ не является симметрическим.

§ 3. ДЕЙСТВИЯ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ. ТЕОРЕМА БЕЗУ

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$—многочлены относительно x с любыми комплексными коэффициентами.

Определение. Два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ считаются *равными* (или *тождественно равными*):

$$P(x)=Q(x),$$

в том лишь случае, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

Очевидно, что равные многочлены принимают при всех значениях x одинаковые значения. В курсе высшей математики доказывается и обратное: если значения двух многочленов равны при всех значениях x, то многочлены равны, т. е. их коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают.

Многочлены можно складывать, вычитать, умножать друг на друга. *Суммой* (*разностью*) двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ называется многочлен, у которого коэффициент при каждой степени x равен сумме (разности) коэффициентов при той же степени x в многочленах $P(x)$ и $Q(x)$. Чтобы умножить два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$, нужно каждый член многочлена $P(x)$ умножить на каждый член многочлена $Q(x)$ и результаты сложить.

Действия сложения, вычитания и умножения многочленов обладают основными свойствами арифметических действий.

Пусть $P(x)$ и $D(x)$—два многочлена, причем степень многочлена $P(x)$ не меньше степени многочлена $D(x)$.

Если существует многочлен $Q(x)$ такой, что справедливо равенство

$$P(x)=D(x)\cdot Q(x), \tag{7}$$

то говорят, что многочлен $P(x)$ делится (или нацело делится) на многочлен $D(x)$. При этом $P(x)$ называется *делимым*, $D(x)$—*делителем*, а $Q(x)$—*частным*.

Если такой многочлен $Q(x)$ не существует, то говорят, что многочлен $P(x)$ не делится на многочлен $D(x)$, и тогда рассматривают деление с остатком.

Пусть многочлен $D(x)$ — степени не ниже первой.

Определение. *Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $D(x)$ с остатком* означает представить многочлен $P(x)$ в виде

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x), \tag{8}$$

где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены, причем степень $R(x)$ меньше степени $D(x)$.

В равенстве (8) $P(x)$ называется *делимым*, $D(x)$ — *делителем*, $Q(x)$ — *частным* и $R(x)$ — *остатком*. В частности, если $R(x) = 0$, то получим формулу (7), т. е. $P(x)$ делится на $D(x)$.

Справедлива следующая теорема, которая приводится без доказательства.

Теорема. *Для любых двух многочленов $P(x)$ и $D(x)$ всегда можно найти и притом однозначно многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, для которых справедливо равенство* (8).

Для деления многочленов обычно применяется правило «деления углом». С этой целью располагают многочлены по убывающим степеням x и находят старший член частного $Q(x)$ из условия, что при умножении его на старший член делителя $D(x)$ получается старший член делимого $P(x)$. Найденный член частного умножают затем на делитель и вычитают из делимого. Следующий член частного определяют из условия, что он при умножении на старший член делителя дает старший член многочлена-разности, и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока степень новой разности не окажется меньше степени делителя. Эта последняя разность и будет остатком от деления $R(x)$.

Пример 1. Выполнить деление, если

$$P(x) = x^4 + 2x + x^2 + x^3 + 1, \quad D(x) = 1 + x^2.$$

Решение. Для выполнения деления применяем правило «деления углом». Прежде всего располагаем $P(x)$ и $D(x)$ по убывающим степеням x.

Выкладки производятся так:

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 \qquad + x^2} & x^2 + x \\
\quad -\,x^3 + 2x + 1 & \\
\quad \underline{x^3 + x} & \\
\qquad\quad x + 1 & .
\end{array}$$

Отсюда $Q(x) = x^2 + x$, $R(x) = x + 1$. Следовательно,

$$x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x) + x + 1.$$

Пример 2. Выполнить деление, если

$$P(x) = x^3 - 1, \quad D(x) = x^2 + x + 1.$$

Решение. Здесь $Q(x) = x - 1$, $R(x) = 0$, так как $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Деление производится нацело, т. е. без остатка.

Замечание. Не следует смешивать делимость многочленов с делимостью их значений. Например, $P(x)=x^2-1$ делится на $D(x)=x-1$. Однако не имеет смысла говорить о делимости их значений при $x=1$, так как $D(1)=1-1=0$. Многочлен $Q(x)=x^2+2x+2$ не делится на $R(x)=x+3$. Однако $Q(2)$ делится на $R(2)$.

Деление с остатком многочлена

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (a_0\neq 0)$$

на двучлен $x-c$ производится следующим образом (здесь a_0, a_1, $\ldots$, a_n, c — любые комплексные числа). Пусть

$$P(x)=(x-c)\cdot Q(x)+R, \tag{9}$$

где $Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, а R — некоторое число, так как степень R в равенстве (9) должна быть меньше степени двучлена $x-c$, т. е. меньше единицы.

В силу равенства (9) имеем:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(x-c)\cdot(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})+R.$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1-cb_0,\ a_2=b_2-cb_1,\ \ldots,$$
$$a_{n-1}=b_{n-1}-cb_{n-2},\quad a_n=R-cb_{n-1},$$

откуда

$$b_0=a_0,\ b_k=cb_{k-1}+a_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

где

$$b_n=R.$$

Из равенств (10) следует, что коэффициент b_k частного $Q(x)$ получается умножением предыдущего коэффициента b_{k-1} на c и прибавлением соответствующего коэффициента a_k многочлена $P(x)$; так как $R=b_n=cb_{n-1}+a_n$, то и остаток находится по этому же правилу.

Таким образом, формулы (10) позволяют, не производя «деления углом», определять коэффициенты частного $Q(x)$ и остаток R при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x-c$.

Практически вычисления производятся по следующей схеме, называемой *схемой Горнера*:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_n	$\vert c$
$+$		b_0c	b_1c	$\ldots$	$b_{n-1}\cdot c$	
	b_0	b_1	b_2	$\ldots$	$b_n=R$	

Пример 3. Разделить $P(x)=2x^3-x+3$ на $x+1=x-(-1)$.

Решение. Составим схему Горнера:

	2	0	-1	3	$\vert -1$
$+$		-2	2	-1	
	2	-2	1	$2=R$	

Искомое частное $Q(x)=2x^2-2x+1$, остаток $R=2$. Следовательно, $2x^3-x+3=(x+1)\cdot(2x^2-2x+1)+2$.

Следующая важная теорема позволяет найти остаток от деления $P(x)$ на $x-c$, не выполняя самого процесса деления.

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-c$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x=c$.*

Доказательство. Выполнив деление многочлена $P(x)$ на двучлен $x-c$, получаем равенство

$$P(x)=(x-c)\cdot Q(x)+R,$$

где остаток R — некоторое число.

Придавая x в этом равенстве значение c, находим

$$P(c)=(c-c)\cdot Q(c)+R=R,$$

что и требовалось доказать.

Замечания. 1. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $ax+b$ $(a\neq 0)$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x=-\frac{b}{a}$.

В самом деле, согласно формуле (8)

$$P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)+R,$$

где R — снова число.

Подставляя в это равенство $x=-\frac{b}{a}$, видим, что $R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Например, остаток от деления многочлена $P(x)=8x^3+4x^2+1$ на двучлен $2x+i$ согласно замечанию 1 равен числу

$$P\left(-\frac{i}{2}\right)=8\left(-\frac{i}{2}\right)^3+4\left(-\frac{i}{2}\right)^2+1=-i^3+i^2+1=i.$$

2. Теорема верна и в том случае, если $P(x, y, \ldots, z)$ — многочлен относительно $x, y, \ldots, z$, а деление происходит на разность $x-C(y, \ldots, z)$, где $C(y, \ldots, z)$ — многочлен.

В самом деле, роль числа c здесь играет многочлен $C(y, \ldots, z)$, а вместо многочлена $P(x)$ имеем многочлен $P(x, y, \ldots, z)$.

Определение. Число c называется *корнем* многочлена $P(x)$, если при значении $x=c$ многочлен принимает значение, равное нулю, т. е. $P(c)=0$.

Следствие из теоремы Безу. *Для делимости многочлена $P(x)$ на двучлен $x-c$ необходимо и достаточно, чтобы число c было корнем многочлена $P(x)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P(x)$ делится на $x-c$. Это значит, что остаток $R=0$. С другой стороны, по теореме Безу остаток $R=P(c)$. Отсюда следует, что $P(c)=0$, т. е. c — корень многочлена $P(x)$.

Достаточность. Пусть c — корень $P(x)$. Это значит, что $P(c)=0$. С другой стороны, по теореме Безу остаток $R=P(c)$. Отсюда следует, что $R=0$, т. е. $P(x)$ делится нацело на $x-c$.

Из теоремы Безу вытекают и другие следствия, которые используются для разложения многочлена на множители.

Определение. Преобразование многочлена к виду произведения двух или нескольких многочленов ненулевой степени называется *разложением многочлена* на множители. Если многочлен может быть разложен на множители, то он называется *приводимым*, в противном случае — *неприводимым* или неразложимым на множители.

Очевидно, что многочлен $x+3$ неприводим, на каком бы множестве — действительных или комплексных чисел его ни рассматривать. Многочлен x^2+1 неприводим на множестве действительных чисел и приводим на множестве комплексных чисел:

$$x^2+1=(x+i)\cdot(x-i).$$

Задача о разложении многочлена на множители аналогична задаче о разложении целых чисел на множители. Здесь неприводимые многочлены играют роль простых чисел, а приводимые многочлены — составных чисел.

Многочлен $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$ с произвольными комплексными коэффициентами приводим на множестве комплексных чисел (см. гл. III, § 4). При этом

$$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где x_1, x_2 ..., x_n — корни многочлена $P(x)$.

В частности, справедливо разложение на множители квадратного трехчлена (см. гл. III, § 5)

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (a\neq 0)$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c.

Рассмотрим вопрос о разложении на множители многочлена вида

$$P(x)=x^m\mp c^m.$$

Из теоремы Безу вытекает:

1. Многочлен x^m-c^m делится на двучлен $x-c$ при любом натуральном m, т. е. *разность одинаковых степеней делится на разность их оснований.*

2. *Многочлен* x^m-c^m делится на $x+c$ при любом четном m, т. е. *разность одинаковых четных степеней делится на сумму их оснований.*

3. Многочлен x^m+c^m делится на $x+c$ при любом нечетном m, т. е. *сумма одинаковых нечетных степеней делится на сумму их оснований.*

Докажем, например, последнее утверждение. В самом деле, пусть $P(x)=x^m+c^m$. Замечая, что

$$P(-c)=(-c)^m+c^m \quad \text{и} \quad (-c)^m=-c^m$$

при нечетных m, получаем:

$$P(-c)=-c^m+c^m=0.$$

Следовательно, $P(x)$ делится на $x-(-c)=x+c$. Аналогично доказываются первые два утверждения.

Выполняя деление (по правилу «деления углом» или по схеме Горнера), нетрудно получить, что

$$x^m - c^m = (x-c)(x^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + c^{m-2}x + c^{m-1}).$$

Чтобы получить частные от деления $x^m - c^m$ на $x+c$ при m четном и от деления $x^m + c^m$ на $x+c$ при m нечетном, заменим в полученном выше равенстве число c на $(-c)$:

$$x^m - c^m = (x+c)(x^{m-1} - cx^{m-2} + c^2x^{m-3} - \ldots + c^{m-2} \cdot x - c^{m-1})$$

(m — четное число),

$$x^m + c^m = (x+c)(x^{m-1} - cx^{m-2} + c^2x^{m-3} - \ldots - c^{m-2} \cdot x + c^{m-1})$$

(m — нечетное число).

Советуем читателю доказать, что:

1) сумма одинаковых степеней $x^m + c^m$ не делится на разность их оснований $x - c$;

2) разность одинаковых нечетных степеней не делится на сумму их оснований;

3) сумма одинаковых четных степеней не делится на сумму их оснований.

Существуют различные способы разложения многочлена на множители (см. гл. II, § 4). Одним из таких способов является так называемый *метод неопределенных коэффициентов*. Идея его состоит в следующем.

Пусть нам известно, что в результате некоторых преобразований получается выражение определенного вида и неизвестны лишь коэффициенты в этом выражении. Тогда эти коэффициенты обозначают буквами и рассматривают как неизвестные. Затем для определения этих неизвестных составляется система уравнений.

Например, в случае многочленов эти уравнения составляют из условия равенства коэффициентов при одинаковых степенях x у двух равных многочленов.

Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 4. Методом неопределенных коэффициентов показать, что выражение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ есть квадрат трехчлена.

Решение. Если данное выражение есть квадрат трехчлена, то справедливо равенство

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 = (x^2+ax+b)^2,$$

где a и b — искомые коэффициенты.

Раскрывая в этом равенстве скобки и сравнивая коэффициенты при x^3 и x^2 в левой и правой части, получаем систему

$$\begin{cases} 2a = 10, \\ a^2 + 2b = 35, \end{cases}$$

откуда находим $a=5$, $b=5$. Убеждаемся, что при этих значениях a и b также совпадают коэффициенты при x и x^0.

Итак, данное выражение равно $(x^2+5x+5)^2$.

§ 4. МНОГОЧЛЕНЫ (РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ)

I. Делимость многочленов. При решении задач на делимость многочленов нужно отчетливо представлять себе действие деления с остатком и применять теорему Безу и ее следствие о необходимом и достаточном условии делимости многочлена на двучлен.

Пример 1. Не производя деления, найти остатки от деления многочлена $P(x)=2x^4-3x^2+2x+1$ на квадратные трехчлены: а) x^2-x-2, б) x^2+1.

Решение. а) Находим корни трехчлена x^2-x-2: $x_1=2$, $x_2=-1$ и разложим трехчлен на множители:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

Остаток R есть многочлен первой степени $ax+b$. Следовательно, $P(x)=(x-2)(x+1)\cdot Q(x)+ax+b$, где $Q(x)$ — частное.

Придавая x значения, равные корням трехчлена, имеем

$$P(2)=2a+b, \quad P(-1)=-a+b,$$

где

$$P(2)=25, \quad P(-1)=-2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2a+b=25, \\ -a+b=-2, \end{cases}$$

находим $a=9$, $b=7$. Итак, $R=9x+7$.

б) В равенстве $P(x)=(x^2+1)\cdot Q(x)+ax+b$ положим $x=i$ (i — корень многочлена x^2+1).

Тогда $2i^4-3i^2+2i+1=ai+b$ или $6+2i=b+ai$, откуда $b=6$, $a=2$. Итак, $R=2x+6$.

Пример 2. Найти значения a, b и c, при которых многочлен $P(x)=2x^4-ax^2+bx+c$ делится на $x+2$ без остатка, а при делении на x^2-1 дает в остатке x.

Решение. Из первого условия следует, что $P(-2)=0$, т. е. $32-4a-2b+c=0$. Из условия деления на x^2-1 с остатком, равным x, имеем

$$P(x)=(x^2-1)\cdot Q(x)+x.$$

Полагая в этом равенстве $x=1$ и $x=-1$, получаем:

$$2-a+b+c=1,$$
$$2-a-b+c=-1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 4a+2b-c=32, \\ a-b-c=1, \\ a+b-c=3, \end{cases}$$

находим $a=\frac{28}{3}$, $b=1$, $c=\frac{22}{3}$.

Пример 3. При каких значениях a и b многочлен $x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ делится без остатка на трехчлен x^2-3x+4?

Решение. Легко проверить, что корни трехчлена комплексные. Поэтому применять в данном случае метод, основанный на теореме Безу, нецелесообразно.

I способ. Применяем метод неопределенных коэффициентов:

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b=(x^2-3x+4)(x^2+px+q).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x и свободные члены, получаем систему

$$\begin{cases} -3=p-3, \\ 3=q-3p+4, \\ a=-3q+4p, \\ b=4q, \end{cases}$$

откуда находим $p=0$, $q=-1$, $a=3$, $b=-4$.

II способ. Очевидно, что

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b=(x^4-3x^3+4x^2)+(-x^2+ax+b)=$$
$$=x^2(x^2-3x+4)+(-x^2+ax+b).$$

Отсюда следует, что для делимости на x^2-3x+4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $-x^2+ax+b=-(x^2-3x+4)$. Из этого равенства находим: $a=3$, $b=-4$.

Пример 4. При каких a и α многочлен x^3+ax+1 делится на двучлен $x-\alpha$ без остатка и частное от деления больше нуля при всех x?

Решение. Для нахождения частного применяем схему Горнера:

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 0 & a & 1 \\ + & & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3+a\alpha \\ \hline & 1 & \alpha & \alpha^2+a & \underline{\alpha^3+a\alpha+1=R,} \end{array} \quad \underline{|\alpha}$$

откуда частное $Q(x)=x^2+\alpha x+(\alpha^2+a)$ и остаток $R=\alpha^3+a\alpha+1$. По условию $\alpha^3+a\alpha+1=0$, следовательно, $a=-\alpha^2-\frac{1}{\alpha}$ и $Q(x)=$ $=x^2+\alpha x-\frac{1}{\alpha}$ $(\alpha\neq 0)$.

Так как по условию квадратный трехчлен $Q(x)$ принимает только положительные значения при всех x, то его дискриминант должен быть меньше нуля (см. гл. III, § 14):

$$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\alpha}<0,$$

а это возможно только для отрицательных α и таких, что

$$\frac{\alpha^3+4}{4\alpha}<0, \text{ т. е. } \alpha^3+4>0.$$

Итак, $-\sqrt[3]{4}<\alpha<0$, $a=-\alpha^2-\frac{1}{\alpha}$.

II. Разложение на множители. Рассмотрим различные приемы разложения многочленов на множители. В общем случае эти частные приемы не могут установить разложимости или неразложимости данного многочлена.

На практике отдельные приемы используются в различных комбинациях и имеют важное значение.

1. Вынесение общего множителя и способ группировки. При использовании этого способа иногда целесообразно применение «искусственных» преобразований — разбиение отдельных членов на подобные слагаемые или введение взаимно уничтожающихся членов.

Пример 5. Разложить на линейные множители многочлен $P(x)=x^3-3x-2$.

Решение. Имеем

$$P(x)=(x^3-x)-(2x+2)=$$
$$=x(x+1)(x-1)-2(x+1)=(x+1)(x^2-x-2).$$

Так как $x^2-x-2=(x^2-1)-(x+1)=(x+1)(x-2)$, то $P(x)=$ $=(x+1)^2(x-2)$.

Пример 6. Представить в виде произведения двух множителей многочлен $P(x)=x^5+x+1$.

Решение. Замечая, что $P(x)=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)$, получаем

$$x^5+x+1=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)=$$
$$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=$$
$$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

2. Применение формул сокращенного умножения. С помощью формул сокращенного умножения суммы или разности представляются в виде произведения. Иногда полезно выделение квадратов.

Пример 7. Разложить на множители многочлен

$$P(x,\ y,\ z)=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2.$$

Решение. Выделяя полный квадрат, имеем

$$P=(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2=$$
$$=(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)=$$
$$=[x^2-(y+z)^2]\cdot[x^2-(y-z)^2]=$$
$$=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z).$$

Пример 8. Разложить на множители многочлен

$$P(x,\ y,\ z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3.$$

Решение. Представим $z-x$ в виде

$$z-x=(z-y)-(x-y)$$

и применим формулу

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a^3-b^3)-3ab(a-b).$$

Тогда получим

$$P=(x-y)^3+(y-z)^3+[(z-y)^3-(x-y)^3]-$$
$$-3(z-y)(x-y)[(z-y)-(x-y)],$$

откуда $P=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

3. Разложение квадратного трехчлена на множители. При использовании формулы

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\ (a\neq 0),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c, иногда целесообразно введение вспомогательных неизвестных.

Пример 9. Разложить многочлен

$$P(x)=(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$$

на множители с действительными коэффициентами.

Решение. Имеем

$$P(x)=(x^2+x+1)[(x^2+x+1)+1]-12=$$
$$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12.$$

Полагая $x^2+x+1=y$, имеем:

$$y^2+y-12=(y+4)(y-3),$$

так как корни трехчлена y^2+y-12 равны -4 и 3. Переходя от y к x, получаем:

$$P(x)=(x^2+x+5)(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)(x^2+x+5).$$

Пример 10. Разложить на линейные множители многочлен

$$P(x)=2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2.$$

Решение. Полагая $x^2+6x+1=y$, имеем многочлен

$$P(x,\ y)=2y^2+5(x^2+1)\cdot y+2(x^2+1)^2.$$

Рассматривая этот многочлен как квадратный трехчлен относительно y (считаем при этом члены с x коэффициентами), находим его корни:

$$y_{1,2}=\frac{-5(x^2+1)\pm\sqrt{25(x^2+1)^2-16(x^2+1)^2}}{4}=\frac{-5(x^2+1)\pm 3(x^2+1)}{4},$$

откуда $y_1=-2(x^2+1)$ и $y_2=-\frac{x^2+1}{2}$.

Тогда

$$P(x,\ y)=2(y-y_1)(y-y_2)$$

и после перехода к x имеем

$$P(x)=(3x^2+6x+3)(3x^2+12x+3)=9(x+1)^2(x^2+4x+1).$$

Найдем корни трехчлена x^2+4x+1 (они равны $-2\pm\sqrt{3}$) и окончательно получим:

$$P(x)=9(x+1)^2(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3}).$$

4. Применение теоремы Безу и метода неопределенных коэффициентов.

Пример 11. Разложить на множители многочлен

$$P(x, y, z) = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2).$$

Решение. Заметим, что при $x = y$ многочлен равен нулю. Тогда по теореме Безу многочлен $P(x, y, z)$ делится на $x - y$.

Так как многочлен $P(x, y, z)$ не меняется при любой круговой перестановке x, y и z, то он равен нулю и при $y = z$, и при $z = x$ и, следовательно, делится на $y - z$ и $z - x$. Поэтому

$$P(x, y, z) = k(x - y)(y - z)(z - x),$$

где k — некоторое число. Для нахождения k придадим x, y и z некоторые значения, например, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Тогда $2 = 2k$, откуда $k = 1$ и

$$P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x).$$

§ 5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ. ПРОПОРЦИИ. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

I. Выражение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{11}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, называется *алгебраической* (или *рациональной*) *дробью*. Дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, и *неправильной* — в противном случае.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Чтобы получить такое представление дроби (11), нужно разделить с остатком многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{12}$$

где частное $K(x)$ — целая часть дроби (11), а

$$\frac{R(x)}{Q(x)}$$

правильная рациональная дробь, так как степень остатка $R(x)$ меньше степени делителя $Q(x)$.

Представление неправильной дроби в виде (12) называется *выделением целой части* дроби. Например,

$$\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Определение. Алгебраические дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ и } \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

считаются *равными* (или тождественно равными) лишь в том случае, если выполняется равенство

$$P(x)\cdot Q_1(x)=P_1(x)\cdot Q(x)$$

для всех значений x, удовлетворяющих условию: $Q(x)\neq 0$, $Q_1(x)\neq 0$. Например,

$$\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}\quad (x\neq 1,\ x\neq -1),$$

так как $(x+1)\cdot(x-1)=1\cdot(x^2-1)$.

Из определения равенства дробей вытекает, что дробь не изменится, если числитель и знаменатель умножить на один и тот же многочлен $K(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)\cdot K(x)}{Q(x)\cdot K(x)}\quad (Q(x)\neq 0,\ K(x)\neq 0).$$

На этом свойстве основано сокращение дробей, т. е. деление числителя и знаменателя на их общий делитель (многочлен, входящий в разложение числителя и знаменателя одновременно), и приведение дробей к общему знаменателю.

Сложение и умножение дробей определяются по следующим правилам:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P(x)\cdot Q_1(x)+P_1(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot Q_1(x)},$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P(x)\cdot P_1(x)}{Q(x)\cdot Q_1(x)},$$

где $Q(x)\neq 0$, $Q_1(x)\neq 0$.

Вычитание и деление дробей определяются как действия, обратные сложению и умножению. Из этого определения выводятся правила вычитания и деления:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P(x)\cdot Q_1(x)-P_1(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot Q_1(x)},$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P(x)\cdot Q_1(x)}{P_1(x)\cdot Q(x)},$$

где $Q(x)\neq 0$, $Q_1(x)\neq 0$ и, кроме того, в случае деления, $P_1(x)\neq 0$.

Для алгебраических дробей сохраняются основные свойства арифметических действий. Практически для выполнения сложения или вычитания приводят к общему знаменателю: разлагая знаменатели дробей на множители, принимают за общий знаменатель многочлен наименьшей степени, делящийся нацело на все данные знаменатели. Очевидна аналогия с арифметическими дробями.

Точно так же определяются равенство и действия для алгебраических дробей вида

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}.$$

II. **Определение.** Две равные алгебраические дроби образуют *пропорцию*

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1}, \tag{13}$$

где P, Q, P_1, Q_1—многочлены относительно x или относительно x, y, ..., z, причем $Q\neq 0$, $Q_1\neq 0$ *.

Очевидно, что во всякой пропорции произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов, т. е.

$$P\cdot Q_1=P_1\cdot Q \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0). \tag{14}$$

Верно и обратное: при выполнении условия (14) дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$ образуют пропорцию (13).

Если задана пропорция

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1} \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0),$$

то справедливо равенство

$$\frac{KP+LQ}{MP+NQ}=\frac{KP_1+LQ_1}{MP_1+NQ_1}, \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0,\ MP+NQ\neq 0,\ MP_1+NQ_1\neq 0), \tag{15}$$

называемое *производной пропорцией*. В самом деле, нетрудно проверить, что

$$(KP+LQ)\cdot(MP_1+NQ_1)=(KP_1+LQ_1)\cdot(MP+NQ),$$

если учесть равенство $PQ_1=P_1Q$.

Давая K, L, M и N различные значения, получаем частные случаи производной пропорции. Например:

$$\frac{P+Q}{Q}=\frac{P_1+Q_1}{Q_1} \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0),$$

$$\frac{P-Q}{Q}=\frac{P_1-Q_1}{Q_1} \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0),$$

$$\frac{P+Q}{P-Q}=\frac{P_1+Q_1}{P_1-Q_1} \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0,\ P-Q\neq 0,\ P_1-Q_1\neq 0).$$

Справедливо также свойство равных отношений (равных дробей): если даны несколько равных отношений, то сумма всех предыдущих членов отношений относится к сумме всех последующих как любой из предыдущих к своему последующему, т. е. из равенств

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P_2}{Q_2}=\ldots=\frac{P_n}{Q_n} \tag{16}$$

следуют равенства

$$\frac{P_1+P_2+\ldots+P_n}{Q_1+Q_2+\ldots+Q_n}=\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P_2}{Q_2}=\ldots=\frac{P_n}{Q_n}, \tag{17}$$

---

* Все относящееся к разделу II остается справедливым и в том случае, когда P и Q—любые выражения (в частности, числа).

где

$$Q_1 \neq 0,\ Q_2 \neq 0,\ \ldots,\ Q_n \neq 0,\ Q_1+Q_2+\ldots+Q_n \neq 0.$$

Действительно,

$$\frac{P_1+P_2+\ldots+P_n}{Q_1+Q_2+\ldots+Q_n}=\frac{P_1}{Q_1},$$

так как из условия (16) нетрудно получить равенство

$$(P_1+P_2+\ldots+P_n)\cdot Q_1=(Q_1+Q_2+\ldots+Q_n)\cdot P_1,$$

что и доказывает справедливость соотношений (17).

Кроме того, из равенств (16) следуют равенства

$$\frac{P_1K_1+P_2K_2+\ldots+P_nK_n}{Q_1K_1+Q_2K_2+\ldots+Q_nK_n}=\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P_2}{Q_2}=\ldots=\frac{P_n}{Q_n}, \qquad (18$$

где $K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n$ не все равны нулю, причем

$$Q_1 \neq 0,\ Q_2 \neq 0,\ \ldots,\ Q_n \neq 0,\ Q_1K_1+Q_2K_2+\ldots+Q_nK_n \neq 0.$$

Действительно,

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P_1\cdot K_1}{Q_1\cdot K_1},\quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_2\cdot K_2}{Q_2\cdot K_2},\quad \ldots,\quad \frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_n\cdot K_n}{Q_n\cdot K_n}.$$

Тогда по свойству равных отношений получаем

$$\frac{P_1K_1+P_2K_2+\ldots+P_nK_n}{Q_1K_1+Q_2K_2+\ldots+Q_nK_n}=\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P_2}{Q_2}=\ldots=\frac{P_n}{Q_n},$$

что и утверждалось.

III. **Преобразования иррациональных алгебраических выражений** производятся на основании общих законов арифметических действий (таких же, как в случае алгебраических дробей) и правил действий над радикалами (см. гл. I, § 4). Специфическим является только уничтожение иррациональности в числителе или знаменателе дробного иррационального выражения вида

$$A=\frac{P}{Q}, \qquad (19)$$

где хотя бы одно из выражений P или Q содержит радикалы.

Пусть S—данное выражение, содержащее радикалы.

Определение. *Сопряженным множителем* относительно S называется всякое выражение K, не равное тождественно нулю, такое, что выражение $S\cdot K$ не содержит радикалов.

Знание сопряженного множителя позволяет представить выражение (19) в виде выражения, не содержащего радикалов либо в числителе, либо в знаменателе:

$$A=\frac{P\cdot K_1}{Q\cdot K_1}=\frac{P\cdot K_2}{Q\cdot K_2},$$

где K_1—сопряженный множитель числителя, K_2—сопряженный мно-

житель знаменателя. Это преобразование и называется уничтожением иррациональности (соответственно в числителе или в знаменателе).

Рассмотрим важные частные случаи отыскания сопряженного множителя.

1. Для выражения вида

$$S=\sqrt[n]{X^pY^q\ \dots\ Z^l},$$

где $p, q, \dots, l$ — натуральные числа, меньшие n, сопряженный множитель K есть

$$K=\sqrt[n]{X^{n-p}Y^{n-q}\ \dots\ Z^{n-l}},$$

так как $S\cdot K=X\cdot Y\ \dots\ Z$.

2. Для выражения вида

$$S=\sqrt{X}\pm\sqrt{Y}\quad (X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0)$$

сопряженный множитель есть

$$K=\sqrt{X}\mp\sqrt{Y},$$

так как

$$S\cdot K=(\sqrt{X})^2-(\sqrt{Y})^2=X-Y.$$

Пример 1. Уничтожить иррациональность в знаменателе выражения

$$A=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}\ (x>0,\ y>0,\ z>0).$$

Решение. Имеем

$$A=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{z}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{[(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{z}]\cdot[(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{z}]}=$$
$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{z})^2}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{x+y-z+2\sqrt{xy}}.$$

Тогда

$$A=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})\cdot(x+y-z-2\sqrt{xy})}{(x+y-z+2\sqrt{xy})\cdot(x+y-z-2\sqrt{xy})}=$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})\cdot(x+y-z-2\sqrt{xy})}{(x+y-z)^2-4xy},$$

где

$$x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y-z-2\sqrt{xy}\neq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\neq 0.$$

3. Для выражения вида

$$S=\sqrt[3]{X}\pm\sqrt[3]{Y}$$

сопряженный множитель есть

$$K=\sqrt[3]{X^2}\mp\sqrt[3]{X\cdot Y}+\sqrt[3]{Y^2},$$

так как

$$S\cdot K=(\sqrt[3]{X})^3\pm(\sqrt[3]{Y})^3=X\pm Y.$$

4. Вообще для выражения вида

$$S=\sqrt[n]{X}-\sqrt[n]{Y}\quad (X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0)$$

сопряженный множитель есть

$$K=\sqrt[n]{X^{n-1}}+\sqrt[n]{X^{n-2}\cdot Y}+\ldots+\sqrt[n]{X\cdot Y^{n-2}}+\sqrt[n]{Y^{n-1}}.$$

В самом деле, на основании тождества (см. гл. II, § 3)

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

имеем

$$S\cdot K=(\sqrt[n]{X})^n-(\sqrt[n]{Y})^n=X-Y.$$

5. Аналогично для выражения вида

$$S=\sqrt[m]{X}+\sqrt[m]{Y}$$

сопряженный множитель находится на основании тождеств (см. гл. II, § 3):

$$a^{2n}-b^{2n}=(a+b)(a^{2n-1}-a^{2n-2}\cdot b+\ldots+a\cdot b^{2n-2}-b^{2n-1}),$$
$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}\cdot b+\ldots-a\cdot b^{2n-1}+b^{2n}).$$

Пример 2. Уничтожить иррациональность в числителе выражения

$$A=\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}}{2}\quad (x>0,\ y>0).$$

Решение. Имеем

$$A=\frac{\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{y^2}}{2}=$$
$$=\frac{(\sqrt[6]{x^3})^6-(\sqrt[6]{y^2})^6}{2\left[(\sqrt[6]{x^3})^5-(\sqrt[6]{x^3})^4\cdot\sqrt[6]{y^2}+(\sqrt[6]{x^3})^3\cdot(\sqrt[6]{y^2})^2-(\sqrt[6]{x^3})^2(\sqrt[6]{y^2})^3+\right.}$$
$$\left.+\sqrt[6]{x^3}\cdot(\sqrt[6]{y^2})^4-(\sqrt[6]{y^2})^5\right],$$

или после упрощений

$$A=\frac{x^3-y^2}{2\left[x^2\sqrt{x}-x^2\sqrt[3]{y}+x\sqrt[3]{xy^2}-xy+y\sqrt[6]{x^3y^2}-y\sqrt[3]{y^2}\right]},$$

где $x>0$, $y>0$, $x^3-y^2\neq 0$.

При преобразовании выражений, содержащих радикалы, часто допускают ошибки вследствие неправильного применения правил действий над радикалами (см. гл. I, § 4). Эти ошибки вызваны неумением конкретно применить понятие арифметического корня и абсолютной величины. Поясним на примерах.

Пример 3. Упростить выражение $\sqrt{(a-b)^2}$.

Решение. Имеем $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$, так как корень $\sqrt{(a-b)^2}$ — арифметический, а $|a-b|^2=(a-b)^2$, причем $|a-b|\geqslant 0$.

В данном случае следует писать:

$$\sqrt{(a-b^2)}=|a-b|=\begin{cases} a-b, & \text{если } a\geqslant b;\\ b-a, & \text{если } a<b.\end{cases}$$

Пример 4. Вынести x из-под знака радикала в выражении $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, если $x<0$.

Решение. Имеем

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

так как для $x<0$

$$\sqrt{x^2}=|x|=-x.$$

Пример 5. Ввести знаменатель под знак радикала в выражении $\frac{\sqrt{x}}{y}$, если $x\geqslant 0$, $y<0$.

Решение. Так как $y<0$, то

$$y=-\sqrt{y^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\sqrt{x}}{y}=\frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{y^2}}=-\sqrt{\frac{x}{y^2}}.$$

§ 6. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ (РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ)

Прежде всего надо найти область определения заданного выражения A, которое требуется преобразовать. Выполняя затем тождественное преобразование, следует учитывать, что области определения заданного выражения A и полученного из него выражения B могут оказаться различными.

I. **Упрощение выражений.** В некоторых случаях при упрощении выражений целесообразно не приводить сразу к общему знаменателю, а, наоборот, сложную дробь разбивать на более простые.

Пример 1. Упростить выражение

$$A=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение. Допустимыми являются те значения a, b и c, для которых $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$. Заметим, что выражение A является симметрическим. Преобразуем сначала первое слагаемое, разбивая его на две дроби:

$$B_1=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)+(b-a)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}.$$

Аналогично

$$B_2=\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a},$$

$$B_3=\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}.$$

Тогда

$$A = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

При выполнении действий над радикалами надо обращать внимание на знак подкоренного выражения.

Пример 2. Упростить выражение

$$A = (\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}) \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Решение. Имеем $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = -\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Тогда

$$A = -\sqrt[6]{(9+4\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} =$$
$$= -\sqrt[6]{(9+4\sqrt{5}) \cdot (9-4\sqrt{5})} + \sqrt[3]{-1} = -1-1 = -2.$$

Заметим, что сразу в выражении A выполнять умножение корней $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$ и $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ без преобразования последнего нельзя, так как число $2-\sqrt{5} < 0$ и корень $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ не является арифметическим.

Пример 3. Упростить выражение

$$A = \frac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}.$$

Решение. Выражение A имеет смысл при $a \neq 0$, так как $\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 + 1 = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2$. Поэтому

$$A = \frac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2}} = \frac{a^2+1}{a \cdot \left|\frac{a^2+1}{2a}\right|} = \frac{a^2+1}{a \cdot \frac{a^2+1}{2|a|}} = \frac{2|a|}{a},$$

или в развернутой форме

$$A = \begin{cases} 2, & \text{если } a > 0; \\ -2, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Если заданное выражение громоздко, то следует разбить его на более простые части, каждую из которых упрощать затем в отдельности.

Пример 4. Упростить выражение

$$A = \frac{\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt[3]{a^4} + \sqrt{a^4b^3} : \sqrt[6]{a}}{(b^2-ab-2a^2) \cdot \sqrt{ab}} -$$

$$-a^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3a^2}{3b-6a+2ab-b^2} : \frac{a+b}{3a-ab} - \frac{ab}{a+b}\right).$$

Р е ш е н и е. Множество допустимых значений A состоит из всех значений a и b, удовлетворяющих условиям:

$$ab > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ b^2 - ab - 2a^2 \neq 0,$$
$$3b - 6a + 2ab - b^2 \neq 0,\ 3a - ab \neq 0,\ a + b \neq 0.$$

Так как

$$b^2 - ab - 2a^2 = (b^2 - a^2) - a(b+a) = (b+a)(b-2a),$$
$$3b - 6a + 2ab - b^2 = 3(b-2a) + b(2a-b) =$$
$$= (b-2a)(3-b),\ 3a - ab = a(3-b),$$

то, следовательно, значения a и b удовлетворяют условиям:

$$a > 0,\ b > 0,\ b \neq 2a,\ b \neq 3.$$

Преобразуя выражение A по частям, получаем:

$$1)\ B_1 = \frac{\sqrt{a^3 b} \cdot \sqrt[3]{a^4} + \sqrt{a^4 b^3} : \sqrt[6]{a}}{(b^2 - ab - 2a^2) \cdot \sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{a^{17} b^3} + \sqrt[6]{a^{11} b^9}}{(b+a)(b-2a) \cdot \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt[6]{a^{11} b^3}\left(\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[6]{b^6}\right)}{(b+a)(b-2a) \cdot \sqrt[6]{a^3 b^3}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{a^8}}{b-2a} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{b-2a};$$

$$2)\ B_2 = a^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3a^2}{3b - 6a + 2ab - b^2} : \frac{a+b}{3a - ab} - \frac{ab}{a+b}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \left[\frac{3a^2 \cdot a(3-b)}{(b-2a)(3-b)(a+b)} - \frac{ab}{a+b}\right] =$$

$$= \sqrt[3]{a} \cdot \frac{3a^2 - b(b-2a)}{(b-2a)(a+b)} = \frac{\sqrt[3]{a} \cdot (3a^2 + 2ab - b^2)}{(b-2a)(a+b)};$$

$$3)\ A = B_1 - B_2 = \frac{a\sqrt[3]{a}}{b-2a} - \frac{\sqrt[3]{a}(3a^2 + 2ab - b^2)}{(b-2a)(a+b)} =$$

$$= \sqrt[3]{a} \cdot \frac{a(a+b) - 3a^2 - 2ab + b^2}{(b-2a)(a+b)} = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{b^2 - ab - 2a^2}{(b-2a)(a+b)} = \sqrt[3]{a}.$$

Итак, $A = \sqrt[3]{a}$ при $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 2a$, $b \neq 3$.

II. **Доказательство тождеств.** Различают тождества безусловные и условные. *Условным* тождеством называется равенство $A = B$, справедливое при всех допустимых значениях величин из общей части областей определения выражений A и B, причем допустимые значения должны удовлетворять одному или нескольким заранее данным дополнительным условиям.

Например, равенство $(a + b + c)^3 = 27abc$ при условии, что $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$, есть условное тождество. Докажем это тождество.

По условию имеем $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}$. Возведем обе части этого равенства в куб:

$$a+b+3\sqrt[3]{ab}\cdot(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=-c,$$

откуда

$$a+b+c=-3\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}),$$

или

$$a+b+c=3\sqrt[3]{abc},\ \text{т. е.}\ (a+b+c)^3=27abc.$$

При доказательстве тождеств последние путем равносильных преобразований сводят к таким, справедливость которых уже известна, или преобразуют одну часть тождества так, чтобы получить другую.

Пример 5. Доказать, что

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

Решение. Обозначая левую часть через A и используя формулу

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab\,(a+b),$$

где

$$a=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}},\quad b=\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}},$$

имеем

$$20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}=A^3-3\sqrt[3]{400-392}\cdot A,$$

или

$$40=A^3-6A.$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$A^3-16A+10A-40=0,$$

или

$$A\,(A-4)\,(A+4)+10\,(A-4)=0,$$

или

$$(A-4)\,(A^2+4A+10)=0.$$

Так как A, очевидно, действительное число, а $A^2+4A+10=(A+2)^2+6>0$, при любом действительном A, то из последнего равенства следует, что $A=4$.

Итак,

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

Пример 6. Доказать, что

$$\frac{1}{x\,(x-y)\,(x-z)}+\frac{1}{y\,(y-z)\,(y-x)}+\frac{1}{z\,(z-x)\,(z-y)}=\frac{1}{xyz}.$$

Решение. Данные дроби имеют смысл при всех значениях x, y и z, удовлетворяющих условию

$$xyz(x-y)(x-z)(y-z) \neq 0.$$

Приведя дроби в левой части доказываемого тождества к общему знаменателю, получим дробь, числитель которой есть многочлен

$$yz(y-z)-xz(x-z)+xy(x-y).$$

Разложим его на множители:

$$yz\cdot[(x-z)-(x-y)]-xz\cdot(x-z)+xy\cdot(x-y)=$$
$$=(x-z)(yz-xz)+(x-y)(xy-yz)=(x-y)(x-z)(y-z).$$

Следовательно, левая часть есть

$$\frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{xyz\cdot(x-y)(x-z)(y-z)}=\frac{1}{xyz},$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве условных тождеств можно, преобразуя дополнительные условия, получить требуемое тождество.

Пример 7. Дано $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$, где $x\neq 0$, $y\neq 0$, $1-yz\neq 0$, $1-xz\neq 0$, $x\neq y$. Доказать, что

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Решение. Преобразуя дополнительное условие, т. е. равенство $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$, используем свойство равных отношений.

Имеем

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}=\frac{(x^2-yz)-(y^2-xz)}{x(1-yz)-y(1-xz)},$$
$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}=\frac{y(x^2-yz)-x(y^2-xz)}{yx(1-yz)-xy(1-xz)}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{(x^2-yz)-(y^2-xz)}{x(1-yz)-y(1-xz)}=\frac{y(x^2-yz)-x(y^2-xz)}{yx(1-yz)-xy(1-xz)},$$

или

$$\frac{(x^2-y^2)+(x-y)z}{x-y}=\frac{xy(x-y)+z(x^2-y^2)}{xyz(x-y)},$$

или

$$x+y+z=\frac{xy+z(x+y)}{xyz},$$

т. е.

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

В других случаях целесообразно преобразовать доказываемое тождество, используя при этом заданные условия.

Пример 8. Пусть $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, $z=\frac{c-a}{c+a}$, где $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$; $abc\neq 0$. Показать, что

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Решение. Нужно доказать, что

$$\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\cdot\frac{1+z}{1-z}=1.$$

Подставляя вместо x его выражение, найдем

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}.$$

Круговой перестановкой букв получаем

$$\frac{1+y}{1-y}=\frac{b}{c},\quad \frac{1+z}{1-z}=\frac{c}{a}.$$

Следовательно,

$$\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\cdot\frac{1+z}{1-z}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1,$$

что и требовалось доказать.

III. **Вычисление выражений.**

Пример 9. Вычислить

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2.$$

Решение. Применим формулу сложного квадратного радикала:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Тогда $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ и

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2\cdot\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}.$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2\cdot\sqrt{2}}{2(3-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2=2.$$

Пример 10. Дано $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$.
Вычислить $A=a^4+b^4+c^4$.

Решение. Выделяя полный квадрат в выражении A, имеем

$$A=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)^2-2[(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)].$$

Согласно данным условиям

$$A=1-2(ab+ac+bc)^2$$

и остается найти значение выражения $ab+ac+bc$. Так как

$$2(ab+ac+bc)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=-1,$$

то

$$A=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

§ 7. НЕРАВЕНСТВА И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Определение. Два действительных числа или два алгебраических выражения, соединенные знаком $>$ (больше) или $<$ (меньше) (а также знаком $\geqslant$ или $\leqslant$), образуют *неравенство*

$$A>B,\ A<B,\ A\geqslant B,\ A\leqslant B. \tag{20}$$

Неравенство состоит из двух частей: левой части A и правой части B.

Если в неравенстве фигурирует знак $>$ или $<$, то говорят, что неравенство является строгим. Неравенство, содержащее знак $\geqslant$ или $\leqslant$, называется нестрогим.

В неравенствах вида (20) выражения A и B рассматриваются на том множестве, где A и B одновременно имеют смысл. Это множество называется множеством допустимых значений неравенства. При совместном рассмотрении двух или нескольких неравенств допустимыми считаются значения величин из общей части множества допустимых значений рассматриваемых неравенств.

При конкретных (частных) значениях величин из множества допустимых значений неравенства (20) обращаются в числовые неравенства, которые могут быть справедливыми (верными) или несправедливыми (противоречивыми).

Справедливость или несправедливость числового неравенства устанавливается на основе понятий равенства и сравнения для любых двух действительных чисел a и b (см. гл. I).

Неравенство, справедливое для всех допустимых значений входящих в него величин, а также справедливое числовое неравенство называется тождественным неравенством. Например, неравенство $x^2+1>x^2$ является тождественным.

Неравенства (20) подразделяются на рациональные и иррациональные и т. д.—точно так же, как и равенства.

Замечание. Понятие неравенства установлено не только для алгебраических, но и для любых математических выражений.

Два или несколько неравенств называются неравенствами одинакового смысла, если они содержат один и тот же знак $>$ или $<$. Два неравенства называются неравенствами противоположного смысла, если в одном из них стоит знак $>$, а в другом знак $<$. Например, неравенства $A>B$ и $C>D$ имеют одинаковый смысл, а неравенства $A<B$ и $C>D$—противоположный смысл.

Пусть a и b—действительные числа. Между ними имеет место одно и только одно из следующих соотношений: $a=b$, $a>b$, $a<b$. Число a больше числа b $(a>b)$ в том и только в том случае, если разность $a-b$ есть число положительное: $a-b>0$. Число a меньше числа b $(a<b)$ в том и только в том случае, если разность $a-b$ есть число отрицательное: $a-b<0$.

Отсюда вытекают следующие свойства неравенств.

Свойство 1. Если $a>b$, то $b<a$, и наоборот, если $b<a$, то $a>b$.

В самом деле, если $a>b$, то разность $a-b>0$. А тогда разность $b-a<0$, т. е. $b<a$. Наоборот, если $b<a$, то $b-a<0$, и значит, $a-b>0$, т. е. $a>b$.

Свойство 2. Если $a>b$, $b>c$, то $a>c$.

В самом деле, рассмотрим разность $a-c=(a-b)+(b-c)$. По условию $a-b>0$ и $b-c>0$. Следовательно, $a-c>0$, т. е. $a>c$.

Свойство 3. Если $a>b$, то при любом c

$$a+c>b+c,$$

т. е. неравенство остается справедливым, если к каждой его части прибавить одно и то же число.

Действительно, разность

$$(a+c)-(b+c)=(a-b)+(c-c)=a-b>0,$$

т. е. $a+c>b+c$.

Следствие. Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом знак его на противоположный.

В самом деле, пусть $a+b>c$. Прибавив к каждой части неравенства число $(-b)$, получим

$$a>c-b,$$

т. е. слагаемое b перенесено из левой части в правую с противоположным знаком.

Свойство 4. Если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$;

если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$,

т. е. неравенство не нарушается, если обе части его умножить на одно и то же положительное число; неравенство превращается в неравенство противоположного смысла, если обе части его умножить на одно и то же отрицательное число.

В самом деле, если $a > b$ и $c > 0$, то разность

$$ac - bc = (a - b)c$$

есть положительное число, равное произведению двух сомножителей одинакового знака, и тогда $ac > bc$.

Если же $a > b$ и $c < 0$, то разность

$$ac - bc = (a - b)c$$

есть отрицательное число, равное произведению двух сомножителей противоположного знака, и тогда $ac < bc$.

Свойство 5. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;

если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$,

т. е. два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать; два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое неравенство.

В самом деле, разность $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) > 0$, если $a - b > 0$ и $c - d > 0$, и тогда $a + c > b + d$. Если же $c < d$, то $d > c$ и $d - c > 0$. Тогда разность $(a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c) > 0$, т. е. $a - c > b - d$. Свойство доказано.

Свойство 6. Если a, b, c, d положительны и $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$, т. е. при почленном умножении двух неравенств, имеющих положительные члены и одинаковый смысл, получается неравенство того же смысла.

Имеем

$$ac - bd = (ac - bc) + (bc - bd) = (a - b)c + (c - d)b,$$

где $a - b > 0$, $c > 0$, $c - d > 0$, $b > 0$. Отсюда $ac - bd > 0$ или $ac > bd$, что и утверждалось.

Свойство 7. Если $a > b > 0$, то при любом натуральном n

$$a^n > b^n.$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение справедливо по условию. Допустим, что утверждение справедливо при $n = k$, где k—какое-нибудь натуральное число: $a^k > b^k$.

Умножим неравенство $a^k > b^k$ почленно на неравенство $a > b$ и получим $a^{k+1} > b^{k+1}$, т. е. утверждение справедливо и при $n = k + 1$.

Тогда согласно методу математической индукции утверждение справедливо и для любого натурального n. Свойство доказано.

Замечание. Можно доказать свойство 7, не применяя метод математической индукции. Используем тождество (см. гл. II, § 3):

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}).$$

Так как $a > b > 0$, то оба сомножителя справа положительны. Поэтому $a^n - b^n > 0$, т. е. $a^n > b^n$.

Свойство 8. Если $a > b > 0$, то при любом натуральном $n \geqslant 2$

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Доказательство. Предположим от противного, что $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. Тогда в силу свойства 7 имеем

$$(\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n, \quad \text{т. е. } a < b,$$

что противоречит условию. Очевидно, что нельзя предполагать и то, что $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$. Следовательно, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Свойства 1—8 справедливы и для нестрогих неравенств. Это следует из справедливости свойств 1—8 для строгих неравенств и известных свойств равенств.

Например, если $a \geqslant b$, то $b \leqslant a$, и наоборот, если $b \leqslant a$, то $a \geqslant b$. В самом деле, утверждение справедливо для строгих неравенств. Кроме того, известно, что аналогичное утверждение справедливо и для равенств, т. е. если $a = b$, то $b = a$, и наоборот, если $b = a$, то $a = b$.

Свойства 1—8, установленные для числовых неравенств, сохраняются и для любых неравенств вида (20).

Определение. Два неравенства называются *равносильными*, если из справедливости первого вытекает справедливость второго и обратно.

Свойства 3 и 4 выражают равносильность неравенств

$$A > B \text{ и } A + C > B + C,$$
$$A > B \text{ и } A \cdot C > B \cdot C \ (C > 0),$$

где выражения A, B и C рассматриваются в общей части множеств их допустимых значений.

§ 8. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

При решении задач на доказательство неравенств полезно знать некоторые «очевидные» неравенства.

Основные простейшие неравенства. I. Для любых действительных чисел:

1) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ или $\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant ab$, (21)

причем равенство достигается лишь при $a = b$.

Действительно, доказываемое неравенство равносильно очевидному $(a - b)^2 \geqslant 0$.

2) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, (22)

причем равенство достигается лишь в случае, когда a и b имеют одинаковые знаки. Это неравенство обобщается на любое конечное число слагаемых, т. е.

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|. \quad (22')$$

3) $|a - b| \geqslant |a| - |b|$, (23)

причем равенство достигается лишь в случае, когда $a-b$ и b имеют одинаковые знаки (доказательство п. 2 и 3 см. в гл. I, § 4).

4) $ax^2+bx+c\geqslant 0,$ (24)

если $a>0$ и $D=b^2-4ac\leqslant 0$.

Равенство достигается лишь в случае, когда $D=0$ и $x=-\frac{b}{2a}$

(доказательство см. в гл. III, § 14).

II. Для любых положительных чисел:

1) $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$ (25)

причем равенство достигается лишь при $a=b$.

Число $\frac{a+b}{2}$ называется *средним арифметическим* двух положительных чисел a и b, а число $\sqrt{ab}$ — их *средним геометрическим*.

Для доказательства неравенства (25) запишем очевидное неравенство

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

Возведя в квадрат, получим

$$a-2\sqrt{ab}+b\geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

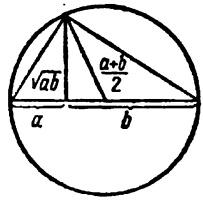


Рис. 9

что и требовалось доказать. При этом равенство достигается лишь тогда, когда оно достигается в исходном неравенстве, т. е. при $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0$, что возможно лишь при $a=b$.

Таким образом, *среднее геометрическое двух чисел не превосходит их среднего арифметического.*

Геометрическое доказательство этого неравенства очевидно (рис. 9).

Понятия среднего арифметического и среднего геометрического вводятся и для n положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n: это числа $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ и $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$; в этом общем случае справедливо неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$ (25′)

причем равенство достигается лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$;

2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2,$ (26)

причем равенство достигается лишь при $a=b$.

Неравенство (26) равносильно неравенству (21) при условии, что a и b положительны;

3) $a^3+b^3 \geqslant ab(a+b)$, (27)

причем равенство достигается лишь при $a=b$.

Неравенство (27) равносильно очевидному неравенству $a^2-ab+b^2 \geqslant ab$;

4) если $c>0$ и $0<a<b$, то

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}. \quad (28)$$

В самом деле, неравенство (28) равносильно неравенству $ab+ac<ab+bc$, а последнее равносильно данному $a<b$.

Перейдем к доказательству более сложных неравенств. Основные приемы их доказательств состоят в следующем.

1. Доказываемое неравенство путем преобразований, сохраняющих равносильность, сводят к неравенству, справедливость которого известна.

2. Путем равносильных преобразований очевидное или известное неравенство сводят к неравенству доказываемому.

3. Комбинируют первый и второй методы, т. е. преобразуют как известное, так и доказываемое неравенства.

Применение этих методов покажем на следующих примерах.

Пример 1. Доказать, что для любых действительных a, b и c

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Решение. I способ. Доказываемое неравенство равносильно неравенству $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \geqslant 0$ или $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$. Последнее очевидно. Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

II способ. Складывая три известные неравенства (см. формулу (21))

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab, \quad \frac{b^2+c^2}{2} \geqslant bc \text{ и } \frac{a^2+c^2}{2} \geqslant ac,$$

получаем требуемое.

Пример 2. Доказать, что для любого действительного x

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \leqslant 3.$$

Решение. Доказываемое неравенство равносильно системе двух неравенств:

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \geqslant \frac{1}{3} \quad (*) \text{ и } \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \leqslant 3. \quad (**)$$

Так как $x^2+x+1>0$ для всех x ($D=-3$, $a=1$; см. формулу (24)), то неравенства (*) и (**) равносильны системе

$$3(x^2-x+1) \geqslant x^2+x+1 \text{ и } x^2-x+1 \leqslant 3(x^2+x+1).$$

Последняя, в свою очередь, равносильна системе очевидных неравенств

$$2(x-1)^2 \geqslant 0 \text{ и } 2(x+1)^2 \geqslant 0.$$

Пример 3. Доказать, что для любых действительных x и y

$$x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0.$$

Решение. Рассматривая левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно x, имеем

$$x^2+2x(1-2y)+5y^2-6y+3>0.$$

Так как

$$D=4(1-2y)^2-4(5y^2-6y+3)=$$
$$=-4(y^2-2y+2)=-4[(y-1)^2+1]<0$$

для любых y, то согласно неравенству (24) квадратный трехчлен положителен для всех x и y, что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать, что для положительных чисел a, b и c

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Решение. Согласно неравенству (25) имеем

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab},\quad b+c \geqslant 2\sqrt{bc},\quad c+a \geqslant 2\sqrt{ca}.$$

Перемножая эти неравенства, получаем требуемое.

Пример 5. Доказать, что если $a \geqslant b \geqslant c > 0$, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3.$$

Решение. Из неравенства $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$ вытекает справедливость неравенства

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geqslant \left(2-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).$$

Преобразуем правую часть полученного неравенства:

$$2-\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3+\left(\frac{b}{c}-1\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\right)=$$
$$=3+\left(\frac{b-c}{c}+\frac{c-b}{a}\right).$$

Так как дробь

$$\frac{b-c}{c}+\frac{c-b}{a}=\frac{(b-c)(a-c)}{ac}$$

согласно условию $a \geqslant b \geqslant c > 0$ неотрицательна, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3.$$

Пример 6. Доказать, что для любых действительных чисел a_1, a_2, b_1 и b_2, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} a_1^2+a_2^2=1, \\ b_1^2+b_2^2=1, \end{cases} \qquad (*)$$

справедливо неравенство

$$|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant 1.$$

Решение. Согласно неравенствам (22) и (21) имеем

$$|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant |a_1b_1|+|a_2b_2|\leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}=\frac{a_1^2+a_2^2}{2}+\frac{b_1^2+b_2^2}{2}=1,$$

т. е. $|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant 1$.

При доказательстве некоторых неравенств целесообразно использовать метод замены данных величин другими. Приведем, например, решение примера 6 способом замены.

II способ решения примера 6. Согласно заданным условиям (*) существуют углы α и β, для которых

$$\cos\alpha=a_1,\quad \sin\alpha=a_2,\quad \cos\beta=b_1,\quad \sin\beta=b_2.$$

Тогда доказываемое неравенство принимает вид

$$|\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta|\leqslant 1,$$

или $|\cos(\alpha-\beta)|\leqslant 1$, что очевидно.

Пример 7. Доказать, что для положительных a и b

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Решение. Полагая $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$, получаем неравенство

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geqslant xy,$$

равносильное простейшему $x^3+y^3\geqslant xy(x+y)$ (см. формулу (27)).

Пример 8. Доказать, что для любых действительных чисел a и b, удовлетворяющих условию $a+b=2$, справедливо неравенство

$$a^4+b^4\geqslant 2.$$

Решение. Пусть $a=1+c$. Тогда $b=2-a=1-c$. Поэтому

$$a^4+b^4=(1+c)^4+(1-c)^4=2+12c^2+2c^4\geqslant 2,$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве неравенств, связанных с натуральными числами, часто используется метод математической индукции.

Пример 9. Доказать, что для любого натурального $n\geqslant 2$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}.$$

Решение. При $n=2$, очевидно, $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}<2-\frac{1}{2}$. Предполагая, что неравенство справедливо при $n=k$, т. е.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}, \qquad (*)$$

докажем его справедливость при $n=k+1$, т. е.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}. \qquad (**)$$

Пусть

$$A=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{k^2},\quad B=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Тогда

$$B=A+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2},$$

так как $A<2-\frac{1}{k}$. Отсюда следует, что неравенство

$$B<2-\frac{1}{k+1}$$

будет заведомо справедливым, если мы докажем, что

$$-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<-\frac{1}{k+1},$$

или

$$\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},\ \text{т. е.}\ \frac{1}{k+1}<\frac{1}{k}.$$

Последнее очевидно.

Итак, из справедливости неравенства (*) вытекает справедливость неравенства (**), следовательно, и доказываемого.

Метод индукции не является единственным или лучшим методом доказательств неравенств, связанных с натуральными числами. Приведем, например, другое решение примера 9.

II способ решения примера 9. Так как

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\quad (k=2,\ 3,\ \ldots),$$

то имеем

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Складывая эти неравенства с равенством $\frac{1}{1^2}=1$, получим

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n},$$

что и требовалось доказать.

Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений в общем случае рассматриваются в курсе высшей математики. Однако некоторые из таких задач могут быть решены методами элементарной математики и в основном с использованием неравенств.

Пример 10. Найти наименьшее значение выражения

$$A=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2.$$

Решение. Запишем A в виде

$$A=\left(\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right)+2.$$

Согласно неравенству (26) имеем

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\geqslant 2,$$

причем равенство достигается лишь при $\operatorname{tg}^2\alpha=1$. Следовательно, при $\operatorname{tg}^2\alpha=1$ выражение A имеет наименьшее значение $A=4$.

Пример 11. Найти наибольшее значение функции

$$y=\frac{x}{ax^2+b}\quad (a>0,\ b>0).$$

Решение. Очевидно, что следует рассматривать лишь положительные значения x. Согласно неравенству

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

имеем

$$\frac{ax^2+b}{2}\geqslant\sqrt{ax^2b},\ \text{или}\ \frac{ax^2+b}{2}\geqslant x\sqrt{ab}\quad (x>0).$$

Следовательно, для всех $x>0$

$$\frac{x}{ax^2+b}\leqslant\frac{x}{2x\cdot\sqrt{ab}},\ \text{или}\ \frac{x}{ax^2+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{ab}},$$

причем равенство достигается лишь при $ax^2=b$, т. е. при $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Таким образом, функция

$$y=\frac{x}{ax^2+b}\quad (a>0,\ b>0)$$

при $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ имеет наибольшее значение, равное $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$.

Используется также следующее свойство квадратного трехчлена ax^2+bx+c $(a\neq 0)$:

если $a>0$, то трехчлен принимает наименьшее значение при $x=-\frac{b}{2a}$; если же $a<0$, то трехчлен принимает наибольшее значение при том же значении x.

В самом деле, трехчлен можно представить в виде

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right). \qquad (29)$$

Если $a>0$, то первое слагаемое в правой части равенства (29) положительно при всех значениях x, кроме $x=-\frac{b}{2a}$, при котором это слагаемое равно нулю. Следовательно, трехчлен принимает наименьшее значение при $x=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Аналогично исследуется вопрос о наибольшем значении трехчлена в случае $a<0$.

Пример 12. Данное положительное число A представить в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим через x одно из искомых слагаемых. Тогда другое слагаемое будет равно $A-x$. Их произведение $x(A-x)$ является квадратным трехчленом. Преобразуем трехчлен к виду (29):

$$x(A-x)=-x^2+Ax=-\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+\frac{A^2}{4}.$$

Отсюда видно, что при $x=\frac{A}{2}$ трехчлен принимает наибольшее значение, равное $\frac{A^2}{4}$.

Итак, каждое из искомых слагаемых равно $\frac{A}{2}$.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ

Равенство двух математических выражений A и B:

$$A = B,$$

не являющееся тождеством на множестве допустимых значений буквенных величин, входящих в это равенство, называют *уравнением* на этом множестве.

Под множеством допустимых значений уравнения, если нет специальной оговорки, понимают множество числовых значений буквенных величин, входящих в выражения A и B, при которых они одновременно имеют смысл.

Следует иметь в виду, что одно и то же равенство может быть как уравнением, так и тождеством в зависимости от того, на каком оно множестве рассматривается.

Например, равенство $\sqrt{x^2} - x = 0$, рассматриваемое на множестве действительных чисел,— уравнение (например, $\sqrt{(-3)^2} - (-3) \neq 0$). Но если это равенство рассматривать на множестве действительных неотрицательных чисел, то это уже не уравнение, а тождество, так как $\sqrt{x^2} = x \, (x \geqslant 0)$.

Буквенные величины, входящие в уравнение, по условию задачи могут быть неравноправными. Одни могут принимать все свои допустимые значения. Тогда их называют *известными*, или *параметрами* уравнения*. Другие буквенные величины называют *неизвестными*. В зависимости от числа неизвестных, входящих в уравнение, последнее называют уравнением с одним, с двумя и т. д. неизвестными.

При постановке задач, связанных с уравнениями, должно быть указано, какие из буквенных величин, входящих в уравнение, считать неизвестными, а какие — параметрами. Иначе задача может стать неопределенной.

Поэтому обычно неизвестные величины в уравнениях обозначаются последними буквами латинского алфавита: x, y, z, ..., а параметры — начальными: a, b, c, m, n и т. д. и в таких случаях уже не делают специальных указаний.

Значения неизвестных, принадлежащие множеству допустимых значений уравнения и удовлетворяющие уравнению (т. е. обращающие его в справедливое равенство), называют *корнями* уравнения,

---

* Вообще в каждом математическом выражении различают основные и неосновные буквенные величины. Неосновные буквенные величины называют параметрами рассматриваемого математического выражения.

или *решениями*. Решить уравнение — это значит найти все его корни (решения).

Например, уравнение $x^2+1=0$, рассматриваемое на множестве комплексных чисел, имеет два корня $x_1=i$, $x_2=-i$. Уравнение $x^2+y^2=0$, рассматриваемое на множестве действительных чисел, имеет одно решение $x=0$, $y=0$ (а не два, как иногда неправильно считают).

Множество корней уравнения может быть конечным (см. предыдущий пример), бесконечным или пустым (уравнение не имеет ни одного решения).

Например, уравнение $\sin x=1$ имеет бесконечное множество корней

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

а уравнение $x^2+1=0$, рассматриваемое на множестве действительных чисел, не имеет корней.

Если уравнение не имеет корней, то говорят, что оно противоречивое.

Классификацию уравнений (их название) проводят по характеру математических операций, выполняемых над неизвестными. Так, различают уравнения *алгебраические* и *трансцендентные*. В алгебраических уравнениях над неизвестными могут совершаться, притом в конечном числе, лишь операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня.

Если над неизвестными совершаются и другие операции, как например, возведение в иррациональную степень, взятие логарифма, синуса и т. п., то уравнение называют трансцендентным. Вообще к трансцендентным уравнениям относят все неалгебраические уравнения.

Например, уравнение $\frac{x^{\frac{2}{3}}+x\sqrt{2}}{x^2+1}=3$ — алгебраическое $\left(x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}\right)$, а уравнение $\frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{\sqrt{2}}}{x^2+1}=3$ — трансцендентное.

Частными случаями алгебраических уравнений являются уравнения рациональные (отсутствует операция извлечения корня над выражением, содержащим неизвестные) и иррациональные (есть операция извлечения корня). Например, уравнение $\frac{x+1}{x+y}=2x$ — рациональное, а уравнение $\sqrt{x^2+2}=x-1$ — иррациональное.

Рациональные уравнения в свою очередь подразделяются на целые рациональные (нет операции деления на выражения, содержащие неизвестные) и дробные рациональные (есть операции деления на выражения, содержащие неизвестные). Например, уравнение $x^3+2x^2-y^2+3=0$ — целое рациональное, уравнение $\frac{x+2}{3}-\frac{2}{x-1}=1$ — дробное рациональное.

Частными случаями трансцендентных уравнений являются показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

Методы решения уравнения основаны на понятии равносильности (эквивалентности) уравнений.

Определение. Если все корни уравнения $A=B$ являются в то же время корнями уравнения $A_1=B_1$, то последнее уравнение называют *следствием* первого.

Определение. Два уравнения называют *равносильными (эквивалентными)*, если каждое из них является следствием другого.

Из этих определений следует, что уравнение-следствие может иметь и другие корни, кроме корней исходного, а равносильные уравнения имеют одни и те же корни. Одни и те же два уравнения могут быть равносильными или неравносильными в зависимости от того, на каком множестве чисел они рассматриваются. Например, уравнения $(x+2)\cdot(x^2+1)=3(x^2+1)$ и $x+2=3$, рассматриваемые на множестве действительных чисел, равносильные (оба имеют один лишь действительный корень $x=1$), но если их рассматривать на множестве комплексных чисел, то они уже не равносильные (первое уравнение, кроме 1, имеет еще корни $\pm i$, т. е. оно является следствием второго уравнения). Два противоречивых уравнения, очевидно, равносильны, так как они оба не имеют корней).

При решении уравнения путем различных преобразований стараются заменить его более простым, равносильным ему уравнением. Однако такая замена не всегда удается. Тогда возможны следующие два случая.

I. При переходе к новому уравнению может произойти потеря корней. Ясно, что такой переход недопустим, так как решить уравнение — это значит найти все его корни. Поэтому при переходе к новому уравнению надо тщательно следить за тем, чтобы такая потеря не могла произойти.

II. Новое уравнение может содержать корни, не являющиеся корнями исходного (так называемые посторонние корни). Посторонние корни можно выделить проверкой (подстановкой всех корней нового уравнения в исходное), но сделать это иногда технически трудно. Чтобы избежать непосредственной проверки, на неизвестные и параметры в новом уравнении накладывают некоторые дополнительные ограничения, при которых это уравнение будет равносильным исходному. Тогда достаточно проверить — удовлетворяют ли найденные корни нового уравнения этим ограничениям или нет.

Например, уравнение $\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+x}=\frac{(a+b)^2}{ab}$ равносильно уравнению $ab\,[a(b+x)+b(a+x)]=(a+b)^2(a+x)(b+x)$ при условии, что параметры второго уравнения удовлетворяют условию $ab\neq 0$, а неизвестное условию $x\neq -a$ и $x\neq -b$. Если мы решим второе уравнение и из его корней исключим значения $x=-a$ и $x=-b$ (если такие будут), то все остальные корни, и только они, будут решениями первого

уравнения (конечно при условии, что в формулах этих корней $ab \neq 0$). Подробно о решении этого уравнения см. гл. IV, § 1, пример 2.

Если все же при решении уравнения не удалось избежать действий, которые могут привести к появлению посторонних корней, и нельзя указать дополнительные условия, то нужно обязательно делать проверку корней путем подстановки их в исходное уравнение. Иначе решение считают неполноценным (даже если на самом деле посторонние корни и не появились). В остальных случаях проверка не нужна (при условии, конечно, что сами вычисления проводятся без ошибок).

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ

Имеют место следующие свойства уравнений, справедливость которых вытекает из соответствующих свойств равенств и понятия равносильных уравнений.

I. Уравнение $A = B$ равносильно уравнению $A + C = B + C$, где C — число или некоторое математическое выражение, имеющее смысл на множестве допустимых значений уравнения $A = B$.

II. Уравнение $A = B$ равносильно уравнению $AC = BC$, где C — число или некоторое математическое выражение, имеющее смысл на множестве допустимых значений уравнения $A = B$ и не обращающееся на нем в нуль.

III. Уравнение $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ равносильно уравнению $A_1B_2 = A_2B_1$, рассматриваемому на множестве допустимых значений исходного уравнения или на своем множестве при дополнительном условии, что $A_2B_2 \neq 0$, т. е. $A_2 \neq 0$ и $B_2 \neq 0$.

В формулировках дальнейших свойств используется следующее понятие.

Определение. Уравнение $A = B$ *равносильно совокупности двух уравнений* $A' = B'$ и $A'' = B''$, если все решения уравнения $A = B$ содержатся среди решений обоих уравнений $A' = B'$ и $A'' = B''$ и обратно: все решения обоих уравнений $A' = B'$ и $A'' = B''$ в то же время являются решениями уравнения $A = B$.

IV. Уравнение $AC = BC$ равносильно совокупности двух уравнений $C = 0$ и $A = B$, рассматриваемых на множестве допустимых значений исходного уравнения.

Другими словами, найдя все корни уравнений $C = 0$ и $A = B$ и взяв из них те, которые принадлежат множеству допустимых значений уравнений $AC = BC$, мы найдем все корни последнего.

V. Уравнение $A^2 = B^2$ равносильно совокупности двух уравнений $A = B$ и $A = -B$.

Из свойств I—V вытекают такие следствия.

1. Любое слагаемое уравнения можно переносить с противоположным знаком из одной части уравнения в другую.

В самом деле, согласно свойству I уравнение $A=B+C$ равносильно уравнению $A+(-C)=B+C+(-C)$, т. е. уравнению $A-C=B$.

2. Обе части уравнения можно сократить на общий множитель, не обращающийся в нуль на множестве допустимых значений данного уравнения.

Действительно, согласно свойству II, уравнение $AC=BC$ равносильно уравнению $AC\left(\frac{1}{C}\right)=BC\left(\frac{1}{C}\right)$, т. е. уравнению $A=B$.

Замечание. При приведении в уравнении подобных членов может произойти расширение множества допустимых значений исходного уравнения, т. е. могут появиться посторонние корни.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x^2-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$.

Решение. Переписав уравнение в виде $x-\frac{1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$, после приведения подобных членов получим уравнение $x=x^2$. Его корни $x_1=0$ и $x_2=1$. Но корень $x_1=0$ не является корнем исходного уравнения $\left(\frac{1}{x}\right.$ при $x=0$ не имеет смысла$\left.\right)$. Это произошло за счет того, что множество допустимых значений исходного уравнения не содержит $x=0$, а полученного — содержит.

При решении уравнений отдельных классов (например, иррациональных, показательных, логарифмических и др.) используют и некоторые другие свойства уравнений. Они будут рассмотрены в соответствующих местах.

Основной прием решения всякого уравнения заключается в следующем: используя свойства уравнений, различные замены неизвестных и параметров другими неизвестными и параметрами, пытаются свести исходное уравнение к одному или нескольким простейшим уравнениям, правила нахождения корней которых известны. При этом, если уравнение содержит параметры, то необходимо не просто выразить неизвестные через параметры, но также исследовать зависимость полученных для корней формул от допустимых значений параметров. Если этого не сделать, то эти формулы для отдельных значений параметров могут оказаться просто неверными.

При решении уравнений надо помнить, что рациональные уравнения, если нет специальной оговорки, рассматриваются на множестве комплексных чисел. Все остальные уравнения в элементарной математике рассматриваются на множестве действительных чисел.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Совокупность двух и более уравнений $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, ..., $A_n=B_n$, рассматриваемых совместно, называют *системой урав-*

нений и записывают

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \ldots \\ A_n = B_n. \end{cases} \qquad (S)$$

Под множеством допустимых значений системы, если нет специальной оговорки, понимают множество числовых значений буквенных величин, входящих в выражения A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n, при которых все они одновременно имеют смысл.

Классификацию систем (их названия) проводят по числу и характеру уравнений, входящих в систему. Например:

$$\text{а)} \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ 2x = 3 + \frac{1}{x} \end{cases}$$

— система двух рациональных уравнений с одним неизвестным;

$$\text{б)} \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

— система двух уравнений первой степени (линейных) с двумя неизвестными;

$$\text{в)} \begin{cases} x + \sqrt{y} = a, \\ x^2 - xy = b + z \end{cases}$$

— смешанная система двух уравнений с тремя неизвестными (одно уравнение — иррациональное, а другое — рациональное), или просто — алгебраическая система двух уравнений с тремя неизвестными.

Бывают системы логарифмические, тригонометрические и т. д.

Решением системы называют совокупность значений неизвестных системы, принадлежащих ее множеству допустимых значений и удовлетворяющих всем уравнениям системы одновременно.

Если, например, $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$ и $x = -1$, $y = 2$, $z = 5$ — два решения некоторой системы с тремя неизвестными, то их обозначают

$$x_1 = 3,\ y_1 = -1,\ z_1 = 2;\quad x_2 = -1,\ y_2 = 2,\ z_2 = 5$$

или в виде (3; —1; 2), (—1; 2; 5), каждый раз сохраняя порядок значений неизвестных.

Решить систему — это значит найти множество всех ее решений. Если система не имеет решений, то говорят, что она *противоречивая*, или *несовместная*.

Если все решения одной системы являются решениями другой системы, то вторую систему называют *следствием* первой системы.

Две системы называются *равносильными* (эквивалентными), если каждая из них является следствием другой.

Из этого определения следует, что равносильные системы имеют только одни и те же решения.

Очевидно, что две несовместные системы можно считать равносильными (они обе не имеют решений).

Важны также следующие понятия.

Система (S) *равносильна совокупности двух систем* (S') и (S''), если каждое решение системы (S) является в то же время решением либо системы (S'), либо системы (S'') и обратно: все решения систем (S') и (S'') являются в то же время решениями системы (S).

Уравнение $A=B$ есть уравнение-следствие системы (S), если все решения этой системы являются в то же время решениями уравнения $A=B$.

Например, очевидно, что уравнения

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=B_1+B_2+\ldots+B_n \quad \text{и} \quad A_1A_2\ldots A_n=B_1B_2\ldots B_n$$

являются уравнениями-следствиями системы

$$\begin{cases} A_1=B_1, \\ A_2=B_2, \\ \ldots \\ A_n=B_n. \end{cases}$$

Если обратно, все решения уравнения $A=B$ являются решениями системы (S), то это *уравнение* и *систему* называют *равносильными*.

Имеют место следующие свойства систем.

I. Любое уравнение системы можно заменить уравнением ему равносильным; при этом получится равносильная система.

Справедливость этого свойства вытекает из понятий равносильности уравнений и систем.

II. Если одно из уравнений системы (S) равносильно совокупности двух уравнений, то эта система равносильна совокупности двух систем (S') и (S''), в каждой из которых это уравнение заменено на одно из уравнений равносильной совокупности, а остальные оставлены без изменения.

Справедливость этого свойства вытекает из понятий равносильности уравнения и совокупности двух уравнений и равносильности системы и совокупности двух систем.

Например, в системе

$$\begin{cases} x^3+y^3=3(x+y), \\ x^2+y^2=7 \end{cases}$$

первое уравнение равносильно совокупности двух уравнений. $x+y=0$ и $x^2-xy+y^2=3$ и, следовательно, система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ x^2+y^2=7. \end{cases}$$

III. Если к уравнениям системы (S) присоединить уравнение-следствие этой системы, то новая система будет равносильна системе (S). Справедливость этого свойства очевидна из понятий уравнения-следствия системы и равносильности систем.

IV. Система двух уравнений

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2 \end{cases} \qquad (S)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} m_1A_1 + m_2A_2 = m_1B_1 + m_2B_2, \\ n_1A_1 + n_2A_2 = n_1B_1 + n_2B_2, \end{cases} \qquad (S_1)$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 — либо числа, либо некоторые математические выражения, имеющие смысл на множестве допустимых значений системы S и такие, что выражение $\Delta = m_1n_2 - n_1m_2$ не обращается на нем в нуль.

Действительно, умножая обе части первого уравнения системы S на m_1, а второго на m_2 и складывая, получим первое уравнение системы S_1. Умножая эти уравнения на n_1 и n_2 и складывая, получим второе уравнение системы S_1. Из этого следует, что система S_1 является следствием системы S. Обратно, умножая первое уравнение системы S_1 на n_2, а второе на $-m_2$ и складывая, получим уравнение $\Delta A_1 = \Delta B_1$. Умножая первое уравнение системы S_1 на $-n_1$, а второе на m_1 и складывая, получим уравнение $\Delta A_2 = \Delta B_2$. Следовательно, система

$$\begin{cases} \Delta A_1 = \Delta B_1, \\ \Delta A_2 = \Delta B_2 \end{cases} \qquad (S_2)$$

является следствием системы S_1, но, очевидно, система S является в свою очередь, следствием системы S_2 (если сократить обе части уравнений системы S_2 на $\Delta \neq 0$).

Таким образом, каждая из систем S и S_1 является следствием другой, т. е. они равносильны.

Выражение Δ обычно записывают в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}$$

и называют *определителем*, составленным из элементов m_1, m_2, n_1, n_2. Следовательно, по определению

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} = m_1n_2 - n_1m_2.$$

Следствия.

1. Система

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2 \end{cases} \qquad (S)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} mA_1 + nA_1 = mB_1 + nB_2, \\ mA_1 - nA_2 = mB_1 - nB_2 \end{cases} \qquad (S_1)$$

при условии $\Delta = \begin{vmatrix} m & n \\ m & -n \end{vmatrix} = -2mn \neq 0$ (т. е. m и n не равны нулю на множестве допустимых значений системы S).

В частности, она равносильна системе

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = B_1 + B_2, \\ A_1 - A_2 = B_1 - B_2. \end{cases} \qquad (m = 1,\ n = -1).$$

2. Система

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2 \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ mA_1 + nA_2 = mB_1 + nB_2 \end{cases}$$

при условии $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n \neq 0.$

В частности, она равносильна системам

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_1 + A_2 = B_1 + B, \end{cases} \quad (m = 1,\ n = 1)$$

и

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_1 - A_2 = B_1 - B_2 \end{cases} \quad (m = 1,\ n = -1).$$

Бывает, что в системе

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_n = B_n, \end{cases} \qquad (S)$$

например, выражение A_1 входит составной частью в выражение A_2. Если в выражении A_2 его составную часть A_1 заменить через B_1,

то получим новое выражение A_2' и тем самым новую систему

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2' = B_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_n = B_n, \end{cases} \qquad (S_1)$$

которая отличается от системы S лишь левой частью второго уравнения.

Например, если в системе

$$\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ z(x^2 + y) + x = 1, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

во втором уравнении заменим $x^2 + y$ через 3, то получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ 3z + x = 1, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

V. Система

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_n = B_n \end{cases} \qquad (S)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2' = B_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_n = B_n, \end{cases} \qquad (S_1),$$

где A_2' — новое выражение, получившееся из выражения A_2 в результате замены в нем его составной части A_1 через B_1.

Действительно, из справедливости равенства $A_1 = B_1$ системы S или системы S_1 для какого-нибудь решения системы S или S_1 следует справедливость равенства $A_2 = A_2'$, а значит и равносильность систем S и S_1.

Из последнего свойства следует обоснование метода решения систем так называемым способом *подстановки*, который заключается в следующем.

1. Выражаем из какого-нибудь уравнения системы одно неизвестное через остальные (при этом надо следить, чтобы новое уравнение было равносильно исходному).

2. Исключаем это неизвестное из остальных уравнений системы, подставив найденное выражение в прочие уравнения. В результате

получим систему, в которой число уравнений и неизвестных на единицу меньше, чем в исходной системе.

3. С этой системой поступаем аналогично и т. д.

В конечном итоге мы придем к одному уравнению.

4. Находим все решения последнего уравнения и подставляем их последовательно в уравнения, выражающие одно неизвестное через остальные. В итоге получим все решения первоначальной системы.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x-2y+3z=9, \\ 2x+y-z=-1, \\ -3x+2y+3z=1. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим

$$x=2y-3z+9. \qquad (*)$$

Подставляя это значение x во второе и третье уравнения системы, после приведения подобных получим систему

$$\begin{cases} 5y-7z=-19, \\ -y+3z=7. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы имеем

$$y=3z-7. \qquad (**)$$

Подставляя y в первое уравнение, получаем $8z=16$, откуда $z=2$. Теперь из уравнения (**) находим $y=-1$ и окончательно из уравнения (*) имеем $x=1$.

Таким образом, первоначальная система имеет единственное решение: $x=1$, $y=-1$, $z=2$.

Однако далеко не всегда можно решить систему методом подстановки (не всегда возможно из уравнения выразить одно неизвестное через остальные). Тогда применяют различные частные приемы, которые невозможно предусмотреть общей теорией. Но каким бы приемом система ни решалась, надо тщательно следить за равносильностью преобразований. Если не удалось избежать действий, которые могут привести к появлению посторонних решений системы, то все найденные решения надо подвергнуть проверке, подставляя их в первоначальную систему.

Как и при решении уравнений, надо помнить, что если все уравнения системы рациональны относительно неизвестных и нет специальной оговорки, то решения такой системы ищутся на множестве комплексных чисел. Во всех остальных случаях системы в элементарной математике рассматриваются на множестве действительных чисел.

§ 4. ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Всякое целое рациональное уравнение после перенесения всех членов в одну часть и приведения подобных может быть представлено в следующем каноническом виде:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0,\ n\text{—натуральное}). \qquad (1)$$

Левая часть такого уравнения является многочленом степени n относительно x и сокращенно обозначается $P_n(x)$, т. е.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n. \qquad (2)$$

Корнем многочлена $P_n(x)$ называют всякое число x_0, удовлетворяющее уравнению (1), т. е. число, для которого многочлен (2) принимает значение равное нулю: $P_n(x_0) \equiv 0$.

Отметим следующие свойства многочленов.

1. Основная теорема алгебры (теорема Гаусса)*. *Всякий многочлен (2), рассматриваемый на множестве комплексных чисел, имеет, по крайней мере, один корень.*

Эта теорема доказывается в курсе высшей алгебры.

2. Теорема о числе корней многочлена и разложении его на линейные множители. *Всякий многочлен, рассматриваемый на множестве комплексных чисел, имеет ровно столько корней, какова его степень и всегда разлагается на линейные множители по формуле*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \qquad (3)$$

где x_1, x_2, ..., x_n—все корни многочлена, среди которых могут быть равные.

Доказательство. Согласно основной теореме существует число x_1 такое, что $P_n(x_1) \equiv 0$. Но тогда по теореме Безу (см. гл. II, § 3) многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на двучлен $x-x_1$, т. е. имеет место тождество $P_n(x) \equiv (x-x_1)P_{n-1}(x)$. (Здесь через $P_{n-1}(x)$ обозначен многочлен степени $n-1$—частное от деления $P_n(x)$ на $x-x_1$.)

Рассуждая аналогично, для многочлена $P_{n-1}(x)$ получим $P_{n-1}(x) \equiv (x-x_2)P_{n-2}(x)$. Продолжая этот процесс далее, в конце концов получим $P_1(x) \equiv (x-x_n)P_0(x)$, где $P_0(x)$—многочлен нулевой степени относительно x, т. е. некоторое число A.

Таким образом, существуют числа x_1, x_2, ..., x_n (не обязательно все разные), для которых имеют место тождества

$$P_n(x) \equiv (x-x_1)P_{n-1}(x), \quad P_{n-1}(x) \equiv (x-x_2)P_{n-2}(x), \quad \ldots,$$
$$P_1(x) \equiv (x-x_n)A.$$

Подставляя последовательно каждое следующее тождество в предыдущее, получаем

$$P_n(x) \equiv (x-x_1)\cdot(x-x_2)\ldots(x-x_n)\cdot A. \qquad (4)$$

Так как равенства (2) и (4)—различные представления одного и

* К. Ф. Гаусс (1777—1855)—немецкий математик.

того же многочлена, то коэффициенты при x^n должны быть одинаковыми, т. е. $A = a_0$.

Таким образом,

$$P_n(x) \equiv a_0 (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Из формулы (3) следует, что $P_n(x_1) \equiv 0$, $P_n(x_2) \equiv 0, \ldots, P_n(x_n) \equiv 0$, т. е. числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями многочлена (2). Очевидно, что эта совокупность содержит все корни многочлена, так как $P_n(x) \neq 0$ для любого числа x не равного числам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ни один из множителей в равенстве (3) не будет равен нулю). Таким образом, теорема доказана.

Из формулы (3) вытекает следующее: если все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны, то многочлен $P_n(x)$ имеет ровно n различных корней; если же некоторые из этих чисел совпадают между собой, то число различных корней $P_n(x)$ будет меньше n. В этом случае среди множителей формулы (3) имеются равные.

Определение. Число x_0 называется *корнем кратности* k многочлена (2), если в формулу (3) множитель $x - x_0$ входит ровно k раз, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot P_{n-k}(x), \tag{5}$$

причем $P_{n-k}(x_0) \neq 0$. Если $k = 1$, то x_0 называют *простым*, или *однократным* корнем.

3. Формулы Виета* (связь между корнями многочлена и его коэффициентами).

Если в формуле (3) произвести умножение двучленов, то получим

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0 (x^n + s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} + \ldots + s_n), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
s_1 &= (-x_1) + (-x_2) + \ldots + (-x_n) = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),\\
s_2 &= (-x_1) \cdot (-x_2) + \ldots + (-x_{n-1}) \cdot (-x_n) = x_1 \cdot x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s_n &= (-x_1) \cdot (-x_2) \ldots (-x_n) = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в равенстве (6), найдем

$$\begin{cases}
x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0},\\
x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n = \dfrac{a_2}{a_0},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}.
\end{cases} \tag{7}$$

Это так называемые формулы Виета. В левых частях соотношений (7) стоят суммы всевозможных сочетаний из всех корней многочлена

---

* Ф. Виет (1540—1603) — французский математик.

по одному, по два, по три и т. д. Они являются симметрическими выражениями относительно его корней x_1, x_2, ..., x_n. В правых частях соотношений (7) стоят коэффициенты многочлена a_1, a_2, ..., a_{n-k}, ... при степенях $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^k, \ldots$, деленные на коэффициент a_0 при старшей степени x и взятые со знаком $(-1)^1$, $(-1)^2$, ..., $(-1)^{n-k}$, ... соответственно.

Формулы (7) позволяют по известным корням уравнения составить это уравнение в виде

$$x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} = 0. \qquad (8)$$

Это так называемый приведенный вид уравнения n-й степени, когда коэффициент при старшей степени неизвестного равен единице.

4. Свойства многочленов с действительными коэффициентами.

Теорема 1. *Если комплексное число $x = a + bi$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и сопряженное число $\bar{x} = a - bi$ также является корнем этого многочлена.*

Доказательство. Так как $x = a + bi$ корень многочлена $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, то

$$P_n = a_0 (a + bi)^n + a_1 (a + bi)^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (*)$$

В этом выражении над комплексными числами производятся лишь рациональные операции.

Заменим в левой части равенства (*) все числа на сопряженные. При этом $\bar{a}_0 = a_0$, $\bar{a}_1 = a_1$, ..., $\bar{a}_n = a_n$ (a_k — действительны!), $\overline{a + bi} = a - bi$. Тогда согласно свойству комплексных чисел (см. гл. I, § 6) и результат заменится на сопряженный, т. е. 0 на $\bar{0}$. Но $\bar{0} = 0$, поэтому имеем

$$a_0 (a - bi)^n + a_1 (a - bi)^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

т. е. $a - bi$ является корнем многочлена $P_n(x)$.

Теорема 2. *Многочлен с действительными коэффициентами всегда разлагается в произведение линейных и квадратичных множителей, коэффициенты которых также действительны.*

Доказательство. В самом деле, если многочлен имеет лишь действительные корни, то утверждение следует из формулы (3).

Если же он имеет комплексный корень $x_1 = a + bi$, то по теореме 1 он имеет и сопряженный комплексный корень $\bar{x}_1 = a - bi$ и, следовательно, (по теореме Безу) делится на $x - x_1$ и $x - \bar{x}_1$, т. е. на их произведение $(x - x_1)(x - \bar{x}_1) = x^2 - (x_1 + \bar{x}_1) x + x_1 \bar{x}_1 = x^2 + px + q$, где $p = -(x_1 + \bar{x}_1) = -(a + bi + a - bi) = -2a$ и $q = x_1 \bar{x}_1 = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ — действительные числа. Таким образом, в этом случае многочлен $P_n(x)$ представим в виде $P_n(x) = (x^2 + px + q) P_{n-2}(x)$.

Рассуждая так же относительно многочлена $P_{n-2}(x)$ и т. д., в конечном итоге получим требуемое утверждение.

Из теоремы 2, в частности, вытекает, что всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень. (Если бы было не так, то такой многочлен разлагался бы лишь на множители вида x^2+px+q, которые в произведении могут лишь дать многочлен четной степени.)

§ 5. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. *Линейным* уравнением называется уравнение первой степени

$$ax+b=0 \quad (a\neq 0). \tag{9}$$

Это уравнение равносильно уравнению $ax=-b$, из которого следует, что

$$x=-\frac{b}{a}.$$

Таким образом, линейное уравнение всегда имеет единственный корень.

Пример 1. Решить уравнение

$$a^2x=a(x+2)-2. \tag{*}$$

Решение. Перенося неизвестные в одну часть равенства, а известные в другую, получаем равносильное уравнение $a(a-1)x=2(a-1)$. Если $a(a-1)\neq 0$, т. е. $a\neq 0$, $a\neq 1$, то имеем линейное уравнение, которое имеет единственный корень $x=\frac{2}{a}$.

Если $a=0$, то уравнение противоречиво ($0\cdot x=-2$), если $a=1$, то равенство (*) есть тождество, т. е. ему удовлетворяют любые значения x.

II. Уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \tag{10}$$

называется *квадратным*. Его левая часть есть многочлен второй степени (квадратный трехчлен).

Для решения квадратного уравнения выделим в его левой части полный квадрат.

Имеем

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Так как $a\neq 0$, то уравнение (10) равносильно уравнению

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0,$$

или

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Последнее равносильно совокупности двух линейных уравнений

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{11}$$

(знаки $\pm$ перед радикалом обозначают в общем случае два различных значения радикала, рассматриваемого на множестве комплексных чисел).

Решая каждое из уравнений (11), находим формулу корней квадратного уравнения

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{12}$$

которая справедлива для любых коэффициентов a, b и c при условии, что $a\neq 0$.

Если $b^2-4ac\neq 0$, то из формулы (12) следует, что уравнение (11) имеет два различных корня; если же $b^2-4ac=0$, то имеем два равных корня $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2+ix+i-1=0$.

Решение. Согласно формуле (12) имеем

$$x_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4(i-1)}}{2}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4i+4}}{2}=$$

$$=\frac{-i\pm\sqrt{(i-2)^2}}{2}=\frac{-i\pm(i-2)}{2},$$

откуда находим

$$x_1=\frac{-i+i-2}{2}=-1 \text{ и } x_2=\frac{-i-i+2}{2}=1-i.$$

Если коэффициент при x в уравнении (10) четный, т. е.

$$ax^2+2b_1x+c=0, \tag{10'}$$

то формула (12) упрощается. В этом случае

$$x_{1,2}=\frac{-2b_1\pm\sqrt{4b_1^2-4ac}}{2a}, \text{ или } x_{1,2}=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-ac}}{a}. \tag{12'}$$

Замечание. Если квадратное уравнение (10) неполное, т. е. либо $b=0$, либо $c=0$, то его можно решить, не прибегая к формуле (12).

1. Уравнение $ax^2+bx=0$, или $x(ax+b)=0$ равносильно совокупности двух уравнений $x=0$ и $ax+b=0$, из которых следует, что $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$.

2. Уравнение $ax^2+c=0$, или $x^2=-\frac{c}{a}$ имеет корни $x_{1,2}=$ $=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Из формулы (12) вытекает следующая зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения (*формулы Виета для квадратного уравнения*):

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{13}$$

Действительно, из формулы (12) имеем

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\text{и}\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Сложив и перемножив эти равенства, получим требуемое.

Формулы Виета легко позволяют получить разложение квадратного трехчлена на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=$$
$$=a\left[(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)\right]=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=$$
$$=a(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

Таким образом, справедливо тождество

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \tag{14}$$

(ср. с формулой (3) § 4).

Если $x_1=x_2$, то из соотношения (14) следует, что $ax^2+bx+c=$ $=a(x-x_1)^2$, т. е. квадратный трехчлен является полным квадратом.

§ 6. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В теории квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ и квадратного трехчлена ax^2+bx+c большую роль играет выражение

$$D=b^2-4ac, \tag{15}$$

называемое *дискриминантом* квадратного трехчлена или уравнения. При этом формулу корней квадратного уравнения можно записать в виде

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}. \tag{16}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет:*

1) *мнимые, причем обязательно сопряженные корни, тогда и только тогда, когда его дискриминант меньше нуля;*

2) *действительные равные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю;*

3) *действительные различные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант больше нуля.*

Доказательство. Действительно, эти утверждения в одну сторону непосредственно следуют из формулы (16). Например, если $D<0$, то в формуле (16) под знаком радикала стоит отрицательное число и так как b и a—действительные числа, то, следовательно, уравнение имеет два комплексных сопряженных корня. Аналогично доказываются остальные случаи.

Обратные утверждения легко доказываются от противного.

Если, например, x_1 и x_2—мнимые, то, предположив, что $D\geqslant 0$, мы, согласно прямым утверждениям случаев 2 и 3, не можем иметь мнимых корней. Получаем противоречие. Аналогично рассуждаем в остальных случаях.

Заметим, что если корни квадратного уравнения действительные, то формулы Виета позволяют по знакам коэффициентов уравнения определить знаки корней. Например, если $a>0$, $b>0$, $c<0$, то $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$ и, следовательно, корни имеют разные знаки (произведение действительных чисел отрицательно!).

Так как при этом $x_1+x_2=\frac{-b}{a}<0$, то из этого следует, что бо́льший по абсолютной величине корень отрицателен (сумма двух чисел разных знаков—отрицательная!). Аналогично рассуждаем в случае других комбинаций знаков коэффициентов квадратного уравнения.

§ 7. ДВУЧЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Так называют уравнения вида

$$ax^n\pm b=0 \qquad (a>0,\ b>0). \tag{17}$$

Заменой

$$x=y\sqrt[n]{\frac{b}{a}}, \tag{18}$$

где $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$—арифметический корень, двучленное уравнение приводится к виду

$$y^n\pm 1=0. \tag{19}$$

Поэтому достаточно уметь находить корни уравнения (19), так как корни уравнения (17) затем найдем по формуле (18). В элементарной алгебре обычно рассматривают случаи $n=2$, 3, 4, 6.

Покажем, как находить корни в этих случаях.

I. $n=2$. Двучленные уравнения $y^2-1=0$ и $y^2+1=0$ являются неполными квадратными уравнениями. Корни первого уравнения равны ± 1, корни второго равны $\pm i$.

II. $n=3$. Уравнение $y^3-1=0$ равносильно совокупности двух уравнений $y-1=0$ и $y^2+y+1=0$. Решая каждое из них, находим

$$y_1=1, \quad y_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнение $y^3+1=0$ равносильно совокупности уравнений $y+1=0$ и $y^2-y+1=0$. Решая их, находим

$$y_1=-1, \quad y_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

III. $n=4$. Уравнение $y^4-1=0$ равносильно совокупности двух уравнений $y^2-1=0$ и $y^2+1=0$. Решая их, находим

$$y_{1,2}=\pm 1; \quad y_{3,4}=\pm i.$$

Для того чтобы свести уравнение $y^4+1=0$ к равносильной совокупности квадратных уравнений, дополним его левую часть до полного квадрата. Получаем

$$(y^4+2y^2+1)-2y^2=0, \text{ или } (y^2+1)^2-(\sqrt{2}y)^2=0.$$

Последнее распадается на два уравнения $y^2-\sqrt{2}y+1=0$ и $y^2+\sqrt{2}y+1=0$. Решая их, находим

$$y_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i), \quad y_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i).$$

IV. $n=6$. Уравнение $y^6-1=0$ равносильно двум уравнениям $y^3-1=0$ и $y^3+1=0$ (см. случай II). Их корни:

$$y_{1,2}=\pm 1, \quad y_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \quad y_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнение $y^6+1=0$ сводится к предыдущему, если ввести новое неизвестное z, связанное с y формулой $y=iz$. Тогда z удовлетворяет уравнению $i^6z^6+1=0$ или $z^6-1=0$. Его корни уже известны (см. выше). Умножая их на i, получим корни данного уравнения

$$y_{1,2}=\pm i, \quad y_{3,4}=\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}, \quad y_{5,6}=\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Пример. Решить уравнение $2x^4+3=0$.

Решение. Положим $x=y\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$. Тогда данное уравнение приводится к виду $y^4+1=0$. Решая его (см. случай III), найдем

$$y_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i), \quad y_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i).$$

Умножая теперь каждый из этих корней на $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$, получим корни

данного уравнения

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt[4]{6}}{2}(1\pm i),\quad x_{3,4}=-\frac{\sqrt[4]{6}}{2}(1\pm i).$$

В общем случае решение уравнения (19) сводится к нахождению всех корней n-й степени из ± 1. Эти корни можно получить по формулам (см. гл. I, § 6)

$$\sqrt[n]{1}=\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;$$

$$\sqrt[n]{-1}=w_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Если воспользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел, то точки, изображающие эти корни, очевидно, будут вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичный круг с центром в начале координат.

§ 8. БИКВАДРАТНЫЕ И ТРЕХЧЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение четвертой степени

$$ax^4+bx^2+c=0\qquad (a\neq 0)$$

называется *биквадратным*. Заменой $x^2=y$ решение этого уравнения сводится к решению квадратного уравнения $ay^2+by+c=0$ и затем двух двучленных уравнений $x^2=y_1$ и $x^2=y_2$, где y_1 и y_2 — корни соответствующего квадратного уравнения.

Если коэффициенты биквадратного уравнения действительны, то возможны следующие случаи:

1) $y_1\geqslant 0$ и $y_2\geqslant 0$; тогда биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня (с учетом кратности корней)

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1},\quad x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2};$$

2) $y_1\geqslant 0$, $y_2<0$; тогда биквадратное уравнение имеет два действительных корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}$ и два чисто мнимых сопряженных корня $x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}=\pm i\sqrt{-y_2}$;

3. $y_1<0$ и $y_2<0$; тогда биквадратное уравнение имеет четыре чисто мнимых попарно сопряженных корня

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}=\pm i\sqrt{-y_1},\quad x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}=\pm i\sqrt{-y_2};$$

4. $y_1=u+vi$ и $y_2=u-vi$ $(v\neq 0)$; тогда биквадратное уравнение имеет четыре попарно сопряженных комплексных корня.

Для их нахождения надо извлекать квадратные корни из комплексных чисел $u+iv$ и $u-iv$. Чтобы избежать этой операции, преобразуем данное уравнение. Перепишем уравнение в виде $x^4+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}=0$, или $x^4+px^2+q=0$, где $p=\frac{b}{a}$ и $q=\frac{c}{a}$.

Так как соответствующее квадратное уравнение имеет комплексные корни, то его дискриминант $D=p^2-4q<0$. Следовательно, $q>0$, так как при $q\leqslant 0$ дискриминант $D\geqslant 0$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $(x^2+\sqrt{q})^2-2x^2\sqrt{q}+px^2=0$ ($\sqrt{q}$ — арифметический!) или $(x^2+\sqrt{q})^2-x^2(2\sqrt{q}-p)=0$, где $2\sqrt{q}-p>0$.

В самом деле, при $p\leqslant 0$ это очевидно, а при $p>0$ это вытекает из неравенства $p^2>4q$.

Обозначая положительное число $2\sqrt{q}-p$ через s^2, перепишем последнее уравнение в виде

$$(x^2+\sqrt{q})^2-s^2x^2=0,$$

или

$$(x^2+\sqrt{q}-sx)(x^2+\sqrt{q}+sx)=0.$$

Следовательно, биквадратное уравнение в этом случае равносильно совокупности двух квадратных уравнений с действительными коэффициентами

$$x^2-sx+\sqrt{q}=0 \text{ и } x^2+sx+\sqrt{q}=0.$$

Решая их, найдем все четыре корня.

Пример. Решить уравнение $x^4+x^2+1=0$.

Решение. Если его решать общим приемом, то получим $y_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $y_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ и для нахождения значений x_1, x_2, x_3, x_4 надо извлечь корни из этих комплексных чисел. Изберем другой путь решения.

Указанным приемом преобразуем уравнение к виду

$$(x^2+1)^2-2x^2+x^2=0,$$

или

$$(x^2+1)^2-x^2=0.$$

Последнее равносильно совокупности двух уравнений

$$x^2-x+1=0$$

и

$$x^2+x+1=0.$$

Решая их, находим все четыре корня данного уравнения

$$x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Биквадратное уравнение является частным случаем так называемых *трехчленных* уравнений

$$ax^{2n}+bx^n+c=0 \qquad (a\neq 0,\ n\geqslant 2).$$

Заменой $x^n=y$ решение таких уравнений сводится к решению квадратного уравнения $ay^2+by+c=0$ и двух двучленных уравнений $x^n=y_1$ и $x^n=y_2$, где y_1 и y_2 — корни квадратного уравнения.

§ 9. ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Уравнение четвертой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \tag{20}$$

называют *возвратным*, если существует число $\lambda\neq 0$ такое, что коэффициенты уравнения, равноудаленные от концов, удовлетворяют условию

$$d=\lambda b,\ e=\lambda^2 a \tag{21}$$

или, что то же самое, если $b\neq 0$, условию $\left(\frac{d}{b}\right)^2=\frac{e}{a}$. Например, уравнение $2x^4+3x^3-13x^2-6x+8=0$ возвратное, так как $\left(-\frac{6}{3}\right)^2=\frac{8}{2}$, т. е. $\lambda=-2$. С помощью равенств (21) возвратное уравнение (20) можно представить в виде

$$ax^4+bx^3+cx^2+(\lambda b)x+(\lambda^2 a)=0. \tag{22}$$

Название «возвратное» происходит от следующего свойства такого уравнения.

Если в возвратном уравнении сделать замену $x=\frac{\lambda}{y}$, *то относительно нового неизвестного получим прежнее уравнение* («возвратимся» к исходному уравнению).

Действительно, подставляя в уравнение (22) $x=\frac{\lambda}{y}$, получим

$$\frac{a\lambda^4}{y^4}+\frac{b\lambda^3}{y^3}+\frac{c\lambda^2}{y^2}+\frac{\lambda^2 b}{y}+\lambda^2 a=0.$$

После приведения к общему знаменателю и сокращения на λ^2, получаем прежнее уравнение

$$(a\lambda^2)+(b\lambda)y+cy^2+by^3+ay^4=0.$$

Рассмотрим схему решения возвратного уравнения.

Так как, очевидно, $x=0$ не является корнем уравнения (22), то, разделив это уравнение почленно на x^2 и сгруппировав члены, равноудаленные от концов, получим равносильное уравнение

$$a\left(x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)+c=0. \tag{23}$$

Положим $x+\frac{\lambda}{x}=y$. Тогда имеем

$$x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}=\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)^2-2\lambda=y^2-2\lambda. \tag{24}$$

Следовательно, относительно нового неизвестного y уравнение становится квадратным:

$$a(y^2-2\lambda)+by+c=0.$$

Если y_1, y_2 — корни этого уравнения, то значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 найдем из совокупности уравнений

$$x+\frac{\lambda}{x}=y_1,\quad x+\frac{\lambda}{x}=y_2.$$

Пример 1. Решить уравнение $2x^4+3x^3-13x^2-6x+8=0$.

Решение. Это уравнение, как мы уже видели, является возвратным.

Разделив на x^2 и группируя члены, равноудаленные от концов, получим равносильное уравнение $2\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{2}{x}\right)-13=0$. Полагая $x-\frac{2}{x}=y$, найдем $x^2+\frac{4}{x^2}=y^2+4$.

После подстановки получим относительно y уравнение $2y^2+3y-5=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-\frac{5}{2}$. Теперь из уравнений $x-\frac{2}{x}=1$ и $x-\frac{2}{x}=-\frac{5}{2}$ находим

$$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{57}}{4}.$$

Частными случаями возвратных уравнений являются уравнения *симметрические* ($\lambda=1$)

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \qquad (25)$$

(коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и от конца, одинаковые) и *кососимметрические* ($\lambda=-1$)

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0 \qquad (26)$$

(коэффициенты членов, равноотстоящих от концов, при четных степенях равны, а при нечетных равны по абсолютной величине и противоположны по знаку).

Подстановкой $x+\frac{1}{x}=y$ для симметрического и $x-\frac{1}{x}=y$ для кососимметрического уравнения они сводятся к квадратным уравнениям.

Пример 2. Решить уравнение $y^5\pm1=0$.

Решение. Имеем $y^5-1=(y-1)\cdot(y^4+y^3+y^2+y+1)$. Следовательно, уравнение $y^5-1=0$ равносильно совокупности двух уравнений: а) $y-1=0$, откуда $y_1=1$, и б) $y^4+y^3+y^2+y+1=0$ — симметрическое уравнение. Разделив на y^2, получим равносильное уравнение

$$\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=0.$$

Полагая $y+\frac{1}{y}=z$, и тем самым $y^2+\frac{1}{y^2}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2=z^2-2$, получаем $z^2-2+z+1=0$ или $z^2+z-1=0$, откуда $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Для определения y получаем совокупность двух квадратных уравнений: $2y^2-(\sqrt{5}-1)y+2=0$ и $2y^2+(\sqrt{5}+1)y+2=0$, из которых находим

$$y_{2,3}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\quad y_{4,5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Аналогично уравнение $y^5+1=0$ равносильно совокупности двух уравнений: а) $y+1=0$, откуда $y_1=-1$, и б) $y^4-y^3+y^2-y+1=0$ — симметрическое уравнение.

Преобразуем его к виду $\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=0$ и полагаем $y+\frac{1}{y}=z$. Тогда мы получим квадратное уравнение $z^2-z-1=0$, из которого следует, что $z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Теперь из уравнений $2y^2-(\sqrt{5}+1)y+2=0$ и $2y^2+(\sqrt{5}-1)y+2=0$ находим

$$y_{2,3}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad y_{4,5}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

§ 10. ПОДБОР РАЦИОНАЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения с целыми коэффициентами

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0\qquad(a_0\neq 0,\ a_n\neq 0),$$

т. е. справедливо тождество

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)+a_n=0, \tag{27}$$

или

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0. \tag{28}$$

Отсюда имеем

$$-a_nq^n=p\,(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+a_2p^{n-3}q^2+\ldots+a_{n-1}q^{n-1}).$$

Так как целое число, стоящее в правой части, делится на p, то, следовательно, число a_nq^n также делится на p; но q^n не может делиться на p (q и p — взаимно простые!). Следовательно, a_n делится на p.

Из равенства (28) также имеем

$$-a_0p^n=q\,(a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}).$$

Рассуждая аналогично, получим, что a_0 делится на q.

Таким образом, *рациональные корни уравнения с целыми коэффициентами следует искать лишь среди чисел вида* $\frac{p}{q}$, *где* p *и* q *— всевозможные делители (как положительные, так и отрицательные!) соответственно свободного члена уравнения и коэффициента при старшей степени.* В частности, *целые корни следует искать лишь среди делителей свободного члена* ($q=1$).

Знание каждого рационального корня уравнения позволяет понизить степень уравнения на единицу.

В самом деле, если $x=\frac{p}{q}$ — корень уравнения $P(x)=0$, то согласно теореме Безу многочлен $P(x)$ делится на $qx-p$, т. е. $P(x)=(qx-p)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен степени на единицу меньше, чем $P(x)$, и нахождение остальных корней уравнения $P(x)=0$ сводится к решению уравнения $Q(x)=0$.

Пример 1. Решить уравнение $4x^4+8x^3-3x^2-7x+3=0$.

Решение. Подлежат исследованию значения $p=\pm 1, \pm 3$ и $q=1, 2, 4$ (отрицательные значения q мы отбрасываем, так как если $\frac{p}{q}<0$, то можно считать, что $p<0$, а $q>0$). Беря всевозможные комбинации p и q, находим, что для получения рациональных корней надо опробовать значения ± 1, ± 3, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{3}{4}$. Подставляя эти числа в уравнение, находим корни $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$. Следовательно, левая часть уравнения делится на $(2x-1)(2x+3)=4x^2+4x-3$. Найдя частное, получаем уравнение $x^2+x-1=0$. Отсюда $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^4+x^3+x^2+3x+2=0$.

Решение. Если уравнение имеет рациональные корни, то они должны содержаться среди чисел ± 1, ± 2, так как коэффициент при x^4 равен единице. Непосредственной проверкой убеждаемся, что годится лишь $x_1=-1$. Разделив левую часть на $x+1$, получим уравнение $x^3+x+2=0$. Поступая с этим уравнением аналогично, находим $x_2=-1$. Разделив левую часть на $x+1$, получим уравнение $x^2-x+2=0$, откуда $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

§ 11. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными, после перенесения неизвестных в каждом уравнении в одну часть, приводится к виду

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=d_1, \\ a_2x+b_2y=d_2. \end{cases} \tag{29}$$

Считаем, что в каждом уравнении хотя бы один коэффициент при неизвестном не равен нулю (в противном случае не имеет смысла говорить о системе двух уравнений!).

Умножив первое уравнение на b_2, а второе на $-b_1$ и сложив их, получим $(a_1b_2-b_1a_2)\,x=d_1b_2-b_1d_2$.

Умножив первое уравнение на $-a_2$, а второе на a_1 и сложив, получим $(a_1b_2-b_1a_2)\,y=a_1d_2-a_2d_1$.

Если $\Delta=\begin{vmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2\neq 0$, то согласно свойству III (см. § 3) получаем систему

$$\begin{cases} (a_1b_2-b_1a_2)\,x=d_1b_2-b_1d_2, \\ (a_1b_2-b_1a_2)\,y=a_1d_2-d_1a_2, \end{cases} \tag{29'}$$

равносильную системе (29).

Если положить для удобства

$$\Delta=a_1b_2-b_1a_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ (определитель системы)}, \tag{30'}$$

$$\Delta_x=d_1b_2-b_1d_2=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ (определитель неизвестного } x), \tag{30''}$$

$$\Delta_y=a_1d_2-d_1a_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \text{ (определитель неизвестного } y), \tag{30'''}$$

то система (29') принимает вид

$$\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x, \\ \Delta\cdot y=\Delta_y, \end{cases}$$

откуда находим единственное решение

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{31}$$

Таким образом, *если определитель системы* (29) *не равен нулю, то система имеет решение и притом единственное.* Это решение находится по формулам (31), где Δ, Δ_x, Δ_y—определители, вычисляемые по формулам (30'), (30''), (30''').

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} ix-2y=3, \\ x+(1+i)\,y=-1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix} i & -2 \\ 1 & 1+i \end{vmatrix}=i\,(1+i)-1\,(-2)=1+i\neq 0.$$

Теперь находим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1+i \end{vmatrix} = 3(1+i) - (-1)(-2) = 1+3i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} i & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = i(-1) - 3 \cdot 1 = -3-i.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1+3i}{1+i} = 2+i,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{3+i}{1+i} = -2+i.$$

Пусть теперь $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$

Если, например, $a_1 \neq 0$ (в случае $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$ рассуждаем аналогично), то из равенства $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ имеем $b_2 = \frac{a_2}{a_1} \cdot b_1$. Полагая $\frac{a_2}{a_1} = \lambda$, т. е. $a_2 = a_1\lambda$, получаем, что и $b_2 = b_1\lambda$ (причем $\lambda \neq 0$, иначе $a_2 = b_2 = 0$). Следовательно, если определитель системы равен нулю, то коэффициенты при неизвестных пропорциональны. Если в этом случае и $d_2 = d_1\lambda$, то второе уравнение системы можно записать в виде $a_1\lambda x + b_1\lambda y = d_1\lambda$, или $a_1 x + b_1 y = d_1$, т. е. система равносильна одному уравнению $a_1 x + b_1 y = d_1$ и поэтому имеет бесчисленное множество решений, определяемых по формуле $x = \frac{d_1 - b_1 y}{a_1}$, y — любое.

Если же $d_2 \neq d_1\lambda$, то имеем противоречивую систему

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = d_1, \\ a_1 x + b_1 y = \frac{d_2}{\lambda} \neq d_1 \end{cases} \tag{32}$$

(при любых x и y левые части уравнения одинаковые, а правые — нет).

Таким образом, если определитель системы равен нулю, то она либо имеет бесчисленное множество решений (коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны!), либо совсем не имеет решений (коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены не пропорциональны). Заметим, что из условий $a_2 = a_1\lambda$, $b_2 = b_1\lambda$, $d_2 = d_1\lambda$ следует:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 \end{vmatrix} = \lambda a_1 b_1 - \lambda a_1 b_1 = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ \lambda d_1 & \lambda b_1 \end{vmatrix} = \lambda b_1 d_1 - \lambda b_1 d_1 = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ \lambda a_1 & \lambda d_1 \end{vmatrix} = \lambda a_1 d_1 - \lambda a_1 d_1 = 0.$$

Так как полученные возможные случаи решения системы (29) взаимно исключают друг друга, то эти результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет:*

1) *единственное решение тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля (т. е. когда коэффициенты при неизвестных не пропорциональны);*

2) *бесчисленное множество решений тогда и только тогда, когда определители системы и неизвестных равны нулю (т. е. когда коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны);*

3) *не имеет решений тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, а хотя бы один из определителей неизвестных не равен нулю (т. е. когда коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены — не пропорциональны).*

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} (a+4)\,x+3y=a+1, \\ ax+(a-1)\,y=a-1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+4 & 3 \\ a & a-1 \end{vmatrix}=a^2-4,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} a+1 & 3 \\ a-1 & a-1 \end{vmatrix}=(a-1)\cdot(a-2),$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a+4 & a+1 \\ a & a-1 \end{vmatrix}=2\,(a-2).$$

Следовательно, если $a\neq\pm 2$, то $\Delta\neq 0$ и система имеет единственное решение

$$x=\frac{a-1}{a+2},\quad y=\frac{2}{a+2}.$$

Если $a=2$, то $\Delta_x=\Delta_y=0$ и система имеет бесчисленное множество решений. Для их нахождения подставим $a=2$ в любое из уравнений системы, например в первое. Тогда имеем $6x+3y=3$. Отсюда $y=1-2x$, x — любое.

Если $a=-2$, то $\Delta_x\neq 0$ и, следовательно, система не имеет решений.

Геометрический смысл двух линейных уравнений с двумя неизвестными. В случае действительных коэффициентов каждое из уравнений системы (29) изображает на плоскости xOy некоторую прямую (см. гл. VII, § 9, п. 1). Поэтому отыскание решения такой системы эквивалентно отысканию координат точек, общих этим прямым. При этом возможны следующие случаи:

1. Прямые имеют единственную общую точку, т. е. пересекаются. Алгебраически это означает, что система (29) имеет единственное решение. Из предыдущей теоремы следует, что это имеет место в том и только в том случае, когда коэффициенты при x и y не пропорциональны.

2. Прямые параллельны. Алгебраическая система не имеет решений. В силу предыдущей теоремы это имеет место в том и только в том случае, если коэффициенты при x и y пропорциональны, а свободные члены нет.

3. Прямые совпадают. В этом случае алгебраическая система имеет бесчисленное множество решений (решением будут координаты любой точки совпадающих прямых). Согласно предыдущей теореме это имеет место в том и только в том случае, если коэффициенты при x, y и свободные члены пропорциональны.

§ 12. СИСТЕМА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ И ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Такая система может быть представлена в виде

$$\begin{cases} ax+by=d, \\ Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F, \end{cases} \tag{33}$$

где хотя бы один из коэффициентов a и b, а также A, B и C не равны нулю.

Пусть, например, $b\neq 0$ (в случае $a\neq 0$ рассуждаем аналогично). Тогда из первого уравнения находим

$$y=\frac{d-ax}{b}. \tag{34}$$

Подставляя y во второе уравнение системы и производя приведение подобных, получим уравнение

$$a'x^2+b'x+c'=0, \tag{35}$$

где

$$a'=\frac{Ab^2+Ca^2-Bab}{b^2}, \quad b'=\frac{Db^2+Bbd-2Cad-Eab}{b^2},$$

$$c'=\frac{Cd^2+Ebd-Fb^2}{b^2}.$$

Возможны следующие случаи.

I. $a'\neq 0$. Тогда из уравнения (35) находим значения x (вообще говоря, два) и, подставляя их в равенство (34), найдем соответствующие значения y.

II. $a'=0$, $b'\neq 0$. В этом случае из уравнения (35) имеем $x=-\frac{c'}{b'}$ и из (34) находим соответствующее значение y.

III. $a'=b'=0$, $c'\neq 0$. В этом случае уравнение (35) противоречивое и, следовательно, система решений не имеет.

IV. $a'=b'=c'=0$, т. е. уравнение (35) удовлетворяется тождественно при любых x. Все решения системы содержатся в формуле (34), где x — любое.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x-my=1, \\ x^2-xy-2y^2-3y=0. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим $x=my+1$. После подстановки во второе уравнение и приведения подобных членов получим

$$(m^2-m-2)y^2+2(m-2)y+1=0. \qquad (*)$$

Если $m^2-m-2\neq 0$, т. е. $m\neq 2$, $m\neq -1$, то из уравнения (*) находим y: $y=\dfrac{2-m\pm\sqrt{6-3m}}{m^2-m-2}$, а из формулы $x=my+1$ соответствующие значения x:

$$x=\frac{m-2\pm m\sqrt{6-3m}}{m^2-m-2}.$$

Если $m=-1$, то уравнение (*) принимает вид $-6y+1=0$, откуда $y=\frac{1}{6}$ и $x=\frac{5}{6}$. Если $m=2$, то уравнение (*) противоречиво и, следовательно, система не имеет решений.

Частный случай системы (33)

$$\begin{cases} x+y=p, \\ xy=q \end{cases} \qquad (p\neq 0,\ q\neq 0) \qquad (36)$$

целесообразней решать не способом подстановки, а с помощью вспомогательного квадратного уравнения.

Действительно, согласно формулам Виета для корней квадратного уравнения, значения неизвестных x и y системы (36) должны быть корнями квадратного уравнения

$$z^2-pz+q=0.$$

Найдя корни z_1 и z_2 этого уравнения, получим два решения системы $(z_1;\ z_2)$ и $(z_2;\ z_1)$, если $z_1\neq z_2$, и одно решение $(z_1;\ z_2)$, если $z_2=z_1$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x+y=-3, \\ xy=2. \end{cases}$$

Решение. Решая квадратное уравнение $z^2+3z+2=0$, находим $z_1=-2$, $z_2=-1$. Следовательно, решения системы $(-2;\ -1)$ и $(-1;\ -2)$.

Замечание. Аналогично можно решать систему

$$\begin{cases} x-y=p, \\ xy=q, \end{cases}$$

если ее переписать в виде

$$\begin{cases} x+(-y)=p, \\ x(-y)=-q. \end{cases}$$

§ 13. СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Такая система может быть представлена в виде

$$\begin{cases} A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, & (A) \\ A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0, & (B) \end{cases} \tag{37}$$

где в каждом уравнении есть коэффициенты при старших степенях неизвестных, отличные от нуля.

Приведем схему решения такой системы в предположении, что оба уравнения содержат члены с квадратами обоих неизвестных (другие частные случаи будут содержаться в этой схеме).

Рассмотрим одно из уравнений, например, уравнение (37-A) как квадратное относительно какого-нибудь неизвестного, например x, принимая при этом другое неизвестное за параметр. Имеем

$$A_1x^2+(B_1y+D_1)x+(C_1y^2+E_1y+F_1)=0. \tag{38}$$

Если это уравнение допускает рациональное выражение x через y (в общем случае два решения) $x_1=a_1y+b_1$ и $x_2=a_2y+b_2$, то в этом случае система (37) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x=a_1y+b_1, \\ A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x=a_2y+b_2, \\ A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0, \end{cases}$$

схемы решения которых рассмотрены в § 12. Если ни одно из уравнений (37-A) и (37-B) не допускает рационального выражения x через y, то с помощью уравнений (37-A) и (37-B) исключим квадрат какого-нибудь неизвестного, например x^2. С этой целью умножим обе части первого уравнения на A_2, а второго на $-A_1$ и сложим. В результате получим уравнение вида

$$B_3xy+C_3y^2+D_3x+E_3y+F_3=0,$$

или

$$(B_3y+D_3)x+C_3y^2+E_3y+F_3=0, \tag{39}$$

где B_3, D_3, C_3, E_3, F_3 — некоторые новые коэффициенты. Это уравнение совместно с уравнением (37-A) или (37-B) образует систему, равносильную системе (37) (см. § 3).

Возможны следующие случаи.

1. $B_3 = D_3 = 0$, т. е. уравнение (39) имеет вид

$$C_3y^2 + E_3y + F_3 = 0. \qquad (39')$$

Найдя из этого уравнения значения y и подставляя их в уравнение (37-A) или (37-B), найдем соответствующие значения x. Если уравнение (39′) противоречивое ($C_3 = E_3 = 0$, $F_3 \neq 0$), то система (37) решений не имеет. Если же (39′) — тождество ($C_3 = E_3 = F_3 = 0$), то система (37) имеет бесчисленное множество решений. Для их нахождения надо какое-нибудь из уравнений (37-A) или (37-B) решить относительно x (или y) и в полученных формулах для x (для y) считать y — любым (x — любым).

2. $B_3 \neq 0$. Тогда проверяем, не удовлетворяет ли уравнению (39) значение $y = -\frac{D_3}{B_3}$. Если это значение годится, то соответствующие значения x найдем из уравнений (37-A) или (37-B).

Чтобы найти остальные решения системы в этом случае, выразим из уравнения (39) неизвестное x через y $\left(\text{считая } y \neq -\frac{D_3}{B_3}\right)$:

$$x = -\frac{C_3y^2 + E_3y + F_3}{B_3y + D_3}. \qquad (40)$$

Так как в рассматриваемом случае $y = -\frac{D_3}{B_3}$ удовлетворяет уравнению (39), а следовательно, обращает в нуль многочлен $C_3y^2 + E_3y + F_3$, то согласно теореме Безу числитель в равенстве (40) делится без остатка на знаменатель. Разделив, получим выражение для x вида

$$x = ay + b. \qquad (40')$$

Подставив x в уравнение (37-A) или (37-B), найдем значения y и затем из равенства (40′) соответствующие значения x.

Если же $y = -\frac{D_3}{B_3}$ не удовлетворяет уравнению (39), то из этого уравнения находим выражение x через y в виде (40).

Подставив его в уравнение (37-A) или (37-B), получим в общем случае уравнение четвертой степени относительно y. Найдя все корни этого уравнения, получим согласно равенству (40) соответствующие им значения x.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 + 5y - 2 = 0, \\ 2xy + y^2 + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения имеем

$$x = \frac{y \pm (5y - 4)}{4}.$$

Следовательно, система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x=1-y, \\ 2xy+y^2+y-1=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=\frac{3y-2}{2}, \\ 2xy+y^2+y-1=0. \end{cases}$$

Решая их, находим решения данной системы

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{-13+\sqrt{17}}{16}; \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right), \left(\frac{-13-\sqrt{17}}{16}; \frac{1-\sqrt{17}}{8}\right).$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-xy-y^2+y+2=0, \\ 2x^2+3xy+y^2-3y-5=0. \end{cases}$$

Решение. Убеждаемся, что ни из одного уравнения системы x не выражается рационально через y, а значит, и y через x. (Читателю советуем это проверить.)

Сложив первое уравнение со вторым, получим уравнение, в котором член с y^2 отсутствует: $3x^2+2xy-2y-3=0$, или $2(x-1)y+3(x^2-1)=0$. Очевидно, этому уравнению удовлетворяет $x=1$. Соответствующие значения $y=\pm\sqrt{3}$ находим, например, из первого уравнения системы. Считая теперь $x\neq 1$, из последнего уравнения находим $y=-\frac{3(x+1)}{2}$, и подставляя его в первое уравнение системы, получаем $x^2-18x-7=0$. Следовательно, $x=9\pm\sqrt{88}$ и $y=\frac{-3(10\pm\sqrt{88})}{2}$. Таким образом, система имеет решения

$$(1; \pm\sqrt{3}), \left(9\pm\sqrt{88}; \frac{-3(10\pm\sqrt{88})}{2}\right).$$

Рассмотренный метод решения не всегда является самым рациональным в отдельных частных случаях системы (37). Например, систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ xy=b \end{cases} \tag{37'}$$

иногда удобнее решать следующим приемом: умножить второе уравнение почленно на 2 и затем один раз почленно прибавить к первому уравнению, а другой — вычесть. В результате получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} (x+y)^2=a+2b, \\ (x-y)^2=a-2b, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=\pm\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\pm\sqrt{a-2b}. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности четырех систем ли-

нейных уравнений

$$1)\ \begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\sqrt{a-2b}, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b}, \\ x-y=-\sqrt{a-2b}, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b}, \\ x-y=-\sqrt{a-2b}, \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\sqrt{a-2b}. \end{cases}$$

Решив эти системы, найдем все решения исходной системы. Систему (37′) в случае действительного значения b можно также решить сведением к квадратному уравнению, если заметить, что система (37′) равносильна системе

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x^2y^2=b^2 \end{cases}$$

при условии, что произведение ее решений должно по знаку совпадать с b.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ xy=-\sqrt{3}. \end{cases}$$

Решение. Возводя обе части второго уравнения в квадрат, получим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x^2y^2=3 \end{cases}$$

при условии $xy<0$. Решая квадратное уравнение $z^2-4z+3=0$, находим $z_1=3$, $z_2=1$. Следовательно, решение системы $(\sqrt{3};\ -1)$, $(-\sqrt{3};\ 1)$, $(1;\ -\sqrt{3})$, $(-1;\ \sqrt{3})$.

Отдельные другие приемы решения частных случаев системы (37) рассмотрены в следующей главе.

§ 14. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Любое неравенство после перенесения всех членов в одну часть можно записать в виде

$$A \vee 0,$$

где $\vee$ может обозначать любой из символов $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, а A — выражение, содержащее известные и неизвестные (т. е. подлежащие определению) величины.

Решить неравенство — это значит указать все действительные значения неизвестных, для которых это неравенство истинно. Поня-

тие равносильности уравнений сохраняется и для неравенств, а именно: два неравенства называются равносильными, если все решения первого являются решениями второго и, наоборот, все решения второго являются решениями первого.

При решении неравенств над ними совершают такие действия, которые сохраняют его равносильность и сводят к одному или совокупности нескольких более простых неравенств, правила решения которых известны.

Рассмотрим правила решения некоторых неравенств.

1. **Линейное неравенство**

$$ax+b \vee 0 \quad (a \neq 0). \tag{41}$$

Для определенности разберем решение неравенства $ax+b>0$. Это неравенство согласно свойствам неравенств равносильно неравенству $ax>-b$. Отсюда получаем $x>-\frac{b}{a}$, если $a>0$, и $x<-\frac{b}{a}$, если $a<0$.

Для остальных значений символа $\vee$ неравенство (41) решается аналогично.

Пример 1. Решить неравенство $x+1 \geqslant \frac{bx}{a}+\frac{a}{b}$.

Решение. Это неравенство равносильно неравенству

$$x\left(1-\frac{b}{a}\right) \geqslant \frac{a}{b}-1, \text{ или } \frac{(a-b)x}{a} \geqslant \frac{a-b}{b}.$$

Очевидно, в случае $ab=0$ неравенство не имеет смысла. Исключая эти значения a и b, получаем:

в случае $a-b>0$, т. е. $a>b$, неравенство равносильно неравенству $\frac{x}{a} \geqslant \frac{1}{b}$. Отсюда $x \geqslant \frac{a}{b}$, если $a>0$, и $x \leqslant \frac{a}{b}$, если $a<0$;

в случае $a-b<0$, т. е. $a<b$, неравенство равносильно неравенству $\frac{x}{a} \leqslant \frac{1}{b}$. Отсюда $x \leqslant \frac{a}{b}$, если $a>0$, и $x \geqslant \frac{a}{b}$, если $a<0$;

в случае $a=b$ получаем $0 \cdot x \geqslant 0$, что справедливо для любого x.

Таким образом, решением неравенства будут:

1) $x \geqslant \frac{a}{b}$, если $a>b$, $a>0$ или $a<b$ и $a<0$;

2) $x \leqslant \frac{a}{b}$, если $b<a<0$ или $b>a>0$;

3) x — любое, если $a=b$.

2. **Исследование знака квадратного трехчлена. Неравенство второй степени**

$$ax^2+bx+c \vee 0 \quad (a \neq 0). \tag{42}$$

Обозначим через $D=b^2-4ac$ дискриминант квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c. \tag{43}$$

Тогда, вынося a за скобки и выделяя полный квадрат, представим квадратный трехчлен в виде

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]. \qquad (44)$$

Возможны следующие случаи:

I. $D<0$.

Так как $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$ для любого x, а $\frac{D}{4a^2}<0$, то выражение в квадратной скобке положительно и, следовательно:

1. Если $a>0$, то $ax^2+bx+c>0$ для всех x;
2. Если $a<0$, то $ax^2+bx+c<0$ для всех x.

Таким образом, если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то его знак для всех x совпадает со знаком коэффициента при x^2.

Отсюда следует, что в случае $D<0$ неравенства $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c\geqslant 0$ имеют решением все действительные значения x при $a>0$ и не имеют решений при $a<0$.

Аналогично, неравенства $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c\leqslant 0$ не имеют решений в случае $a>0$ и имеют решением все x, если $a<0$.

II. $D=0$. В этом случае согласно равенству (44) квадратный трехчлен представим в виде $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Следовательно, если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то его знак для всех $x\neq-\frac{b}{2a}$ совпадает со знаком коэффициента при x^2; при $x=-\frac{b}{2a}$ он принимает значение, равное нулю. Поэтому в случае $D=0$:

1. Неравенство $ax^2+bx+c>0$ имеет решением все $x\neq-\frac{b}{2a}$, если $a>0$, и не имеет решений, если $a<0$.

2. Неравенство $ax^2+bx+c<0$ имеет решением все $x\neq-\frac{b}{2a}$, если $a<0$, и не имеет решений, если $a>0$.

3. Неравенство $ax^2+bx+c\geqslant 0$ имеет решением все x, если $a>0$, и единственное решение $x=-\frac{b}{2a}$, если $a<0$.

4. Неравенство $ax^2+bx+c\leqslant 0$ имеет решением все действительные значения x, если $a<0$, и только $x=-\frac{b}{2a}$, если $a>0$.

III. $D>0$. В этом случае квадратный трехчлен представим в виде

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (45)$$

где x_1, x_2—действительные и различные корни квадратного трехчлена (43).

Будем считать $x_1 < x_2$. Очевидно, что $(x-x_1)(x-x_2) > 0$ для $x < x_1$ и $x > x_2$ (оба сомножителя одного знака) и $(x-x_1)\cdot(x-x_2) < 0$ для $x_1 < x < x_2$ (первый сомножитель положителен, а второй отрицателен).

При $x = x_1$ или $x = x_2$, очевидно, $(x-x_1)(x-x_2) = 0$. Поэтому согласно формуле (45) в случае $a > 0$ квадратный трехчлен положителен для всех x, лежащих вне промежутка (x_1, x_2), и отрицателен для всех значений x, заключенных в промежутке (x_1, x_2). В случае $a < 0$ — наоборот.

Из этого исследования следует способ решения неравенства $ax^2 + bx + c \vee 0$, когда $D > 0$.

Геометрическая интерпретация. Графиком квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ служит парабола (см. гл. VII, § 9—III). Расположение этой параболы относительно оси x для различных случаев представлено на рис. 10.

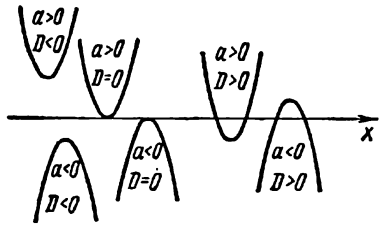


Рис. 10

Пример 2. Решить неравенство $(a-2)x^2 - x - 1 \geqslant 0$.

Решение. При $a = 2$ имеем $-x - 1 \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant -1$. При $a \neq 2$ находим $D = 1 + 4(a-2) = 4a - 7$.

Если $D = 4a - 7 < 0$, т. е. $a < \frac{7}{4}$, то коэффициент $a - 2 < 0$ и, следовательно, неравенство решений не имеет (для всех x левая часть отрицательна).

Если $a = \frac{7}{4}$, т. е. $D = 0$, то неравенство принимает вид $-\frac{x^2}{4} - x - 1 \geqslant 0$, или $-(x-2)^2 \geqslant 0$. Следовательно, его решением будет лишь $x = 2$.

Если $a > \frac{7}{4}$ и $a \neq 2$, то находим, что $x_1 = \frac{1 + \sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$ и $x_2 = \frac{1 - \sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$ — корни трехчлена. Неравенство представляем в виде $(a-2)(x-x_1)(x-x_2) \geqslant 0$.

В случае $\frac{7}{4} < a < 2$ коэффициент $a - 2 < 0$ и неравенство равносильно неравенству $(x-x_1)(x-x_2) \leqslant 0$ и так как, очевидно, в этом случае $x_1 < x_2$, то, следовательно, решением неравенства будет $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Для $a > 2$ неравенство равносильно неравенству $(x-x_1) \times (x-x_2) \geqslant 0$, причем $x_1 > x_2$, и поэтому решением будет $x \leqslant x_2$ и $x \geqslant x_1$.

Таким образом, решениями неравенства служат:

1) $x = 2$, если $a = \frac{7}{4}$;

2) $\frac{1 + \sqrt{4a-7}}{2(a-2)} \leqslant x \leqslant \frac{1 - \sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$, если $\frac{7}{4} < a < 2$;

3) $x \leqslant -1$, если $a = 2$;

4) $x \leqslant \frac{1-\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$ и $x \geqslant \frac{1+\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$, если $a > 2$.

В случае $a < \frac{7}{4}$ неравенство решений не имеет.

3. **Общий случай.** Всякое рациональное неравенство (т. е. неравенство, обе части которого рациональны относительно неизвестного) после перенесения всех членов в одну часть приводится к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0, \tag{46}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены относительно x.

Всякий многочлен, рассматриваемый на множестве действительных чисел, разлагается в произведение множителей вида $(x-a)$, $(x-b)^k$, (x^2+px+q) и $(x^2+p_1x+q_1)^s$, где x^2+px+q и $x^2+p_1x+q_1$ не имеют действительных корней, т. е. их дискриминанты отрицательны. Поэтому для всех x они принимают лишь положительные значения (коэффициент при x^2 равен 1). Следовательно, эти квадратные трехчлены можно в неравенстве (46) отбросить, в результате чего получится неравенство, равносильное исходному.

Двучлены вида $(x-b)^k$ при четном $k=2m$ для всех $x \neq b$ принимают лишь положительные значения. Поэтому, если такой двучлен отбросить, то получим неравенство, равносильное исходному для всех $x \neq b$. Что касается нечетного k, т. е. двучленов вида $(x-b)^{2m+1}$, то как следует из равенства $(x-b)^{2m+1} = (x-b)^{2m}(x-b)$, они принимают для всех x значения, совпадающие по знаку с $x-b$. Следовательно, такой двучлен можно в неравенстве заменить его первой степенью.

Далее, если числитель и знаменатель неравенства (46) содержат одинаковые линейные множители $x-a$, то сокращая на этот множитель, мы получим неравенство, равносильное исходному при всех $x \neq a$, причем заметим, что значение $x=a$ не может входить в решение исходного неравенства (числитель и знаменатель обращаются в нуль!).

Таким образом, неравенство (46) после разложения числителя и знаменателя на простейшие множители с действительными коэффициентами сводится к неравенству

$$A \equiv \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)}{(x-a_{k+1})(x-a_{k+2})\ldots(x-a_n)} \vee 0, \tag{47}$$

равносильному данному для всех x, за исключением, быть может, отдельных значений $x=b_1$, $x=b_2$, ..., причем числитель и знаменатель этого неравенства не имеют одинаковых множителей. Для решения неравенства вида (47) удобно применять числовую ось.

Пусть $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n$ — все значения x, при которых сомножители неравенства (47), стоящие в числителе и знаменателе,

обращаются в нуль (т. е. это числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, перенумерованные в порядке убывания).

Отметим на числовой оси x точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем будем отмечать точки сплошной чертой, если они принадлежат решению неравенства (47) и пунктирной — если не принадлежат (рис. 11). (В случае большого разброса точек масштаб можно не соблюдать.) Очевидно, если символ $\vee$ обозначает $\geqslant$ или $\leqslant$, то такими точками, заведомо принадлежащими решению, будут числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, обращающие сомножители числителя в нуль. Точки $a_{k+1}, \ldots, a_n$, обращающие знаменатель в нуль, не могут принадлежать решению неравенства (47).

Эти точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разбивают числовую ось на $n+1$ промежутков.

Для всех x из крайнего правого промежутка ($x > x_1$), очевидно, все сомножители в неравенстве (47) положительны и, следовательно, $A > 0$. Для x из следующего промежутка $x_2 < x < x_1$ сомножитель $x - x_1$ будет отрицательный, а все остальные, по-прежнему, остаются положительными, т. е. на этом промежутке $A < 0$. При переходе на следующий промежуток $x_3 < x < x_2$ все сомножители, за исключением $x - x_2$, будут принимать значения, совпадающие по знаку с их значениями на предыдущем промежутке, а сомножитель $x - x_2$ вместо положительных значений будет принимать отрицательные значения и, следовательно, на этом промежутке $A > 0$. Вообще, двигаясь справа налево вдоль числовой оси, при переходе с одного промежутка на следующий знак A в неравенстве (47) меняется на противоположный, так как один из сомножителей вместо положительного значения принимает отрицательное. Это знакочередование значений A удобно условно изображать волнистой линией, как показано на рис. 11.

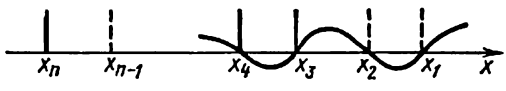


Рис. 11

Для крайнего правого промежутка $x > x_1$ эта линия всегда лежит над осью.

Итак, если линия на промежутке находится над осью, то значения A положительны, если под осью — отрицательны.

Отметив знакочередование A на числовой оси, мы, в зависимости от значения символа $\vee$, получим все решения неравенства (47). Присоединяя к этим решениям те значения x, для которых могла нарушиться равносильность при переходе от неравенства (46) к неравенству (47), и которые являются решениями неравенства (46), мы получим все решения этого неравенства.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{(1-2x)(x^2+x)(x^2-x-2)}{(3+5x)(x-x^2-1)(4-x)} \leqslant 0.$

Решение. Замечая, что

$$1-2x = -2\left(x-\frac{1}{2}\right), \quad x^2+x = x(x+1), \quad 4-x = -(x-4),$$

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1),\quad 3+5x=5\left(x+\frac{3}{5}\right),$$
$$x-x^2-1=-(x^2-x+1),$$

перепишем неравенство в виде $\dfrac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)x(x+1)^2(x-2)}{5\left(x+\frac{3}{5}\right)(x^2-x+1)(x-4)}\leqslant 0$. Имеем: $(x+1)^2>0$ для всех $x\neq -1$, причем $x=-1$ удовлетворяет неравенству; $x^2-x+1>0$ для всех x, так как дискриминант $D=1-4<0$. Поэтому исходное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)}{\left(x+\frac{3}{5}\right)(x-4)}\geqslant 0$ при $x\neq -1$ (при сокращении обеих частей на $-\frac{2}{5}$ знак неравенства изменили на противоположный).

Отмечая на числовой оси точки $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$ (сплошной линией) и $x=-\frac{3}{5}$, $x=4$ (пунктирной) и рисуя справа налево, начиная над осью, волнистую линию, получим знакочередование левой части последнего неравенства (рис. 12). «Снимая» с этого

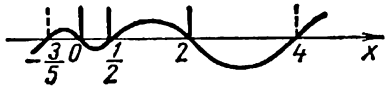


Рис. 12

Рис. 13

рисунка решение последнего неравенства и присоединяя к нему $x=-1$, получаем решение исходного неравенства

$$x=-1,\quad -\frac{3}{5}<x\leqslant 0,\quad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\quad x>4.$$

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{x}{x^2-3x+1}>\frac{x}{x^2+3x+2}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x}{x^2-3x+1}-\frac{x}{x^2+3x+2}>0,$$

или

$$\frac{x(6x+1)}{(x^2-3x+1)\cdot(x^2+3x+2)}>0,$$

или

$$\frac{x\left(x+\frac{1}{6}\right)}{(x-x_1)(x-x_2)(x+1)(x+2)}>0,$$

где $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Используя числовую ось (рис. 13), получаем решение

$$(-\infty,\ -2),\ \left(-1,\ -\frac{1}{6}\right),\ \left(0,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ +\infty\right).$$

4. Системы неравенств с одним неизвестным. Решить систему неравенств с одним неизвестным

$$\begin{cases} A_1 \vee 0, \\ A_2 \vee 0, \\ \ldots\ldots \\ A_n \vee 0 \end{cases}$$

это значит указать все значения неизвестных, для которых все неравенства, входящие в систему, одновременно справедливы. Если таких значений нет, т. е. система не имеет решений, то говорят, что она противоречивая, или несовместная.

Решая каждое неравенство на своей числовой оси (во избежание путаницы) и отмечая на ней, например, штриховкой, удовлетворяющие этому неравенству промежутки, мы получим совокупность числовых осей. Если их расположить параллельно одна под другой так, чтобы начала отсчета каждой оси лежали на одной вертикальной линии, то легко получить промежутки, являющиеся решением системы.

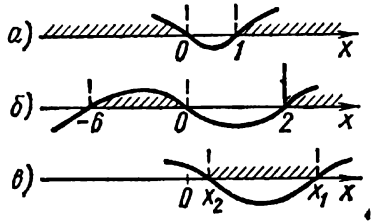


Рис. 14

Пример 5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{x}<1, & (1) \\ \frac{x}{3}+\frac{4}{3}\geqslant\frac{4}{x}, & (2) \\ x^2-3x+1<0. & (3) \end{cases}$$

Решение. Неравенство (1) равносильно неравенству $\frac{1-x}{x}<0$, или $\frac{x-1}{x}>0$. Отмечаем на числовой оси штриховкой промежутки, удовлетворяющие этому неравенству (рис. 14, *а*).

Неравенство (2) равносильно неравенству $\frac{x^2+4x-12}{3x}\geqslant 0$, или $\frac{(x+6)(x-2)}{x}\geqslant 0$. Его решение отмечено штриховкой на рис. 14, *б*.

Неравенство (3) записываем в виде $(x-x_1)(x-x_2)<0$, где $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и отмечаем также штриховкой его решение (рис. 14, *в*). Теперь из рис. 14 получаем решение системы $2\leqslant$

$\leqslant x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (тот промежуток, где штриховка на всех осях совпадает!).

Примечание. Решение иррациональных, показательных, логарифмических неравенств см. в соответствующих местах. О решении неравенств и систем неравенств с несколькими неизвестными см. также гл. XIV, § 8.

ГЛАВА IV

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Некоторые общие приемы решения простейших рациональных уравнений были рассмотрены в предыдущей главе.

В элементарной математике большое значение имеют частные приемы решения, выбор которых вызывается не общими соображениями, а конкретным видом данного уравнения.

Рассмотрим некоторые такие приемы.

I. **Непосредственное упрощение уравнения.** Часто то или иное уравнение путем упрощения выражений, составляющих его (приведение к общему знаменателю, раскрытие скобок и т. д.), приводится к уравнению, правила нахождения корней которого известны. Еще раз напомним, что при упрощении надо внимательно следить за тем, чтобы не нарушилась равносильность уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}.$$

Решение. Разложив знаменатели на простейшие множители, получим

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}.$$

После приведения к общему знаменателю $x(x^2-4)$ и приведения подобных членов получим уравнение $x^2-5x+6=0$, равносильное исходному, при условии, что $x(x^2-4)\neq 0$, т. е. $x\neq 0, x\neq \pm 2$. Корни последнего уравнения $x_1=3$, $x_2=2$. Так как $x_2=2$ не удовлетворяет ограничению $x\neq 2$, то, следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+x}=\frac{(a+b)^2}{ab}. \tag{1}$$

Решение. Считаем $ab\neq 0$ (иначе уравнение теряет смысл). Уравнение (1) равносильно уравнению

$$ab\,[a(b+x)+b(a+x)]=(a+b)^2(a+x)(b+x) \tag{2}$$
$$(x\neq -a,\ x\neq -b).$$

Подставляя $x=-a$ в уравнение (2), получим, что $x=-a$ может быть его корнем лишь при условии $a=b$. Аналогично найдем, что $x=-b$ может быть его корнем тоже лишь при условии $a=b$.

После приведения подобных членов в уравнении (2) получим, что уравнение (1) при условии $a \neq b$ равносильно уравнению

$$(a+b)^2 x^2 + (a+b)(a^2+b^2+ab)x + ab(a^2+b^2) = 0. \qquad (3)$$

Если $a = -b$, то из уравнения (3) получаем $ab(a^2+b^2) = 0$ при любом x, что невозможно, так как $ab \neq 0$. Следовательно, при $a = -b$ уравнение корней не имеет. Если $a \neq -b$, то уравнение (3) является квадратным. Решив его, найдем

$$x_1 = \frac{-ab}{a+b} \text{ и } x_2 = -\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Теперь исследуем случай $a = b$. Тогда уравнение (1) принимает вид $\frac{2a}{a+x} = 4$, откуда находим, что $x = -\frac{a}{2}$.

Таким образом, имеем:

в случае $a = -b$ уравнение не имеет решений,

в случае $a = b$ уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{a}{2}$,

в случае $a^2 \neq b^2$ уравнение имеет корни

$$x_1 = \frac{-ab}{a+b}, \quad x_2 = -\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Иногда при упрощении уравнения во избежание громоздких выкладок целесообразно выделять целые части алгебраических дробей.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}.$$

Решение. Прежде чем приводить к общему знаменателю, выделим целые части каждой дроби. Переписав уравнение в виде

$$\frac{(x+1)^2+1}{x+1} + \frac{(x+4)^2+4}{x+4} = \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+3)^2+3}{x+3},$$

получаем равносильное уравнение

$$x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4} = x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3},$$

или

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}.$$

Члены этого уравнения уже можно приводить к общему знаменателю, но удобнее поступить иначе.

Имеем

$$\frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+3} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1},$$

или

$$\frac{x}{(x+4)(x+3)} = \frac{x}{(x+2)(x+1)},$$

откуда

$$x_1 = 0 \text{ и } \frac{1}{(x+4)(x+3)} = \frac{1}{(x+2)(x+1)},$$

или

$$4x + 10 = 0 \quad (x \neq -1, -2, -3, -4).$$

Отсюда $x_2 = -\frac{5}{2}$.

II. **Разложение на множители.** Если левую часть уравнения $A = 0$ удается разложить на множители или в обеих частях уравнения $A = B$ удается выделить общий множитель, то согласно свойствам уравнений решение исходного уравнения сводится к решению совокупности более простых уравнений.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^3 - 3x = a^3 + \frac{1}{a^3} \quad (a \neq 0).$$

Решение. Представляя правую часть в виде

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

и полагая для удобства $a + \frac{1}{a} = b$, после подстановки в уравнение получаем

$$x^3 - 3x = b^3 - 3b,$$

или

$$x^3 - b^3 = 3(x - b).$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x - b = 0$ и $x^2 + bx + b^2 = 3$, решая которые, получаем

$$x_1 = b, \quad x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{12 - 3b^2}}{2}, \text{ где } b = a + \frac{1}{a}.$$

Иногда разложение на множители достигается за счет изобретательности.

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{x+6}{x-6} \cdot \left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 + \frac{x-6}{x+6} \cdot \left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2 = 2\frac{x^2+36}{x^2-36}.$$

Решение. Замечая, что

$$2\frac{x^2+36}{x^2-36} = \frac{x+6}{x-6} + \frac{x-6}{x+6},$$

после перенесения всех членов в левую часть и группировки получаем

$$\frac{x+6}{x-6}\left[\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 - 1\right] + \frac{x-6}{x+6}\left[\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2 - 1\right] = 0,$$

откуда после упрощения выражения в квадратных скобках следует, что

$$\frac{-16x}{(x+4)^2}\cdot\frac{x+6}{x-6}+\frac{36x}{(x-9)^2}\cdot\frac{x-6}{x+6}=0.$$

Следовательно, уравнение имеет корень $x_1=0$. Для нахождения остальных корней имеем уравнение

$$\frac{9}{(x-9)^2}\cdot\frac{x-6}{x+6}-\frac{4}{(x+4)^2}\cdot\frac{x+6}{x-6}=0,$$

или

$$\frac{9(x-6)^2}{(x-9)^2}-\frac{4(x+6)^2}{(x+4)^2}=0\ (x\neq\pm 6).$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\frac{3(x-6)}{x-9}-\frac{2(x+6)}{x+4}=0 \text{ и } \frac{3(x-6)}{x-9}+\frac{2(x+6)}{x+4}=0,$$

решая которые, находим

$$x_{2,3}=\pm 6i,\ x_{4,5}=\frac{6(1\pm\sqrt{26})}{5}.$$

При решении уравнения, содержащего параметр, иногда выгодно вначале решать уравнение относительно этого параметра.

Пример 6. Решить уравнение

$$x^4-3x^2+2(a-1)x+2a-a^2=0.$$

Решение. Рассматривая это уравнение как квадратное относительно a и считая при этом x параметром, имеем

$$a^2-2(x+1)a-(x^4-3x^2-2x)=0.$$

Отсюда

$$a=x+1\pm(x^2-1).$$

Следовательно, наше уравнение равносильно совокупности двух уравнений $a=x+x^2$ и $a=x-x^2+2$. Решая эти уравнения теперь уже относительно x, получаем

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{9-4a}}{2}.$$

В других случаях полезно такой параметр вводить самим.

Пример 7. Решить уравнение

$$(x^2-x+1)^4-6x^2\cdot(x^2-x+1)^2+5x^4=0.$$

Решение. Полагая $(x^2-x+1)^2=y$, получаем уравнение $y^2-6x^2y+5x^4=0$, квадратное относительно y. Его корни $y_1=x^2$, $y_2=5x^2$. Поэтому искомое уравнение равносильно совокупности двух уравнений $(x^2-x+1)^2=x^2$ и $(x^2-x+1)^2=5x^2$. Первое из этих уравнений в свою очередь равносильно совокупности двух

уравнений $x^2-x+1=x$ и $x^2-x+1=-x$. Решая их, находим $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=\pm i$.

Второе уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x^2-x+1=x\sqrt{5}$ и $x^2-x+1=-x\sqrt{5}$, решая которые, находим

$$x_{5,6}=\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}, \quad x_{7,8}=\frac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}.$$

Если подбором или из других соображений удается найти отдельные корни уравнения, то после выделения уравнения, содержащего уже найденные корни, получаем уравнение более низкой степени.

Пример 8. Решить уравнение

$$2x^6-17x^5+46x^4-36x^3-34x^2+37x+10=0,$$

если $x_1=2-i$ — его корень.

Решение. Данное уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $x_1=2-i$. Следовательно, оно имеет сопряженный комплексный корень $x_2=2+i$, т. е. левая часть уравнения содержит сомножитель $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-4x+5$. Разделив на него левую часть уравнения, получаем для нахождения остальных корней уравнение

$$2x^4-9x^3+9x+2=0.$$

Это кососимметрическое уравнение. Разделив все его члены на x^2, после группировки получаем равносильное уравнение

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x-\frac{1}{x}\right)=0.$$

Подстановкой $x-\frac{1}{x}=y$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=y^2+2$, это уравнение сводится к квадратному уравнению $2y^2-9y+4=0$, корни которого $y_1=4$, $y_2=\frac{1}{2}$.

Теперь из уравнений $x-\frac{1}{x}=4$ и $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ находим

$$x_{3,4}=2\pm\sqrt{5}, \quad x_{5,6}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

III. **Введение нового неизвестного.** При решении уравнений большую роль играет замена выражения, содержащего неизвестное, новым неизвестным, относительно которого уравнение становится более простым. С этим способом мы уже сталкивались при решении двучленных, трехчленных и возвратных уравнений. Выбор замены обусловливается видом уравнения и требует порой большой изобретательности.

Пример 9. Решить уравнение

$$(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35.$$

Решение. I способ. Умножив $3x+2$ на 2 и $x+1$ на 6, а правую часть уравнения на 12, получим равносильное уравнение

$$(6x+5)^2(6x+4)(6x+6)=420.$$

Положив $6x+5=y$, получим для нового неизвестного уравнение

$$y^2(y-1)(y+1)=420 \quad \text{или} \quad y^4-y^2-420=0,$$

корни которого

$$y_{1,2}=\pm\sqrt{21}, \quad y_{3,4}=\pm 2i\sqrt{5}.$$

Теперь из соотношения $x=\frac{y-5}{6}$ имеем

$$x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{21}-5}{6}, \quad x_{3,4}=\frac{\pm 2i\sqrt{5}-5}{6}.$$

II способ. После возведения в квадрат и перемножения двух остальных сомножителей, получим $(36x^2+60x+25)(3x^2+5x+2)=35$. Сделав замену $3x^2+5x+2=y$, получим уравнение $(12y+1)y=35$, из которого находим $y_1=\frac{5}{3}$, $y_2=-\frac{21}{12}$. Теперь из уравнений $3x^2+5x+2=\frac{5}{3}$, $3x^2+5x+2=-\frac{21}{12}$ имеем

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{6}; \quad x_{3,4}=\frac{-5\pm 2i\sqrt{5}}{6}.$$

Иногда введение нового неизвестного становится возможным после выделения полных квадратов.

Пример 10. Решить уравнение

$$(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0.$$

Решение. Очевидно, $x=3$ не является корнем уравнения. Поэтому, разделив обе части уравнения на $(x-3)^2$, получаем равносильное уравнение $x^2-16+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=0$, или $x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=16$. Выделяя в левой части квадрат суммы, имеем

$$\left(x+\frac{3x}{x-3}\right)^2-2x\cdot\frac{3x}{x-3}=16, \text{ или } \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-\frac{6x^2}{x-3}=16.$$

Полагая $\frac{x^2}{x-3}=y$, приходим к уравнению $y^2-6y=16$, корни которого $y_1=8$, $y_2=-2$.

Теперь из уравнений $\frac{x^2}{x-3}=8$ и $\frac{x^2}{x-3}=-2$ находим

$$x_{1,2}=4\pm 2i\sqrt{2}, \quad x_{3,4}=-1\pm\sqrt{7}.$$

При решении отдельных уравнений полезно иметь в виду, что введением нового неизвестного y, можно два двучлена $x+m$ и

$x+n$ одновременно представить в виде

$$\begin{cases} x+m=y+d, \\ x+n=y-d. \end{cases}$$

Действительно, складывая и вычитая эти равенства, имеем

$$2x+m+n=2y \quad \text{и} \quad m-n=2d,$$

т. е.

$$x=y-\frac{m+n}{2}, \quad d=\frac{m-n}{2}.$$

Пример 11. Решить уравнение

$$x^5+(6-x)^5=426.$$

Решение. Положим $x=y+d$, $x-6=y-d$, т. е. $x=y+3$. Тогда получим уравнение $(y+3)^5-(y-3)^5=426$, или $y^4+3y^2+2=0$. Его корни $y_{1,2}=\pm i$, $y_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$. Следовательно, $x_{1,2}=3\pm i$, $x_{3,4}=3\pm i\sqrt{2}$.

Если обе части уравнения являются однородными одной и той же степени однородности относительно двух выражений u и v, содержащих неизвестное (см. гл. II, § 2), то уравнение называют *однородным относительно* u и v. Такие уравнения удобно решать, если положить $u=tv$, где t — новое неизвестное.

Пример 12. Решить уравнение

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} \quad (ab\neq 0).$$

Решение. Это однородное уравнение относительно $u=\frac{x+a}{x+b}$ и $v=\frac{x-a}{x-b}$. Полагая $\frac{x+a}{x+b}=t\cdot\frac{x-a}{x-b}$, после подстановки получаем уравнение

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2(1+t^2)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)t\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2.$$

Если $\frac{x-a}{x-b}=0$, то также $\frac{x+a}{x+b}=0$, т. е. одновременно и $x=a$, $x=-a$, что невозможно, так как $a\neq 0$. Поэтому последнее уравнение равносильно уравнению $1+t^2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)t$, корни которого $t_1=\frac{a}{b}$, $t_2=\frac{b}{a}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\frac{x+a}{x+b}=\frac{a}{b}\frac{x-a}{x-b} \quad \text{и} \quad \frac{x+a}{x+b}=\frac{b}{a}\frac{x-a}{x-b},$$

или $(a-b)[x^2+(a+b)x-ab]=0$ и $(a-b)[x^2-(a+b)x-ab]=0$ при условии, что $x\neq\pm b$. Отсюда следует, что если $a=b$, то $x-$

любое, кроме уже исключенных $\pm b$. Если $a \neq b$, то имеем совокупность уравнений

$$x^2+(a+b)x-ab=0, \quad x^2-(a+b)x-ab=0 \quad (x \neq \pm b).$$

Подстановкой в эти уравнения $x=\pm b$ найдем, что ограничение $x \neq \pm b$ равносильно имеющемуся уже условию $ab \neq 0$. Решая эти уравнения, получим

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}(a+b \pm \sqrt{a^2+6ab+b^2}),$$

$$x_{3,4}=\frac{1}{2}(a+b \pm \sqrt{a^2+6ab+b^2}) \quad (a \neq b).$$

§ 2. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В этом параграфе рассмотрим примеры рациональных систем и некоторые методы их решения.

I. Одним из наиболее простых и естественных приемов решения систем является *метод подстановки* или *исключения неизвестных*, основанный на использовании свойства V (гл. III, § 3).

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x+xy+y=5, \\ y+yz+z=11, \\ z+zx+x=7. \end{cases}$$

Решение. В данном случае любое из неизвестных в каждом из уравнений рационально выражается через два остальных. Здесь можно, например, выразить из первого уравнения x через y, а из второго z через y. Имеем $x=\frac{5-y}{y+1}$ (очевидно, $y \neq -1$), $z=\frac{11-y}{y+1}$. Подставляя эти значения x и z в третье уравнение, получаем одно уравнение с одним неизвестным

$$\frac{11-y}{y+1}+\frac{(11-y)(5-y)}{(y+1)^2}+\frac{5-y}{y+1}=7,$$

или, после упрощения, $y^2+2y-8=0$. Найдя его корни $y_1=2$ и $y_2=-4$, согласно формулам $z=\frac{11-y}{y+1}$ и $x=\frac{5-y}{y+1}$ находим $z_1=3$ и $z_2=-5$, $x_1=1$ и $x_2=-3$.

Итак, система имеет два решения (1; 2; 3) и (—3; —4; —5).

В некоторых случаях целесообразно выражать комбинации неизвестных через другие неизвестные.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz. \end{cases}$$

Решение. Перепишем второе уравнение в виде

$$(x+z)^2+y^2-2xz=91. \qquad (*)$$

Из первого уравнения находим, что $x+z=13-y$, а из третьего $xz=y^2$. Следовательно, уравнение (*) сводится к уравнению $(13-y)^2+y^2-2y^2=91$, корень которого равен 3, т. е. $y=3$.

Теперь из системы

$$\begin{cases} x+z=13-y, \\ xz=y^2, \end{cases}$$

где $y=3$, находим $x_1=1$, $z_1=9$ и $x_2=9$, $z_2=1$.

Итак, данная система имеет два решения (1; 3; 9) и (9; 3; 1).

В следующем примере прежде чем производить подстановку, выгодно присоединить к данному уравнению новое уравнение — следствие данных уравнений.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 3x=\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}, \\ 4y=\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}, \\ 5z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Решение. После приведения к общему знаменателю получаем систему

$$\begin{cases} y^2+z^2=3xyz, \\ z^2+x^2=4xyz, \\ x^2+y^2=5xyz, \end{cases} \qquad (*)$$

равносильную данной, при условии, что $xyz\neq 0$. Сложив правые и левые части всех уравнений системы (*), получим уравнение-следствие

$$x^2+y^2+z^2=6xyz.$$

Подставляя в него последовательно значения y^2+z^2, z^2+x^2 и x^2+y^2, выраженные из системы (*), получаем систему

$$\begin{cases} x^2=3xyz, \\ y^2=2xyz, \\ z^2=xyz, \end{cases} \qquad (**)$$

откуда перемножением всех уравнений получаем уравнение-следствие $x^2y^2z^2=6x^3y^3z^3$, или $xyz=\dfrac{1}{6}$ $(xyz\neq 0)$.

Теперь из системы (**), подставляя в правые части уравнений $xyz=\dfrac{1}{6}$, находим, что $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $y=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $z=\pm\sqrt{\dfrac{1}{6}}$.

Комбинируя знаки $\pm$ в соответствии с условием $xyz=\frac{1}{6}>0$, получаем все решения данной системы:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

II. В практике решения систем уравнений широко применяется следующий способ: из данной системы получают, как следствие, новую систему, отдельные уравнения которой получаются из уравнений исходной системы путем их различных комбинаций — сложения, вычитания, умножения, деления и т. д.

Эти комбинации подбираются так, чтобы в результате новая система уже решалась бы известным методом.

При этом нужно тщательно следить за сохранением равносильности.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x^3=5x+y, \\ y^3=x+5y. \end{cases}$$

Решение. Складывая и вычитая уравнения данной системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} x^3+y^3=6(x+y), \\ x^3-y^3=4(x-y). \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы равносильно совокупности двух уравнений $x+y=0$ и $x^2-xy+y^2=6$, а второе уравнение равносильно совокупности $x-y=0$ и $x^2+xy+y^2=4$. Комбинируя уравнения первой пары со второй, находим, что данная система равносильна совокупности четырех систем

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0, \\ x^2+xy+y^2=4, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=6, \\ x-y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=6, \\ x^2+xy+y^2=4, \end{cases}$$

решая которые, находим все решения данной системы:

$$(0;\ 0),\ (2;\ -2)(-2;\ 2),\ (\pm\sqrt{6};\ \pm\sqrt{6}),$$
$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\ \pm\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\ \pm\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right).$$

(знаки берутся соответственно).

III. Иногда введением новых неизвестных удается свести заданную систему либо к более простой, либо к такой, методы решения которой известны.

Рассмотрим три типа систем, допускающих стандартные замены.

1. Система называется *симметричной*, если каждое ее уравнение симметрично относительно неизвестных. При решении систем, симметричных относительно неизвестных x и y, часто оказывается полезным введение новых неизвестных u и v по формулам

$$x+y=u, \quad xy=v.$$

При этом следует иметь в виду, что

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v,$$
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=u^3-3uv,$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2$$

и т. д.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10, \\ (x+y)(xy-1)=3. \end{cases}$$

Решение. Данная система симметрична относительно x и y. Переписав ее в виде

$$\begin{cases} x^2+y^2+x^2y^2+1=10, \\ (x+y)xy-(x+y)=3 \end{cases}$$

и полагая $x+y=u$ и $xy=v$ (тогда $x^2+y^2=u^2-2v$), имеем

$$\begin{cases} u^2+v^2-2v+1=10, \\ uv-u=3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u^2+(v-1)^2=10, \\ u(v-1)=3. \end{cases}$$

Эту систему удобно решать относительно u и $v-1$. Решив ее, найдем $u_1=3$, $v_1=2$; $u_2=-3$; $v_2=0$; $u_3=1$, $v_3=4$; $u_4=-1$, $v_4=-2$.

Теперь из систем

$$\begin{cases} x+y=u_k, \\ xy=v_k, \end{cases}$$

где $k=1, 2, 3, 4$, получаем все решения данной системы:

$$(2;\ 1),\ (1;\ 2),\ (-3;\ 0),\ (0;\ -3),\ \left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2};\ \frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1-i\sqrt{15}}{2};\ \frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right),\ (-2;\ 1),\ (1;\ -2).$$

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} x^4+y^4=34, \\ x+y=2. \end{cases}$$

Решение. Полагая $x+y=u$ и $xy=v$, получаем систему

$$\begin{cases} (u^2-2v)^2-2v^2=34, \\ u=2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (4-2v)^2-2v^2=34, \\ u=2, \end{cases}$$

откуда находим $u_1=2$, $v_1=9$ и $u_2=2$, $v_2=-1$.

Решая системы

$$\begin{cases} x+y=u_k, \\ xy=v_k, \end{cases}$$

где $k=1$, 2, получаем все решения данной системы:

$$(1+2i\sqrt{2};\ 1-2i\sqrt{2}),\ (1-2i\sqrt{2};\ 1+2i\sqrt{2}),$$
$$(1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2}),\ (1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}).$$

2. Если в уравнения системы неизвестные x и y входят лишь в виде комбинаций xy, $x-y$, x^2+y^2, x^3-y^3, x^4+y^4 и т. д., то удобной для решения часто оказывается замена

$$x-y=u, \quad xy=v.$$

Тогда

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=u^2+2v,$$
$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=u^2+3uv,$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2+2v)^2-2v^2$$

и т. д.

Пример 7.

$$\begin{cases} 8(x^2+xy+y^2)=(x-y)^3, \\ 2(x^2-xy+y^2)=3(x-y). \end{cases}$$

Решение. Полагая $x-y=u$, $xy=v$, получим систему

$$\begin{cases} 8(u^2+3v)=u^3, \\ 2(u^2+v)=3u. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем v через u:

$$v=\frac{3u-2u^2}{2}.$$

Подставляя этот результат в первое уравнение, получаем уравнение

$$u^3+16u^2-36u=0,$$

корни которого $u_1=0$; $u_2=2$; $u_3=-18$.

Далее находим $v_1=0$, $v_2=-1$, $v_3=-351$. Решая теперь системы

$$\begin{cases} x-y=u_k, \\ xy=v_k, \end{cases}$$

где $k=1, 2, 3$, находим все решения данной системы:

$$(0;\ 0),\ (1;\ -1),\ (-9+3i\sqrt{30};\ 9+3i\sqrt{30}),$$
$$(-9-3i\sqrt{30};\ 9-3i\sqrt{30}).$$

3. Система вида

$$\begin{cases} A(x,\ y)=a, \\ B(x,\ y)=b, \end{cases}$$

где a и b—числа, а $A(x, y)$ и $B(x, y)$—однородные выражения одинаковой степени однородности относительно x и y (см. гл. II, § 2), часто упрощается, если ввести новое неизвестное t, связанное с x и y соотношением

$$y=tx.$$

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y}+xy=1, \\ \frac{y^3}{x}+xy=4. \end{cases}$$

Решение. Левые части системы—однородные выражения второй степени относительно x и y. Полагая $y=tx$, имеем

$$\begin{cases} \frac{x^3}{tx}+tx^2=1, \\ \frac{x^3t^3}{x}+tx^2=4. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} \frac{x^2(t^2+1)}{t}=1, \\ x^2t(t^2+1)=4. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое (делитель не равен нулю), получаем $t^2=4$ и $t_{1,2}=\pm 2$.

Если $t=2$, то $x^2=\frac{2}{5}$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ и $y_{1,2}=\pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Если $t=-2$, то $x^2=-\frac{2}{5}$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{\frac{2}{5}}$ и $y_{3,4}=\mp 2i\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Итак, данная система имеет четыре решения:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}};\ 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{2}{5}};\ -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right),$$
$$\left(i\sqrt{\frac{2}{5}};\ -2i\sqrt{\frac{2}{5}}\right),\ \left(-i\sqrt{\frac{2}{5}};\ 2i\sqrt{\frac{2}{5}}\right).$$

Аналогичным приемом иногда можно решать и системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-(y-z)^2=1, \\ y^2-(z-x)^2=4, \\ z^2-(x-y)^2=9. \end{cases}$$

Решение. Полагая $y=ux$, $z=vx$, где u и v — новые неизвестные, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^2-x^2(u-v)^2=1, \\ u^2x^2-x^2(u-1)^2=4, \\ v^2x^2-x^2(1-u)^2=9, \end{cases} \quad (A) \text{ или } \begin{cases} 1-(u-v)^2=\frac{1}{x^2}, \\ u^2-(v-1)^2=\frac{4}{x^2}, \\ v^2-(1-u)^2=\frac{9}{x^2} \end{cases}$$

($x\neq 0$, так как при $x=0$ второе и третье уравнения данной системы несовместны).

Из последней системы трех уравнений получаем систему двух уравнений для определения u и v:

$$\begin{cases} 4[1-(u-v)^2]=u^2-(v-1)^2, \\ 9[1-(u-v)^2]=v^2-(1-u)^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4(1-u+v)(1+u-v)=(u-v+1)(u+v-1), \\ 9(1-u+v)(1+u-v)=(v-1+u)(v+1-u), \end{cases}$$

которая в свою очередь равносильна совокупности четырех систем

$$\begin{cases} 4(1-u+v)=u+v-1, \\ v-1+u=9(1+u-v) \end{cases} \text{(I)}; \quad \begin{cases} 4(1-u+v)=u+v-1, \\ 1-u+v=0 \end{cases} \text{(II)};$$

$$\begin{cases} 1+u-v=0, \\ v-1+u=9(1+u-v) \end{cases} \text{(III)}; \quad \begin{cases} 1+u-v=0, \\ 1-u+v=0 \end{cases} \text{(IV)}.$$

Решая каждую из этих систем, находим

$u=\frac{40}{13}$, $v=\frac{45}{13}$ (I); $u=1$, $v=0$ (II); $u=0$, $v=1$ (III);

система (IV) несовместна.

Если $u=\frac{40}{13}$, $v=\frac{45}{13}$, то $x^2=\frac{169}{144}$, $x_{1,2}=\pm\frac{13}{12}$, $y_{1,2}=\pm\frac{10}{3}$, $z_{1,2}=\pm\frac{15}{4}$.

Если $u=1$ и $v=0$, то любое уравнение системы (A) противоречиво.

То же самое — в случае $u=0$, $v=1$.

Итак, данная система имеет два решения

$$\left(\frac{13}{12};\ \frac{10}{3};\ \frac{15}{4}\right) \text{ и } \left(-\frac{13}{12};\ -\frac{10}{3};\ -\frac{15}{4}\right).$$

Заметим, что эту систему целесообразней решать другим способом. Приведем его.

Раскладывая левые части уравнений на множители, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z)=1, \\ (y-z+x)(y+z-x)=4, \\ (z-x+y)(z+x-y)=9. \end{cases} \qquad (B)$$

Присоединим к этим уравнениям уравнение-следствие, получающееся от перемножения всех уравнений системы (B):

$$(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)=\pm 6.$$

Теперь, используя уравнения системы (B), получаем, что исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} -x+y+z=6, \\ x-y+z=\frac{3}{2}, \\ x+y-z=\frac{2}{3} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -x+y+z=-6, \\ x-y+z=-\frac{3}{2}, \\ x+y-z=-\frac{2}{3}, \end{cases}$$

решая которые, находим все решения исходной системы:

$$\left(\frac{13}{12};\ \frac{10}{3};\ \frac{15}{4}\right) \text{ и } \left(-\frac{13}{12};\ -\frac{10}{3};\ -\frac{15}{4}\right).$$

В общем случае подбор новых неизвестных — задача трудная и требует определенных навыков.

Приведем примеры некоторых других замен неизвестных.

Пример 10. Решить систему

$$\begin{cases} y^2(x^2-3)+xy+1=0, \\ y^2(3x^2-6)+xy+2=0. \end{cases}$$

Решение. Полагая $xy=u$, $y^2=v$, имеем

$$\begin{cases} u^2-3v+u+1=0, \\ 3u^2-6v+u+2=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $u_1=0$, $v_1=\frac{1}{3}$ и $u_2=1$, $v_2=1$. Для нахождения x и y решаем две системы

$$\begin{cases} xy=0, \\ y^2=\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} xy=1, \\ y^2=1 \end{cases}$$

и получаем все решения заданной системы: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(0;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, (1; 1), (—1; —1).

Пример 11. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{5xy}{x+y}=12, \\ \frac{5yz}{y+z}=18, \\ \frac{13xz}{x+z}=36. \end{cases}$$

Решение. Данная система однородна. Однако целесообразно решить ее следующим способом:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=\frac{5}{12}, \\ \frac{y+z}{yz}=\frac{5}{18}, \\ \frac{x+z}{xz}=\frac{13}{36}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{18}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{13}{36}. \end{cases}$$

Полагая $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$, $w=\frac{1}{z}$, имеем систему

$$\begin{cases} u+v=\frac{5}{12}, \\ v+w=\frac{5}{18}, \\ u+w=\frac{13}{36}, \end{cases}$$

решая которую, находим $u=\frac{1}{4}$, $v=\frac{1}{6}$, $w=\frac{1}{9}$. Следовательно, $x=4$, $y=6$, $z=9$.

В некоторых случаях полезно ввести новое вспомогательное неизвестное, через которое легко выражаются основные неизвестные. При этом число уравнений и неизвестных может увеличиться.

Пример 12. Решить систему

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{x+y+1}=\frac{z}{x+y-1}=x+y+z.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное t, полагая $t=x+y+z$. Тогда данная система запишется в виде

$$\begin{cases} x+y+z=t, \\ \dfrac{x}{y+z}=t, \\ \dfrac{y}{x+y+1}=t, \\ \dfrac{z}{x+y-1}=t. \end{cases} \qquad (*)$$

Так как $y+z=t-x$, $x+y=t-z$, то можно записать

$$\begin{cases} x+y+z=t, \\ \dfrac{x}{t-x}=t, \\ \dfrac{y}{t-z+1}=t, \\ \dfrac{z}{t-z-1}=t. \end{cases} \qquad (A)$$

Используя второе и четвертое уравнения системы (A), выразим x и z через t. Имеем $x=\frac{t^2}{t+1}$, $z=\frac{t^2-t}{t+1}$ (при условии $x\neq t$ и $z\neq t-1$, что равносильно условию $t\neq 0$ и $t\neq 1$). Теперь из третьего уравнения системы (A) выразим y через t.

Имеем

$$y=t^2-tz+t=\frac{3t^2+t}{t+1}$$

$\left(\text{при условии } z\neq t+1, \text{ что равносильно условию } t\neq -\frac{1}{3}\right)$.

Подставляя в первое уравнение значения x, y и z, выраженные через t, получаем уравнение для определения t:

$$\frac{t^2}{t+1}+\frac{3t^2+t}{t+1}+\frac{t^2-t}{t+1}=t,$$

откуда $t=\frac{1}{4}$ (значение $t=0$ не годится). Подставляя найденное значение t в выражения для x, y и z, находим единственное решение системы $x=\frac{1}{20}$, $y=\frac{7}{20}$, $z=-\frac{3}{20}$.

§ 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение называется *иррациональным*, если над неизвестными в этом уравнении наряду с другими операциями совершается операция извлечения корня.

Иррациональные уравнения в элементарной алгебре рассматриваются лишь на множестве действительных чисел.

Радикалы четной степени, входящие в уравнение, понимаются в арифметическом смысле (см. гл. I, § 4), а у радикалов нечетной степени рассматривается их единственное действительное значение (см. там же). Поэтому, например, уравнение $\sqrt{x^3-x-1}+\sqrt[4]{2x+1}=-2$ не имеет решений, так как при любом допустимом значении x левая часть уравнения неотрицательна, а его правая часть отрицательная.

При решении уравнений, содержащих радикалы четных степеней, полезно предварительно найти множество допустимых значений этого уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{1-x}.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения есть решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+x-6\geqslant 0, \\ 2x+3\geqslant 0, \\ 1-x\geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система, как легко убедиться, противоречива и, следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Иногда к множеству допустимых значений уравнения полезно присоединить условие совпадения знаков обеих частей уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=3+x^2.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения есть решение системы

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0, \\ 2x-1\geqslant 0. \end{cases} \qquad (A)$$

Замечая, что правая часть уравнения при любом допустимом значении x положительна, присоединяем к системе (A) еще одно условие $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}>0$, или $x-5>2x-1$. Таким образом, решение данного уравнения должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0, \\ 2x-1\geqslant 0, \\ x-5>2x-1, \end{cases}$$

которая, как легко проверить, противоречива. Следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Одним из стандартных приемов решения иррациональных уравнений является освобождение от радикалов путем последовательного возведения обеих частей уравнения в соответствующую степень.

При решении уравнений этим приемом надо предварительно указать множество допустимых значений исходного уравнения и иметь в виду следующие свойства уравнений, рассматриваемых на множестве действительных чисел.

При возведении обеих частей уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному; при возведении обеих частей уравнения в четную степень получается уравнение, равносильное исходному при условии, что его решения удовлетворяют условию совпадения знаков обеих частей исходного уравнения.

Действительно, из равенства $A=B$ следуют равенства

$$A^{2n+1}=B^{2n+1} \quad \text{и} \quad A^{2n}=B^{2n}.$$

Обратно, из равенства $A^{2n+1}=B^{2n+1}$ на множестве действительных чисел следует единственное равенство $\sqrt[2n+1]{A^{2n+1}}=\sqrt[2n+1]{B^{2n+1}}$, или $A=B$. Из равенства $A^{2n}=B^{2n}$ следует равенство $\sqrt[2n]{A^{2n}}=\sqrt[2n]{B^{2n}}$, или $|A|=|B|$. Если при этом $AB\geqslant 0$, то из последнего равенства вытекает, что $A=B$ (так как случай $A=-B$ не удовлетворяет условию $AB>0$).

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-1}.$$

Решение. Решив систему

$$\begin{cases} 2x-3\geqslant 0, \\ x+5\geqslant 0, \\ 4x-1\geqslant 0, \end{cases}$$

найдем, что множество допустимых значений уравнения есть промежуток $x\geqslant\frac{3}{2}$.

Возводя обе части данного уравнения в квадрат, получаем уравнение

$$3-x=2\sqrt{2x^2+7x-15}, \qquad (A)$$

равносильное данному, при условии, что $\sqrt{x+5}>\sqrt{2x-3}$, т. е. $x<8$. Вновь возведя в квадрат обе части уравнения (A), получаем уравнение

$$7x^2+34x-69=0, \qquad (B)$$

равносильное уравнению (A) при условии, что $3-x\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant 3$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению (B) при условии, что одновременно $x\geqslant\frac{3}{2}$, $x<8$, $x\leqslant 3$, т. е. на промежутке $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3$. Решая квадратное уравнение (B), находим, что $x_{1,2}=$

$= \frac{-17 \pm \sqrt{772}}{7}$, причем $x = \frac{-17-\sqrt{772}}{7}$ не лежит в промежутке $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$, а $\frac{3}{2} < \frac{-17+\sqrt{772}}{7} < 3$. Следовательно, $x = \frac{-17+\sqrt{772}}{7} = \frac{-17+2\sqrt{193}}{7}$ — единственный корень данного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}.$$

Решение. Корни уравнения должны удовлетворять условиям $x > 0$ и $x^2 > 1$, т. е. $x > 1$. Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получим уравнение

$$x^2 + \frac{x^2}{x^2-1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1225}{144},$$

или

$$\frac{x^4}{x^2-1} + 2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1225}{144},$$

равносильное данному при условии, что $x > 1$. Это квадратное уравнение относительно $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > 0$. Решив его, получим, что $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{25}{12}$ $\left(\text{случай } \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = -\frac{49}{12} \text{ — не годится}\right)$. Записав последнее уравнение в виде $12(x^2-1) - 25\sqrt{x^2-1} + 12 = 0$ и решив его как квадратное относительно $\sqrt{x^2-1} > 0$, найдем, что оно равносильно совокупности двух уравнений

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{4}{3} \text{ и } \sqrt{x^2-1} = \frac{3}{4}.$$

Решив эти уравнения, найдем $x_1 = \frac{5}{3}$ и $x_2 = \frac{5}{4}$ $\left(\text{значения } x = -\frac{5}{3} \text{ и } x = -\frac{5}{4} \text{ не годятся}\right)$.

Прежде чем возводить обе части уравнения в степень, надо по возможности упростить данное уравнение.

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} = \sqrt{x^2-1}.$$

Решение. Очевидно, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \neq 0$. Поэтому, умножив числитель и знаменатель левой части уравнения на это выражение, получим равносильное уравнение

$$\frac{x+1-(x-1)+2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{x+1-(x-1)} = \sqrt{x^2-1},$$

или

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-1}-1.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2=(\sqrt{x^2-1}-1)^2$$
$$(x+1\geqslant 0,\ x-1\geqslant 0,\ \sqrt{x^2-1}\geqslant 1),$$

или $2x=x^2$ $(x\geqslant\sqrt{2})$, откуда имеем $x=2$ $(x=0<\sqrt{2}$—не годится).

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\frac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\frac{64}{3}\sqrt[7]{x}.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения $x\neq 0$. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{12+x}{12x}\sqrt[7]{12+x}=\frac{64}{3}\sqrt[7]{x},$$

или

$$(12+x)\sqrt[7]{12+x}=2^6x\sqrt[7]{x}.$$

Возведя обе части уравнения в седьмую степень, получим равносильное уравнение $(12+x)^7=2^{56}x^7$, которое на множестве действительных чисел равносильно совокупности двух уравнений

$$12+x=2^7x \text{ и } 12+x=-2^7x.$$

Решив их, найдем, что $x_1=\frac{12}{127}$ и $x_2=-\frac{12}{129}$.

В отдельных примерах при возведении в степень удобно пользоваться формулами возведения в степень в преобразованном виде.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}.$$

Решение. Возведя обе части уравнения в куб согласно тождеству $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, получим равносильное уравнение

$$(x+1)-(x-1)-3\sqrt[3]{x^2-1}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})=\sqrt{x^2-1}.$$

Учитывая, что $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$, после очевидных преобразований получим уравнение-следствие

$$2\sqrt{x^2-1}=1,$$

откуда найдем, что $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Вопрос о пригодности найденных значений x можно решить непосредственной проверкой, для чего достаточно заметить, что $\sqrt{5}+2=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3$, а $\sqrt{5}-2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$. В других случаях проверка может оказаться очень затруднительной. Тогда надо решать вопрос

о сохранении равносильности в процессе решения. В нашем случае уравнение $A-B=C$, где $A=\sqrt[3]{x+1}$, $B=\sqrt[3]{x-1}$, $C=\sqrt[6]{x^2-1}$, мы заменили уравнением-следствием

$$A^3-B^3-3ABC=C^3.$$

Преобразуем его. Имеем

$$(A-B)^3+3AB(A-B)-3ABC-C^3=0,$$

или

$$[(A-B)-C]\,[(A-B)^2+(A-B)C+C^2+3AB]=0,$$

или

$$[(A-B)-C]\cdot\left[\left(\frac{A-B}{2}+C\right)^2+\frac{3}{4}(A+B)^2\right]=0.$$

Следовательно, уравнение-следствие, рассматриваемое на множестве действительных чисел, равносильно совокупности уравнений

$$A-B=C \text{ и } \left(\frac{A-B}{2}+C\right)^2+\frac{3}{4}(A+B)^2=0.$$

Последнее из них равносильно системе

$$\begin{cases} A+B=0, \\ \frac{A-B}{2}+C=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A=-B, \\ C=B. \end{cases}$$

В нашем примере это система

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1}=-\sqrt[3]{x-1}, \\ \sqrt{x^2-1}=\sqrt[3]{x-1}, \end{cases}$$

которая не имеет решений.

Таким образом, среди найденных значений $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ нет посторонних корней.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{x+1}.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения —промежуток $x\geqslant 1$. Перепишем уравнение в виде $\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{x}$, или

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=1. \qquad (*)$$

Очевидно, тождество $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ можно переписать в виде

$$(a-b)^4=a^4+b^4-4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2,$$

или

$$(a-b)^4=a^4+b^4-4ab[(a-b)^2+2ab]+6a^2b^2,$$

или

$$(a-b)^4=a^4+b^4-4ab\,(a-b)^2-2a^2b^2.$$

Возведя обе части уравнения (*) в четвертую степень согласно приведенному тождеству, получим равносильное уравнение

$$1+\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x}-4\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)^2-$$
$$-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Заменяя выражение в скобках единицей, после упрощения имеем уравнение-следствие

$$2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+4\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Это квадратное уравнение относительно $\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$. Решив его, найдем, что $\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$ (случай $\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}$ не годится).

Возведя обе части последнего уравнения в четвертую степень, имеем равносильное уравнение

$$x^2=\frac{4}{20\sqrt{6}-45},\quad \text{или}\quad x^2=\frac{4(4\sqrt{6}+9)}{75},$$

из которого находим, что исходное уравнение имеет единственный корень $x_1=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{4\sqrt{6}+9}{3}}$ ($x_2<0$ не удовлетворяет условию $x\geqslant 1$).

Решим вопрос о его пригодности.

В процессе решения равносильность могла быть нарушена лишь при переходе от данного уравнения

$$A-B=C,$$

где $A=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}$, $B=\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}$, $C=1$, к уравнению-следствию

$$A^4+B^4-4ABC^2-2A^2B^2=C^4,$$

которое равносильно уравнению

$$C^4+4ABC^2-(A^4+B^4)+2A^2B^2=0,$$

или

$$(C^2+2AB)^2-(A^2+B^2)^2=0,$$

или

$$(A^2+B^2+2AB+C^2)(A^2+B^2-2AB-C^2)=0,$$

или

$$[(A-B)-C]\,[(A-B)+C]\,[(A+B)^2+C^2]=0.$$

Таким образом, уравнение-следствие, рассматриваемое на множестве действительных чисел, равносильно следующей совокупности:

исходное уравнение

$$A-B=C, \tag{а}$$

уравнение

$$A-B=-C \tag{б}$$

и система уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0. \end{cases} \tag{в}$$

В нашем случае $A>B$ и $C=1$ и, следовательно, найденное значение x является единственным корнем исходного уравнения.

Другим основным приемом решения иррациональных уравнений является *способ введения новых неизвестных*, относительно которых получается либо более простое иррациональное уравнение, либо рациональное.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{7}{x+2}\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}.$$

Решение. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то необходимо, чтобы $x+2>0$, а следовательно, и $x+3>0$, $x-5\geqslant 0$, $x-4\geqslant 0$, что равносильно одному условию $x\geqslant 5$. Учитывая это, запишем данное уравнение в виде

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+2}}+\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+3}}=\frac{7}{\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+3}}.$$

После приведения к общему знаменателю получим уравнение

$$\sqrt{x^2-2x-15}+\sqrt{x^2-2x-8}=7.$$

Положив $x^2-2x-8=y$, получим относительно y уравнение

$$\sqrt{y-7}+\sqrt{y}=7 \text{ или } \sqrt{y-7}=7-\sqrt{y},$$

или

$$y-7=49-14\sqrt{y}+y \quad (7\leqslant y\leqslant 49).$$

Отсюда находим, что $y=16$.

Теперь из уравнения $x^2-2x-8=16$ имеем $x=6$ ($x=-4<5$ — не годится).

Пример 10. Решить уравнение

$$(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}+(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}=2.$$

Решение. Положив $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=y\neq 0$, после подстановки получим уравнение $(3-x)y+\frac{x-1}{y}=2$, или $(3-x)y^2-2y+x-1=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно y, найдем, что $y=1$ и $y=\frac{x-1}{3-x}$. Следовательно, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\frac{3-x}{x-1}=1$ и $\frac{3-x}{x-1}=\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^3$, каждое из которых имеет единственный корень $x=2$.

Пример 11. Решить уравнение

$$\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^nx^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^{n^2}x^n}}=b,$$

где n—натуральное и $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $x\geqslant 0$.

Решение. Положим $\sqrt[n+1]{x^n}=y\geqslant 0$; $\sqrt[n+1]{a^n}=c$ и тем самым $x^n=y^{n+1}$, а $a^n=c^{n+1}$. После подстановки получим уравнение

$$\sqrt[n]{y^{n+1}+cy^n}+\sqrt[n]{c^{n+1}+c^ny}=b,$$

или $(y+c)\sqrt[n]{y+c}=b$, которое равносильно уравнению $(y+c)^{n+1}=b^n$. Это уравнение в свою очередь равносильно уравнению $y+c=b^{\frac{n}{n+1}}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt[n+1]{x^n}=b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}$. Так как левая часть неотрицательна, то должно быть $b\geqslant a$ и тогда получаем единственный корень $x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$.

В случае $b<a$ уравнение противоречиво.

Иногда при решении иррациональных уравнений бывает полезна *тригонометрическая замена.*

Пример 12. Решить уравнение

$$x+\frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{2}.$$

Решение. Очевидно, что $x>0$. Положим $x=\sqrt{2}\operatorname{tg}t$, где $0<t<\frac{\pi}{2}$. Сделав эту подстановку, получим тригонометрическое уравнение

$$\sqrt{2}\operatorname{tg}t+\frac{2\sqrt{2}\operatorname{tg}t}{\sqrt{2}\sec t}=\sqrt{2},\text{ или }\sqrt{2}(\cos t-\sin t)=\sin 2t.$$

В указанных пределах изменения t, очевидно, $\sin 2t>0$. Поэтому должно быть $\cos t-\sin t>0$, т. е. $\operatorname{tg}t<1$. После возведения в квадрат при указанных ограничениях на $\operatorname{tg}t$ получим равносильное уравнение $2(1-\sin 2t)=\sin^2 2t$, решив которое, найдем, что $\sin 2t_1=\sqrt{3}-1$ и $\sin 2t_2=-\sqrt{3}-1$. Очевидно, $0<\sin 2t_1<1$, а $\sin 2t_2<$

< -1 и поэтому не имеет смысла. Так как $\sin 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$, то из уравнения $\frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{3}-1$ находим, что $\operatorname{tg} t_1 = \frac{1+\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$ и $\operatorname{tg} t_2 = \frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$. Легко убедиться, что $\operatorname{tg} t_1 > 1$, а $0 < \operatorname{tg} t_2 < 1$. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x = \sqrt{2}\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$.

В принципе любое иррациональное уравнение путем введения нескольких новых вспомогательных неизвестных можно заменить равносильной рациональной системой. Но к этому приему следует прибегать лишь в случае, когда получающаяся рациональная система может быть решена известными приемами.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

Решение. Положив $\sqrt[3]{2-x} = y$, $\sqrt{x-1} = z \geqslant 0$, получаем равносильную рациональную систему

$$\begin{cases} 2-x = y^3, \\ x-1 = z^2, \\ y = 1-z. \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения x ($x = 1+z^2$), взяв из третьего уравнения y ($y = 1-z$) и подставляя их в первое, получаем уравнение $1-z^2 = (1-z)^3$, решив которое, найдем, что $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 3$. Все эти значения z удовлетворяют условию $z \geqslant 0$ и, следовательно, годятся.

Теперь из соотношения $x = 1+z^2$ находим корни данного уравнения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 10$.

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x.$$

Решение. Положив $\sqrt{a+x} = y \geqslant 0$, получим иррациональную систему

$$\begin{cases} \sqrt{a+x} = y \geqslant 0, \\ \sqrt{a-y} = x \geqslant 0, \end{cases}$$

которая равносильна при этих ограничениях на x, y рациональной системе

$$\begin{cases} a+x = y^2, \\ a-y = x^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x+y=y^2-x^2, \\ a-y=x^2, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+y=0, \\ a-y=x^2 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} y-x=1, \\ a-y=x^2. \end{cases} \quad (2)$$

Из первого уравнения системы (1) в силу условия $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ следует, что $x=y=0$, и значит, $a=0$.

Решив систему (2), находим, что

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}, \quad x_2=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}.$$

Учитывая ограничение $x \geqslant 0$, окончательно получаем: если $a=0$, то уравнение имеет единственный корень $x=0$; если $a \geqslant 1$, то уравнение также имеет единственный корень $x=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$. Для остальных значений параметра a уравнение не имеет решений.

§ 4. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Если в любом иррациональном уравнении заменить знак равенства на один из знаков неравенства: $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$, то получим иррациональное неравенство. Обычно решение иррационального неравенства сводят к решению равносильной ему совокупности рациональных систем неравенств. Эти системы получаются при наложении ограничений на неизвестное и возведение неравенства в степень. При возведении в степень используют соответствующие свойства неравенств (см. гл. II, § 7).

Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x-10} > x-2.$$

Решение. Множество допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию

$$x^2-3x-10 \geqslant 0. \quad (*)$$

Если при этом $x-2<0$, то данное неравенство, очевидно, будет справедливо для всех x, удовлетворяющих неравенству (*). Если же $x-2 \geqslant 0$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2-3x-10>(x-2)^2$ при условии (*).

Таким образом, данное неравенство равносильно совокупности двух рациональных систем неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x-10\geqslant 0, \\ x-2<0 \end{cases} \quad (A) \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-3x-10\geqslant 0, \\ x-2\geqslant 0. \\ x^2-3x-10>(x-2)^2. \end{cases} \quad (B)$$

Решив эти системы (см. гл. III, § 14), найдем решения искомого неравенства $x\leqslant -2$, $x>14$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+1}<\frac{2(x+1)}{2-x}.$$

Решение. Очевидно, решение неравенства должно удовлетворять условиям $2x+1\geqslant 0$ и $\frac{2(x+1)}{2-x}>0$ $\left(\text{если } \frac{2(x+1)}{2-x}\leqslant 0, \text{ то неравенство противоречиво}\right)$. При этих условиях данное неравенство равносильно неравенству $2x+1<\frac{4(x+1)^2}{(2-x)^2}$, которое после упрощений приводит к неравенству $x(2x^2-11x-4)<0$.

Таким образом, данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+1\geqslant 0, \\ \frac{x+1}{2-x}>0, \\ x(2x^2-11x-4)<0, \end{cases}$$

решив которую, получим его решение: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{11-\sqrt{153}}{4}\right]$ $(0, 2)$.

При решении иррациональных неравенств, как и при решении иррациональных уравнений, иногда полезно ввести новые вспомогательные неизвестные.

Пример 3. Решить неравенство

$$x^2+\sqrt{x^2-3x+5}>3x+7.$$

Решение. Положив $\sqrt{x^2-3x+5}=y\geqslant 0$ и тем самым $x^2-3x=y^2-5$, получим неравенство $y^2+y-12>0$, решение которого $y>3$ ($y<-4$ не годится, так как противоречит условию $y\geqslant 0$). Следовательно, данное неравенство равносильно неравенству $x^2-3x+5>9$, решение которого состоит из двух бесконечных промежутков $x<-1$ и $x>4$.

При решении иррациональных и других неравенств полезно иметь в виду следующий прием, который мы разберем на примере.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $y=\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}-1$. Тогда поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: найти те значения x, для которых функция y принимает отрицательные значения.

Область существования этой функции, или множество допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, для которых $1-8x^2\geqslant 0$ и $x\neq 0$, т. е. $0<x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<0$.

Найдем теперь все значения x, при которых функция y обращается в нуль. Для этого надо решить уравнение $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}=1$. Решив его, найдем единственный корень $x=\frac{1}{3}$. Этот корень разбивает область существования функции $y=\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}-1$ на три промежутка:

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<0 \quad \text{(I)}, \qquad 0<x<\frac{1}{3} \quad \text{(II)}, \qquad \frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{(III)}.$$

Взяв какое-нибудь x из промежутка (I), например $x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, находим, что

$$y\Big|_{x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}-1<0.$$

Так как наша функция на этом промежутке в нуль не обращается, то она для всех других x из этого промежутка будет принимать лишь отрицательные значения. (Строгое обоснование этого свойства элементарных функций дается в курсе высшей математики.)

Взяв теперь $x=\frac{1}{4}$ из промежутка (II), мы видим, что y также отрицательно.

Для $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ из промежутка (III) имеем $y\Big|_{x=\frac{1}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1>0$, т. е. функция для всех x из этого промежутка принимает лишь положительные значения.

Таким образом, решением исходного неравенства являются все значения x из промежутков $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<0$, $0<x<\frac{1}{3}$.

§ 5. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Иррациональной, или *алгебраической* системой называют всякую систему, в которой, по крайней мере, одно уравнение иррациональное, а остальные либо иррациональные, либо рациональные.

Как и иррациональные уравнения, такие системы рассматриваются на множестве действительных чисел, радикалы четной степени

понимаются в арифметическом смысле, а у радикалов нечетной степени берется их единственное действительное значение. При решении иррациональных систем используют те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений и рациональных систем.

Прежде чем рассматривать уравнения системы совместно, надо по возможности каждое уравнение системы заменить одним или несколькими более простыми уравнениями, равносильными ему.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ x(x+y) + \sqrt{x^2+xy+4} = 52. \end{cases}$$

Решение. Положив $\sqrt{\frac{x+y}{6x}} = z > 0$, получим относительно z уравнение $z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2}$. Решив это уравнение, найдем $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, первое уравнение системы равносильно совокупности двух уравнений $\frac{x+y}{6x} = 4$ и $\frac{x+y}{6x} = \frac{1}{4}$. Положив $\sqrt{x^2+xy+4} = t \geqslant 0$, получим относительно t уравнение $t^2 + t - 56 = 0$, откуда $t = 7$ ($t = -8$ — не годится). Следовательно, второе уравнение системы равносильно уравнению $x(x+y) = 45$. Таким образом, искомая система равносильна совокупности двух рациональных систем

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x} = 24, \\ x(x+y) = 45 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x+y}{x} = \frac{3}{2}, \\ x(x+y) = 45. \end{cases}$$

Решив эти системы, найдем все решения данной системы:

$$\left(\frac{1}{4}\sqrt{30};\ \frac{23}{4}\sqrt{30}\right),\ \left(-\frac{1}{4}\sqrt{30};\ -\frac{23}{4}\sqrt{30}\right),$$

$$\left(\sqrt{30};\ \frac{\sqrt{30}}{2}\right),\ \left(-\sqrt{30};\ -\frac{\sqrt{30}}{2}\right).$$

В отдельных случаях при решении иррациональных систем удобно использовать наличие одинаковых выражений, содержащих неизвестные в уравнениях системы. Если таких выражений нет, то их иногда удается получить за счет преобразований уравнений системы.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

Решение. Считая $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, после возведения обеих частей второго уравнения системы в квадрат получим равносильное ему уравнение $x + y + 2\sqrt{xy} = 16$. Умножив обе части первого уравнения

системы на $\sqrt{2}$, получим систему

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+2y^2}+2\sqrt{xy}=16, \\ x+y+2\sqrt{xy}=16, \end{cases}$$

равносильную данной.

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получим уравнение $\sqrt{2x^2+2y^2}=x+y$, которое в силу условия $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ равносильно уравнению $2x^2+2y^2=(x+y)^2$, или $x^2-2xy+y^2=0$, откуда следует, что $y=x$. Таким образом, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} y=x, \\ x+y+2\sqrt{xy}=16, \end{cases}$$

из которой находим решение $x=4$, $y=4$.

При решении иррациональных систем иногда оказывается эффективным присоединение к уравнениям системы уравнения-следствия.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x=2(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ y=3(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ z=4(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}. \end{cases}$$

Решение. Сложив почленно уравнения системы, получим уравнение-следствие $(x+y+z)=9(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}$, которое равносильно совокупности двух уравнений $x+y+z=0$ и $\sqrt[3]{xyz}=\frac{1}{9}$. Следовательно, данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x=2(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ y=3(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ z=4(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad (S_1) \text{ и } \begin{cases} x=2(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ y=3(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ z=4(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ \sqrt[3]{xyz}=\frac{1}{9}. \end{cases} \quad (S_2)$$

Система S_1, очевидно, имеет единственное решение (0; 0; 0). Система S_2 равносильна системе

$$\begin{cases} 9x=2(x+y+z), \\ 9y=3(x+y+z), \\ 9z=4(x+y+z), \\ \sqrt[3]{xyz}=\frac{1}{9} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7x-2y-2z=0, \\ 3x-6y+3z=0, \\ 4x+4y-5z=0, \\ \sqrt[3]{xyz}=\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Первое уравнение последней системы является суммой второго и третьего уравнений и, следовательно, его можно отбросить. Из второго и третьего уравнений находим $y=\frac{3z}{4}$, $x=\frac{z}{2}$ и тогда из третьего

уравнения получим $\sqrt[3]{\frac{3z^3}{8}}=\frac{1}{9}$, откуда $z=\frac{2}{9\sqrt[3]{3}}$ и, следовательно, $x=\frac{1}{9\sqrt[3]{3}}$, $y=\frac{1}{6\sqrt[3]{3}}$. Таким образом, искомая система имеет два решения: (0; 0; 0) и $\left(\frac{1}{9\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{6\sqrt[3]{3}}; \frac{2}{9\sqrt[3]{3}}\right)$.

В принципе любая иррациональная система, как и иррациональные уравнения, путем введения новых вспомогательных неизвестных может быть заменена равносильной ей рациональной системой. Но этот прием целесообразно применять лишь в том случае, когда для получающейся рациональной системы решение может быть доведено до конца.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{xyz}+\frac{7}{3}\sqrt[6]{xyz}, \\ y=\sqrt[3]{xyz}+\frac{7}{5}\sqrt[6]{xyz}, \\ z=\sqrt[3]{xyz}-\frac{7}{8}\sqrt[6]{xyz}. \end{cases}$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное t, положив $\sqrt[6]{xyz}=t\geqslant 0$. Получим равносильную рациональную систему

$$\begin{cases} x=t\left(t+\frac{7}{3}\right), \\ y=t\left(t+\frac{7}{5}\right), \\ z=t\left(t-\frac{7}{8}\right), \\ xyz=t^6. \end{cases}$$

Подставляя x, y, z из первых трех уравнений в четвертое, получим одно уравнение с одним неизвестным

$$t^3\left(t+\frac{7}{3}\right)\left(t+\frac{7}{5}\right)\left(t-\frac{7}{8}\right)=t^6.$$

Отсюда $t_1=0$ и $\left(t+\frac{7}{3}\right)\left(t+\frac{7}{5}\right)\left(t-\frac{7}{8}\right)=t^3$. Раскрывая скобки в левой части, после упрощения получим $t^2=1$, откуда $t=1$ ($t=-1<0$ — не годится). Подставляя найденные значения t в первые три уравнения последней системы, получим решения данной системы: (0; 0; 0) $\left(\frac{10}{3}; \frac{12}{5}; \frac{1}{8}\right)$.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}-1=\frac{1}{\sqrt{xy}}, \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=2. \end{cases}$$

Решение. Очевидно, решение должно удовлетворять условию $xy > 0$. Если $x > 0$ и $y > 0$, то положив $\sqrt{x} = z > 0$, $\sqrt{y} = t > 0$ и тем самым $x = z^2$, $y = t^2$, получим систему

$$\begin{cases} \frac{z}{t} + \frac{t}{z} - 1 = \frac{1}{zt}, \\ z^3 t + z t^3 = 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z^2 + t^2 = zt + 1, \\ zt(z^2 + t^2) = 2, \end{cases}$$

из которой находим, что $z = t = 1$ (случай $z = t = -1 < 0$ — не годится). Следовательно, $x = 1$ и $y = 1$. В случае $x < 0$, $y < 0$, положив $\sqrt{-x} = u > 0$, $\sqrt{-y} = v > 0$ и тем самым $x = -u^2$, $y = -v^2$, получим систему

$$\begin{cases} \frac{u}{v} + \frac{v}{u} - 1 = \frac{1}{u \cdot v}, \\ u^3 v + u v^3 = 2. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $u = v = 1$, удовлетворяющее условию $u > 0$, $v > 0$. Следовательно, данная система имеет еще одно решение $x = y = -1$. Таким образом, исходная система имеет лишь два решения (1; 1), (—1; —1).

§ 6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ АБСОЛЮТНУЮ ВЕЛИЧИНУ

Алгебраические уравнения, неравенства и системы, содержащие неизвестные под знаком абсолютной величины, если нет специальной оговорки, рассматриваются на множестве действительных чисел.

Пользуясь определением абсолютной величины действительного числа и ее свойствами (см. гл. I, § 4), такую задачу сводят к подобной, уже не содержащей абсолютной величины.

Приведем некоторые свойства уравнений, которыми удобно пользоваться при решении уравнений и систем, связанных с абсолютной величиной.

I. Уравнение $|A| = a$, где $a \geqslant 0$, равносильно совокупности двух уравнений $A = a$ и $A = -a$.

II. Уравнение $|A| = a$, где $a < 0$ — противоречиво, так как $|A| \geqslant 0$.

III. Уравнение $|A| = B$ равносильно совокупности двух уравнений:

1) $A = B$ при условии, что корни этого уравнения удовлетворяют неравенству $A \geqslant 0$, и

2) $-A = B$ при условии, что корни этого уравнения удовлетворяют неравенству $A < 0$.

Справедливость всех этих свойств непосредственно вытекает из определения и свойств абсолютной величины действительного числа.

Рассмотрим несколько примеров уравнений с одним неизвестным, содержащих его под знаком абсолютной величины.

Пример 1. Решить уравнение

$$|2|x-1|-3|=5.$$

Решение. Согласно свойству I это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$2|x-1|-3=5 \quad \text{и} \quad 2|x-1|-3=-5,$$

или

$$|x-1|=4 \quad \text{и} \quad |x-1|=-1.$$

Второе из этих уравнений противоречиво (см. свойство II). Первое же уравнение равносильно в свою очередь совокупности двух уравнений $x-1=4$ и $x-1=-4$, корни которых $x_1=5$ и $x_2=-3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$|1-2x|=3x-2.$$

Решение. Очевидно, неизвестное x должно удовлетворять условию $3x-2\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant\frac{2}{3}$. При этом условии наше уравнение равносильно совокупности двух уравнений $1-2x=3x-2$ и $1-2x=-(3x-2)$. Корень первого из этих уравнений $x=\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$ не годится. Корень второго уравнения $x=1$ удовлетворяет условию $x\geqslant\frac{2}{3}$ и, следовательно, является искомым.

Иногда при решении удобно пользоваться числовой осью.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{|3-2x|-|x|}{|2+3x|+x-2}=5.$$

Решение. Пользуясь свойствами абсолютной величины действительного числа, перепишем уравнение в виде

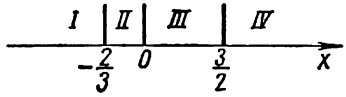


Рис. 15

$$\frac{2\left|x-\frac{3}{2}\right|-|x|}{3\left|x+\frac{2}{3}\right|+x-2}=5.$$

Отметим на числовой оси x точки, где каждое выражение под знаком абсолютной величины обращается в нуль (рис. 15). Эти точки разбивают числовую ось на четыре промежутка:

$$x\leqslant-\frac{2}{3}\ (\text{I});\quad -\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 0\ (\text{II});\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\ (\text{III});\quad x\geqslant\frac{3}{2}\ (\text{IV}).$$

На первом промежутке, очевидно, $x-\frac{3}{2}<0$, $x<0$, $x+\frac{2}{3}\leqslant 0$; поэтому данное уравнение равносильно на этом промежутке уравнению

$$\frac{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)+x}{-3\left(x+\frac{2}{3}\right)+x-2}=5,$$

корень которого $x=-\frac{23}{9}$ входит в указанный промежуток и, следовательно, является решением данного уравнения.

На втором промежутке $x-\frac{3}{2}<0$, $x\leqslant 0$, $x+\frac{2}{3}\geqslant 0$, поэтому данное уравнение равносильно на этом промежутке уравнению

$$\frac{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)+x}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)+x-2}=5.$$

Корень этого уравнения $x=\frac{1}{7}$ не принадлежит указанному промежутку и, следовательно, не является решением данного уравнения.

На третьем промежутке $x-\frac{3}{2}\leqslant 0$, $x\geqslant 0$, $x+\frac{2}{3}>0$, поэтому на этом промежутке данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)-x}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)+x-2}=5.$$

Его корень $x=\frac{3}{23}$ принадлежит указанному промежутку и, следовательно, является решением данного уравнения.

И, наконец, на четвертом промежутке $x-\frac{3}{2}\geqslant 0$, $x>0$, $x+\frac{2}{3}>0$ и поэтому данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)-x}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)+x-2}=5,$$

корень которого $x=-\frac{3}{19}$ не принадлежит рассматриваемому промежутку и, следовательно, не является корнем данного уравнения.

Таким образом, данное уравнение имеет два корня $x=-\frac{23}{9}$ и $x=\frac{3}{23}$.

В отдельных случаях к уравнениям, содержащим неизвестное под знаком абсолютной величины, приводятся иррациональные уравнения с радикалами четных степеней, в случаях, когда подкоренные выражения представляют собой полные квадраты относительно неизвестных.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^2=\sqrt{4x^2-4x+1}+3.$$

Решение. Замечая, что $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$, перепишем уравнение в виде

$$x^2=|2x-1|+3, \text{ или } |2x-1|=x^2-3$$

(радикал четной степени понимается в арифметическом смысле!). Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений

$$2x-1=x^2-3 \text{ и } 2x-1=3-x^2$$

при условии, что $x^2\geqslant 3$, т. е. $x\leqslant -\sqrt{3}$ и $x\geqslant\sqrt{3}$.

Решая первое из этих уравнений, имеем

$$x^2-2x-2=0,\ x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}.$$

Очевидно, $x_2=1-\sqrt{3}$ не удовлетворяет ограничению и, следовательно, не является корнем данного уравнения.

Из второго уравнения получаем

$$x^2+2x-4=0,\ x_{3,4}=-1\pm\sqrt{5}.$$

Число $x_3=-1+\sqrt{5}$ не удовлетворяет ограничению.

Таким образом, уравнение имеет два корня

$$x_1=1+\sqrt{3} \text{ и } x_2=-1-\sqrt{5}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Решение. Полагая $\sqrt{x-1}=y\geqslant 0$ и тем самым $x=y^2+1$, перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{y^2+4-4y}+\sqrt{y^2+9-6y}=1,$$

откуда получаем уравнение

$$|y-2|+|y-3|=1, \qquad (A)$$

равносильное данному при условии, что $y\geqslant 0$.

На промежутке $0\leqslant y\leqslant 2$, где $y-2\leqslant 0$ и $y-3<0$, уравнение (A) имеет решение $y=2$.

На промежутке $2\leqslant y\leqslant 3$ уравнение (A) равносильно уравнению $y-2-y+3=1$, которое обращается на нем в тождество $1=1$.

На промежутке $y\geqslant 3$ уравнение (A) равносильно уравнению $y-2+y-3=1$, корень которого $y=3$ является и корнем уравнения (A). Итак, все корни уравнения (A) полностью заполняют промежуток $2\leqslant y\leqslant 3$, следовательно, корнями данного уравнения являются все значения x из промежутка $5\leqslant x\leqslant 10$ $(x=y^2+1)$.

Напомним, что при решении любой задачи, содержащей параметры, необходимо исследовать решение в зависимости от допустимых значений параметров.

Пример 6. Решить уравнение

$$\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|=-x^2-4x+a.$$

Решение. Если $x^2-\frac{3}{2}x-1\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant -\frac{1}{2}$ и $x\geqslant 2$, то уравнение можно записать в виде $x^2-\frac{3}{2}x-1=-x^2-4x+a$, или $4x^2+5x-2a-2=0$, откуда находим $x_1=\frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8}$ и $x_2=\frac{-5-\sqrt{32a+57}}{8}$. Эти корни будут действительными числами, если $32a+57\geqslant 0$, т. е. если $a\geqslant -\frac{57}{32}$, причем в случае $a=-\frac{57}{32}$ $x_1=x_2=-\frac{5}{8}<-\frac{1}{2}$ и, следовательно, это решение годится. Требуя теперь $x_1\leqslant -\frac{1}{2}$, получаем неравенство $\frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8}\leqslant -\frac{1}{2}$, которое выполняется для $-\frac{57}{32}\leqslant a\leqslant -\frac{7}{4}$.

Требуя $x_1\geqslant 2$, получаем неравенство $\frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8}\geqslant 2$, решив которое, находим, что $a\geqslant 12$.

Далее очевидно, что $x_2=\frac{-5-\sqrt{32a+57}}{8}<-\frac{1}{2}$ для $a\geqslant -\frac{57}{32}$.

В случае $x^2-\frac{3}{2}x-1<0$, т. е. $-\frac{1}{2}<x<2$, получаем уравнение $-\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)=-x^2-4x+a$, отсюда $x=\frac{2(a-1)}{11}$. Это решение будет годиться, если $-\frac{1}{2}<\frac{2(a-1)}{11}<2$, т. е. если $-\frac{7}{4}<a<12$.

Объединяя полученные результаты, имеем:

если $a<-\frac{57}{32}$, то уравнение решений не имеет;

если $a=-\frac{57}{32}$, то уравнение имеет единственное решение $x=-\frac{5}{8}$;

если $-\frac{57}{32}<a\leqslant -\frac{7}{4}$ или $a\geqslant 12$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{32a+57}}{8}$;

если $-\frac{7}{4}<a<12$, то уравнение имеет единственный корень $x=\frac{2(a-1)}{11}$.

При решении неравенств, связанных с абсолютной величиной, полезно иметь в виду следующие свойства.

I. Неравенство $|A|\leqslant a$, где $a>0$, равносильно двойному неравенству $-a\leqslant A\leqslant a$.

Действительно, если $A \geqslant 0$, то $|A| = A$ и, следовательно, $A \leqslant a$; если $A \leqslant 0$, то $|A| = -A$, следовательно, $-A \leqslant a$ или $A \geqslant -a$. Объединяя оба эти результата, получаем требуемое.

В частности, неравенство $|A| < a$ $(a > 0)$ равносильно неравенству $-a < A < a$.

II. Неравенство $|A| \leqslant a$, где $a < 0$ — противоречиво, так как $|A| \geqslant 0$.

III. Неравенство $|A| \geqslant a$, где $a > 0$, равносильно совокупности двух неравенств $A \geqslant a$ и $A \leqslant -a$.

Доказательство аналогично доказательству свойства I.

IV. Неравенство $|A| \geqslant a$, где $a \leqslant 0$, справедливо для всех допустимых значений выражения A, так как $|A| \geqslant 0$.

V. Неравенство $|A| \vee B$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} A \geqslant 0, \\ A \vee B \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A < 0, \\ -A \vee B. \end{cases}$$

Это свойство следует непосредственно из определения абсолютной величины действительного числа.

Пример 7. Решить неравенство

$$||2x-1|-3| > 2.$$

Решение. Это неравенство равносильно совокупности двух неравенств $|2x-1|-3 > 2$ и $|2x-1|-3 < -2$, или $|2x-1| > 5$ (A) и $|2x-1| < 1$ (B).

Неравенство (A) равносильно совокупности двух неравенств $2x-1 > 5$ и $2x-1 < -5$ или $x > 3$ и $x < -2$. Неравенство (B) равносильно двойному неравенству $-1 < 2x-1 < 1$, или $0 < 2x < 2$, отсюда $0 < x < 1$. Следовательно, решением искомого неравенства являются все x из промежутков $(-\infty, -2)$, $(0, 1)$ и $(3, +\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\sqrt{9x^2+6x+1} < 2-x.$$

Решение. Данное неравенство перепишем в виде $|3x+1| < 2-x$, которое равносильно (см. свойство V) совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 3x+1 \geqslant 0, \\ 3x+1 < 2-x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x+1 < 0, \\ -(3x+1) < 2-x. \end{cases}$$

Решением первой системы служит промежуток $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, решением второй системы — промежуток $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$. Следовательно, решением данного неравенства является промежуток $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Пример 9. Решить неравенство

$$x+|3-2x| > |x+1|-1.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$x+2\left|x-\frac{3}{2}\right|>|x+1|-1$$

и отметим на числовой оси x значения $x=-1$ и $x=\frac{3}{2}$ (рис. 16), в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка

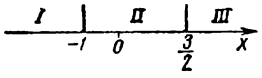


Рис. 16

$$x\leqslant -1 \text{ (I)}; \quad -1\leqslant x\leqslant \frac{3}{2} \text{ (II)}; \quad x\geqslant \frac{3}{2}. \text{ (III)}$$

Рассматривая x последовательно на каждом промежутке, получим, что искомое неравенство равносильно следующим трем системам неравенств:

$$\begin{cases} x\leqslant -1, \\ x-2\left(x-\frac{3}{2}\right)>-(x+1)-1, \end{cases} \quad \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}, \\ x-2\left(x-\frac{3}{2}\right)>x+1-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geqslant \frac{3}{2}, \\ x+2\left(x-\frac{3}{2}\right)>x+1-1, \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, последовательно находим, что решением первой является промежуток $x\leqslant -1$, решением второй — промежуток $-1\leqslant x<\frac{3}{2}$ и решением третьей — промежуток $x>\frac{3}{2}$.

Итак, решением данного неравенства являются все действительные числа x, кроме $x=\frac{3}{2}$.

В заключение рассмотрим решение систем, содержащих неизвестные под знаком абсолютной величины.

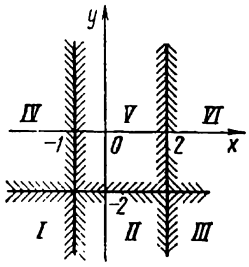


Рис. 17

Пример 10. Решить систему

$$\begin{cases} |x+1|-|y+2|=-2, \\ |x-2|+2y=3. \end{cases}$$

Решение. Для удобства решения введем в рассмотрение плоскость xOy и построим прямые (рис. 17) $x=-1$, $x=2$, $y=-2$, на которых выражения, стоящие под знаком абсолютной величины, обращаются в нуль. Эти прямые разбивают плоскость на 6 областей, задаваемых следующими системами неравенств:

$$\begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\leqslant -2 \end{cases} \text{ (I)}; \quad \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2, \\ y\leqslant -2 \end{cases} \text{ (II)}; \quad \begin{cases} x\geqslant 2, \\ y\leqslant -2 \end{cases} \text{ (III)};$$

$$\begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\geqslant -2 \end{cases} \text{ (IV)}; \quad \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2, \\ y\geqslant -2 \end{cases} \text{ (V)}; \quad \begin{cases} x\geqslant 2, \\ y\geqslant -2 \end{cases} \text{ (VI)}.$$

Рассмотрим данную систему на каждой из этих областей.

Для x и y, принадлежащих области (I), имеем

$$\begin{cases} -(x+1)+(y+2)=-2, \\ -(x-2)+2y=3. \end{cases}$$

Решение этой системы $x=7$, $y=4$ не принадлежит рассматриваемой области и, следовательно, не является решением данной системы.

Для x и y, принадлежащих области (II), имеем

$$\begin{cases} (x+1)+(y+2)=-2, \\ -(x-2)+2y=3. \end{cases}$$

Решение этой системы $x=-\frac{11}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$ не принадлежит этой области и также не является решением данной системы.

Для x и y из области (III) имеем

$$\begin{cases} (x+1)+(y+2)=-2, \\ (x-2)+2y=3. \end{cases}$$

Ее решение $x=-15$ и $y=10$ также не годится.

Для x и y из области (IV) имеем

$$\begin{cases} -(x+1)-(y+2)=-2, \\ -(x-2)+2y=3. \end{cases}$$

Ее решение $x=-1$, $y=0$ принадлежит этой области и, следовательно, является решением данной системы.

Для x и y из области (V) имеем

$$\begin{cases} (x+1)-(y+2)=-2, \\ -(x-2)+2y=3. \end{cases}$$

Ее решение $x=-1$, $y=0$ принадлежит этой области и, следовательно, является решением данной системы.

И, наконец, для x и y из области (VI) получаем систему

$$\begin{cases} (x+1)-(y+2)=-2, \\ (x-2)+2y=3, \end{cases}$$

решение которой $x=1$, $y=2$ не годится.

Таким образом, заданная система имеет единственное решение $(-1; 0)$.

В отдельных случаях решение системы упрощается, если использовать некоторые свойства абсолютной величины действительного числа.

Пример 11. Решить систему

$$\begin{cases} |x+y|=1, \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$$

Решение. Из данной системы следует равенство $|x+y|=|x|+|y|$, которое возможно лишь в случае $xy\geqslant 0$ (см. гл. I, § 4). Если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то данная система имеет вид

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1, \end{cases}$$

что равносильно одному уравнению $x+y=1$.

Если $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, то данная система принимает вид

$$\begin{cases} -(x+y)=1, \\ -(x+y)=1, \end{cases}$$

что равносильно одному уравнению $x+y=-1$.

Таким образом, системе удовлетворяет любая пара неотрицательных чисел, сумма которых равна 1, а также любая пара неположительных чисел, сумма которых равна -1.

§ 7. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ, НЕРАВЕНСТВАМИ, СИСТЕМАМИ

Рассмотрим ряд задач, связанных с выявлением определенных свойств уравнений и их решений.

Пример 1. Исследовать корни уравнения

$$(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$$

в зависимости от допустимых действительных значений параметра.

Решение. Очевидно, параметр a может быть любым действительным числом. Дискриминант этого уравнения

$$D=a^2-(a-2)(2a-3)=-(a-1)(a-6);$$

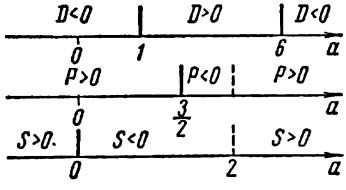


Рис. 18

по формулам Виета находим

$$P=x_1x_2=\frac{2a-3}{a-2}=\frac{2\left(a-\frac{3}{2}\right)}{a-2} \qquad (a\neq 2),$$

$$S=x_1+x_2=\frac{2a}{a-2} \qquad (a\neq 2).$$

По правилу решения рациональных неравенств найдем на числовой оси интервалы знакопостоянства величин D, P, S (рис. 18).

Анализируя полученный результат, имеем:

На интервале $a<0$ дискриминант $D<0$, а $S>0$ и, следовательно, корни комплексно-сопряженные: $x=\alpha\pm\beta i$, причем $\alpha>0$.

При $a=0$ величина $S=0$, а $D<0$, т. е. корни чисто мнимые: $x=\pm\beta i$.

На интервале $0<a<1$ имеем $D<0$, $S<0$, т. е. корни комплексно-сопряженные: $x=\alpha\pm\beta i$, причем $\alpha<0$.

При $a=1$ имеем $D=0$, $P>0$, $S<0$ и, следовательно, корни равные ($D=0$) отрицательные ($S<0$).

На интервале $1<a<\frac{3}{2}$ дискриминант $D>0$, $P>0$, $S<0$ и, следовательно, корни различные и оба отрицательные ($P>0$, $S<0$).

При $a=\frac{3}{2}$ дискриминант $D>0$, $P=0$, $S<0$ и, следовательно, один корень равен нулю, а другой — отрицательный ($P=0$, $S<0$),

На интервале $\frac{3}{2}<a<2$ дискриминант $D>0$, $P<0$, $S<0$ и, следовательно, корни разных знаков ($P<0$), причем больший по абсолютной величине корень отрицательный ($S<0$).

При $a=2$ величины P и S не имеют смысла (уравнение не является квадратным). Подставив это значение a в заданное уравнение, получим уравнение $-4x+1=0$, которое имеет единственный положительный корень $x=\frac{1}{4}$.

На интервале $2<a<6$ дискриминант $D>0$, $P>0$, $S>0$ и, следовательно, корни различные, оба положительные.

При $a=6$ дискриминант $D=0$, $P>0$, $S>0$ и, следовательно, корни равные положительные. На интервале $a>6$ дискриминант $D<0$, $S>0$ и, следовательно, корни комплексно сопряженные: $x=\alpha\pm\beta i$, причем $\alpha>0$.

Пример 2. Доказать, что уравнение

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{x-1}=1,$$

где a и b — действительные числа, не равные нулю одновременно, имеет лишь действительные корни.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$x^2-(a^2+b^2+1)x+a^2=0 \qquad (*)$$

при условии, что $x\neq 0$, $x\neq 1$ и $ab\neq 0$. Дискриминант уравнения (*)

$$D=(a^2+b^2+1)^2-4a^2=(a^2+b^2+1-2a)(a^2+b^2+1+2a)=$$
$$=[(a+1)^2+b^2][(a-1)^2+b^2]\geqslant 0$$

при любых действительных a и b. Следовательно, уравнение (*) имеет лишь действительные корни.

Если $a=0$ ($b\neq 0$), то исходное уравнение принимает вид $\frac{b^2}{x-1}=1$, корень которого $x=1+b^2$ — действителен при любом действительном b.

Если $b=0$ ($a\neq 0$), то исходное уравнение принимает вид $\frac{a^2}{x}=1$, корень которого $x=a^2$ также действителен при любом действительном a.

Таким образом, при любых a и b, одновременно не равных нулю, искомое уравнение имеет лишь действительные корни.

Пример 3. Доказать, что если между коэффициентами уравнений

$$x^2+p_1x+q_1=0 \quad \text{и} \quad x^2+p_2x+q_2=0,$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 — действительные числа, существует соотношение $p_1 \cdot p_2 = 2(q_1 + q_2)$, то по крайней мере одно из уравнений имеет действительные корни.

Решение. Для доказательства достаточно показать, что хотя бы один из дискриминантов

$$D_1 = p_1^2 - 4q_1 \quad \text{и} \quad D_2 = p_2^2 - 4q_2$$

неотрицателен. А это следует из неравенства

$$D_1 + D_2 = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 = (p_1 - p_2)^2 \geqslant 0,$$

так как в случае $D_1 < 0$ и $D_2 < 0$ их сумма $D_1 + D_2$ была бы также отрицательна.

Пример 4. Доказать, что уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

не может иметь рациональных корней, если p и q — целые нечетные числа.

Решение. Предположим противное, т. е. что это уравнение имеет рациональные корни. Тогда дискриминант уравнения $D = p^2 - 4q$ является квадратом нечетного числа (так как p и q — нечетные, то, следовательно, и $D = p^2 - 4q$ — нечетное), т. е. справедливо равенство $p^2 - 4q = (2k + 1)^2$, где $p = 2m + 1$, $q = 2n + 1$. Таким образом, должно выполняться равенство $(2k + 1)^2 = (2m + 1)^2 - 4(2n + 1)$, где k, m, n — некоторые целые числа.

Последнее равенство равносильно равенству

$$k(k + 1) = m(m + 1) - (2n + 1),$$

которое противоречиво, так как слева стоит четное число, а справа — нечетное. Следовательно, наше предположение ошибочно, т. е. данное уравнение не имеет рациональных корней.

Пример 5. Доказать, что если все корни уравнения

$$x^3 + px + q = 0$$

с действительными коэффициентами p и q действительны, то $p \leqslant 0$.

Решение. Согласно формулам Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$p = x_1x_2 + x_3(x_1 + x_2) = x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 =$$

$$= -(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = -\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right] \leqslant 0,$$

так как выражение, стоящее в квадратных скобках, при любых действительных x_1 и x_2 неотрицательно.

При решении задач на отыскание параметров, при которых корни уравнения удовлетворяют наперед заданным ограничениям, неопытный учащийся зачастую находит лишь необходимые, но не

достаточные условия. Естественно, что это приводит к неверному результату.

Проиллюстрируем сказанное на следующем примере.

Пример 6. При каких действительных значениях a корни уравнения

$$(a+1)x^2-3ax+4a=0 \quad (a\neq -1)$$

действительны и больше 1?

Решение. Часто эту задачу «решают» следующим образом. Так как корни уравнения действительны, то должно быть выполнено условие

$$D=9a^2-16a(a+1)\geqslant 0.$$

Далее, корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $x_1>1$ и $x_2>1$. Поэтому

$$\frac{3a}{a+1}=x_1+x_2>2 \quad \text{и} \quad \frac{4a}{a+1}=x_1x_2>1.$$

После этих правильных рассуждений делается вывод, что при значениях a, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ x_1+x_2>2, \\ x_1x_2>1, \end{cases}$$

оба корня будут больше 1. Это уже неверно, так как не исключает, например, возможности, что при каком-нибудь a, удовлетворяющем этой системе, уравнение будет иметь корни $x_1=3>1$ и $x_2=\frac{1}{2}<1$.

Теперь приведем правильное решение этой задачи.

Пусть D—дискриминант уравнения, x_1 и x_2—его корни. Согласно условию задачи должна быть справедлива следующая система неравенств:

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ x_1-1>0, \\ x_2-1>0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ (x_1-1)+(x_2-1)>0, \\ (x_1-1)(x_2-1)>0 \end{cases} \qquad (*)$$

(если сумма и произведение двух действительных чисел положительны, то и сами числа положительны). Раскрывая скобки во втором и третьем неравенствах системы (*), имеем

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ x_1+x_2-2>0, \\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что

$$D=9a^2-16a(a+1),\quad x_1+x_2=\frac{3a}{a+1}\quad\text{и}\quad x_1x_2=\frac{4a}{a+1},$$

получаем систему

$$\begin{cases}9a^2-16a(a+1)\geqslant 0,\\ \dfrac{3a}{a+1}-2>0,\\ \dfrac{4a}{a+1}-\dfrac{3a}{a+1}+1>0.\end{cases}$$

Решая ее, находим, что $-\frac{16}{7}\leqslant a<-1$.

Пример 7. При каких действительных m множество решений неравенства

$$x^2+mx+m^2+6m<0$$

содержит интервал $1<x<2$?

Решение. Прежде всего заметим, что дискриминант квадратного трехчлена D должен быть положительным, так как при $D\leqslant 0$ будет справедливо неравенство

$$x^2+mx+m^2+6m\geqslant 0$$

для всех действительных значений x.

Обозначая корни трехчлена через x_1 и x_2 и учитывая, что коэффициент при x^2 равен $1>0$, получаем, что $y=x^2+mx+m^2+6m<0$ лишь для x, заключенных в интервале между x_1 и x_2. Но этот интервал должен содержать интервал (1, 2), что возможно в том и только в том случае, когда $y(1)\leqslant 0$ и $y(2)\leqslant 0$ (вспомните график квадратного трехчлена). Эти условия равносильны следующей системе неравенств:

$$\begin{cases}1+m+m^2+6m\leqslant 0,\\ 4+2m+m^2+6m\leqslant 0,\\ m^2-4(m^2+6m)>0.\end{cases}$$

Решив эту систему, получаем

$$-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant 3\sqrt{2}-4.$$

Пример 8. Найти значения a, при которых система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x\leqslant 1,\\ x-y+a=0\end{cases}$$

имеет единственное решение. Найти соответствующие решения.

Решение. Подставляя $y=x+a$ в заданное неравенство, получаем неравенство

$$2x^2+2(a+1)x+a^2-1\leqslant 0,$$

которое имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$D=(a+1)^2-2(a^2-1)=0.$$

Из полученного уравнения находим $a_1=-1$, $a_2=3$.

Если $a_1=-1$, то $2x^2\leqslant 0$ и, следовательно, $x=0$, $y=-1$. Если $a=3$, то $2x^2+8x+8\leqslant 0$ и, следовательно, $x=-2$, $y=1$.

К числу распространенных задач относятся задачи, связанные с симметрическими выражениями относительно корней многочлена. Такие задачи обычно хорошо решаются путем применения формул Виета.

Пример 9. Вычислить выражение

$$A=\frac{4x_1^2x_2-x_1^3+2x_1x_2+4x_1x_2^2-x_2^3}{(2x_1-1)(2x_2-1)},$$

где x_1 и x_2—корни уравнения $2x^2-2x+3=0$.

Решение. Если найти корни уравнения и подставить их в исходное выражение, то это приведет к громоздким выкладкам. Проще поступить иначе.

Согласно формулам Виета,

$$x_1+x_2=1,\quad x_1x_2=\frac{3}{2}.$$

Поэтому

$$A=\frac{4x_1x_2(x_1+x_2)+2x_1x_2-(x_1+x_2)^3+3x_1x_2(x_1+x_2)}{4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1}=$$

$$=\frac{4\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{2}-1+3\cdot\frac{3}{2}}{4\cdot\frac{3}{2}-2+1}=\frac{5}{2}.$$

Пример 10. Пусть x_1 и x_2—корни уравнения

$$x^2+kx+2k-1=0.$$

Найти все значения k, при которых справедливо неравенство

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>1.$$

Решение. Переписав неравенство в виде

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}>1,\text{ или }\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}>1$$

и воспользовавшись тем, что $x_1+x_2=-k$, $x_1x_2=2k-1$, имеем

$$\frac{k^2-2(2k-1)}{2k-1}>1.$$

Решая это неравенство, найдем, что ему удовлетворяют все значения k, заключенные в интервалах:

$$\left(\frac{1}{2},\ 3-\sqrt{6}\right)\text{ и }(3+\sqrt{6},\ +\infty).$$

В заключение приведем примеры уравнений и систем, имеющих, вообще говоря, бесчисленное множество решений, из которых требуется выделить решения определенного класса (целые, рациональные и др.).

Пример 11. При каких действительных a система

$$\begin{cases} 2x+z=a, \\ 5x^2+2y^2+2xy+2x+11=z^2-8a^2 \end{cases}$$

имеет единственное действительное решение? Найти соответствующие решения.

Решение. Выражая z из первого уравнения и подставляя найденное значение ($z=a-2x$) во второе, получаем

$$x^2+2y^2+2xy+2(2a+1)x+7a^2+11=0.$$

Перепишем левую часть этого уравнения, располагая его члены по убывающим степеням буквы x: $x^2+2x(y+2a+1)+2y^2+7a^2+11=0$.

Выделяя в левой части полный квадрат относительно x, получаем

$$(x+y+2a+1)^2+y^2-2(2a+1)y+3a^2-4a+10=0.$$

Выделим теперь в оставшихся слагаемых полный квадрат относительно y:

$$(x+y+2a+1)^2+(y-2a-1)^2=a^2+8a-9.$$

Очевидно, единственное действительное решение этого уравнения возможно лишь в том случае, когда

$$a^2+8a-9=0,$$

т. е. при $a=1$ и $a=-9$.

Решая систему

$$\begin{cases} x+y+2a+1=0, \\ y-2a-1=0 \end{cases}$$

при значениях $a=1$ и $a=-9$, находим:

если $a=1$, то $x=-6$, $y=3$ и $z=a-2x=13$;

если $a=-9$, то $x=34$, $y=-17$, $z=-77$.

Пример 12. Найти все рациональные решения уравнения

$$y^2=4x^2-5x+1.$$

Решение. Полагая $4x^2-5x+1=(2x+t)^2$, находим, что

$$x=\frac{1-t^2}{4t+5}. \qquad (*)$$

Тогда

$$y=\pm(2x+t)=\pm\frac{2t^2+5t+2}{4t+5}. \qquad (**)$$

Таким образом, все рациональные решения данного уравнения

содержатся в формулах (*) и (**), где t — любое рациональное число $\neq -\frac{5}{4}$.

Замечание. Для уравнения $y^2 = ax^2 + bx + c^2$ нужно положить $ax^2 + bx + c^2 = (tx + c)^2$.

Пример 13. Решить в целых числах уравнение

$$xy = 2x - y.$$

Решение. Решая это уравнение относительно y, находим, что

$$y = \frac{2x}{x+1}.$$

Выделяя из дроби целую часть, получаем

$$y = 2 - \frac{2}{x+1}. \qquad (*)$$

Очевидно, что значение y будет целым лишь в случае, когда дробь $\frac{2}{x+1}$ будет целое число, что возможно при целом x лишь в случае, когда $x+1 = \pm 1$ или $x+1 = \pm 2$. Подставляя соответствующие x в формулу (*), находим все целые решения:

$x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = 4$; $x_3 = 1$; $y_3 = 1$; $x_4 = -3$; $y_4 = 3$.

ГЛАВА V

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ПРОГРЕССИИ

§ 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

1. Определение. Если каждому натуральному числу n отнесено по некоторому закону число a_n, то говорят, что задана числовая *последовательность*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots . \tag{1}$$

Числа a_1, a_2, a_3 и т. д. называются *членами* последовательности (1); они не обязательно различны между собой. В некоторых случаях последовательность задается формулой ее общего члена

$$a_n = f(n),\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots . \tag{2}$$

Зная ее, мы можем получить любой член последовательности. Для этого достаточно в правую часть формулы (2) вместо n подставить номер искомого члена. Например,

$$a_n = \frac{1}{n}\colon\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots;$$

$$a_n = (-1)^n\colon\quad 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ -1,\ \ldots;$$

$$a_n = 5\colon\quad 5,\ 5,\ 5,\ \ldots,\ 5,\ \ldots .$$

(Такая последовательность, общий член которой не зависит от n, называется постоянной.)

Структура формулы общего члена может быть и более сложной. Например, формула

$$a_n = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

где $k = 1,\ 2,\ \ldots$, задает последовательность

$$1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{2k-1},\ 2k,\ \frac{1}{2k+1},\ \ldots,$$

у которой члены с четными номерами и члены с нечетными номерами образуются по разным законам.

Иногда последовательность задается так называемым рекуррентным соотношением, т. е. формулой, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим. Например, $a_{n+1} = 2a_n + n$, $a_1 = 1$. Давая n значения 1, 2, 3, ..., мы последовательно получаем один за другим a_1, a_2, a_3, ...:

при $n = 1$ получаем $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$,

при $n = 2$ получаем $a_3 = 2a_2 + 2 = 8$,

при $n = 3$ получаем $a_4 = 2a_3 + 3 = 19$ и т. д.

Формула общего члена $a_n = f(n)$ может быть заданной для n, начиная с некоторого номера k. Тогда пишут $a_n = f(n)$, $n = k, k+1, \ldots$.

При этом первые члены последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ указываются. Например,

1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, ..., где $a_n = 2n - 4$ для $n = 7, 8, \ldots$.

Первые шесть членов последовательности a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 указаны; они не получаются из формулы для общего члена $a_n = 2n - 4$, которая задана лишь при $n \geqslant 7$.

Заметим, что по известным первым членам последовательности, если нет никаких других указаний, невозможно указать закон ее образования. Так, четыре первые члена некоторой последовательности

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

могут быть, например, началом последовательности нечетных чисел или последовательности простых нечетных чисел.

Не всякую последовательность можно задать формулой общего члена или рекуррентной формулой. Например, их нельзя указать для последовательности простых чисел

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

или для последовательности десятичных приближений (с недостатком) числа $\sqrt{2}$

$$1{,}4; \quad 1{,}41; \quad 1{,}414; \quad 1{,}4142, \ldots .$$

Но для каждой последовательности должен быть задан закон, по которому мы можем получить любой ее член. В каком виде задан этот закон — это не имеет значения.

II. Последовательность называется *ограниченной*, если существует положительное число M такое, что для всех членов последовательности выполняется неравенство $|a_n| \leqslant M$.

Если для любого числа $M > 0$ найдутся члены последовательности, превосходящие M по абсолютной величине, то такая последовательность называется *неограниченной*.

Например, последовательности

$$1, \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \qquad (M = 1)$$

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots, \qquad (M = 1)$$

$$1, \quad \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, \ldots, \qquad (M = 2)$$

ограниченные, а последовательность

$$1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$$

неограниченная.

Последовательность называется *возрастающей*, если для всех n

$$a_n < a_{n+1}.$$

Последовательность называется *убывающей*, если для всех n

$$a_n > a_{n+1}.$$

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

Например, последовательности

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, \ldots,$$

$$1, 4, 9, \ldots, n^2$$

монотонные, а последовательности

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots,$$

$$1, 0, 3, 0, \ldots, \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}n, 0, \ldots$$

немонотонные.

Замечание. К монотонным последовательностям относят также неубывающие ($a_n \leqslant a_{n+1}$) и невозрастающие последовательности ($a_n \geqslant a_{n+1}$).

III. **Предел последовательности. Определение.** Число A называется *пределом* последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такое натуральное число N, что для всех значений $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon. \tag{3}$$

В этом случае пишут: $A = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

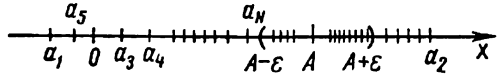


Рис. 19

На множестве действительных чисел неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \text{ при } n > N,$$

которое означает, что в интервале $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ (рис. 19) находятся все члены последовательности, номер которых превосходит N, а вне этого интервала лишь конечное число (не больше, чем N).

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$.

Решение. Возьмем, например $\varepsilon = 10^{-3}$. Найдем те члены данной последовательности, которые лежат в интервале $(2-10^{-3},$

$2+10^{-3}$), т. е. удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{2n-1}{n}-2\right|<10^{-3}.$$

Решая его, находим $\frac{1}{n}<10^{-3}$, $n>10^3$.

Итак, внутрь интервала $(2-10^{-3},\ 2+10^{-3})$ попадают все члены последовательности, номер которых $n>1000$.

Если взять $\varepsilon=10^{-5}$ и интервал $(2-10^{-5},\ 2+10^{-5})$, то внутрь этого интервала попадут все члены последовательности, номер которых $n>100\,000$.

Вообще для любого $\varepsilon>0$ внутрь интервала $(2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon)$ попадут все члены последовательности, которые удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{2n-1}{n}-2\right|<\varepsilon. \qquad (*)$$

Решая последнее неравенство, находим, что $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, все члены последовательности, номер которых $n>\frac{1}{\varepsilon}$, удовлетворяют неравенству (*). А это согласно определению предела последовательности и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$.

Не всякая последовательность имеет предел. Рассмотрим, например, последовательность с общим членом $a_n=\frac{1}{n}+(-1)^n$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Очевидно, $a_1=0$, $a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=-\frac{2}{3}$, $a_4=\frac{5}{4}$, $a_5=-\frac{4}{5}$ и т. д. Члены последовательности сгущаются к точкам -1 и 1. Эта последовательность не имеет предела. Действительно, если взять интервалы $(-1-\varepsilon,\ -1+\varepsilon)$ и $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$, то в них $\left(\text{при } \varepsilon<\frac{2}{3}\right)$ находится бесконечно много членов последовательности, но и вне каждого из них — также бесконечно много (рис. 20).

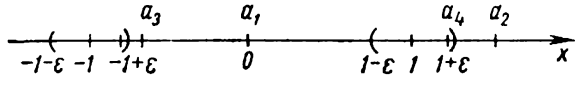


Рис. 20.

Следующие теоремы дают достаточное условие существования предела последовательности.

Теорема I. *Всякая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.*

Теорема II. *Если члены последовательности b_n, начиная с некоторого номера N, заключены между соответствующими членами a_n и c_n двух других последовательностей, т. е.*

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n \quad \text{для} \quad n\geqslant N$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, *то данная последовательность имеет предел, причем*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Доказательство этих теорем приводится в курсе высшей математики.

Тоже без доказательства отметим следующие свойства предела последовательности.

I. *Если последовательность имеет предел, то этот предел единственный.*

II. *Предел постоянной последовательности равен этой постоянной, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c = c.$$

III. *Предел алгебраической суммы последовательностей равен алгебраической сумме пределов этих последовательностей, если последние существуют, точнее, если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *существуют, то*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

IV. *Предел произведения последовательностей равен произведению пределов сомножителей, если последние существуют, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

В частности, если $a_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} (a \cdot b_n) = a \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Последнее означает, что при переходе к пределу постоянный множитель выносится за знак предела.

V. *Предел отношения двух последовательностей равен отношению пределов числителя и знаменателя, если последние существуют и предел знаменателя не равен нулю, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad (\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0).$$

§ 2. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. Последовательность чисел с общим членом $a_n = a + (n-1)d$, где a и d — любые заданные числа, называется *арифметической прогрессией.*

Число a называется *первым членом* арифметической прогрессии, d — *разностью* арифметической прогрессии. Для обозначения арифметической прогрессии употребляют знак $\div$, т. е. пишут

$$\div a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

При $d > 0$ прогрессия будет возрастающей, так как $a_{n+1} = a_1 + nd > a_1 + (n-1)d = a_n$, т. е. $a_{n+1} > a_n$; при $d < 0$ прогрессия убывающая ($a_{n+1} < a_n$).

Из данного определения вытекают следующие свойства членов арифметической прогрессии.

1. *Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с разностью d, т. е.*

$$a_{k+1} = a_k + d, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$
$$a_1 = a.$$

В самом деле,

$$a_{k+1} = a + k \cdot d = [a + (k-1)d] + d = a_k + d.$$

2. *Каждый член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое двух равноудаленных от него членов этой прогрессии, т. е.*

$$a_k = \frac{a_{k+m} + a_{k-m}}{2}, \tag{5}$$

где k и m — любые натуральные числа и $k > m$.

Действительно,

$$a_{k+m} = a_1 + d(k+m-1); \quad a_{k-m} = a_1 + d(k-m-1),$$

поэтому

$$a_{k+m} + a_{k-m} = 2a_1 + d(2k-2) = 2[a_1 + d(k-1)],$$

откуда

$$\frac{a_{k+m} + a_{k-m}}{2} = a_1 + d(k-1) = a_k.$$

3. *Для любой арифметической прогрессии*

$$a_k + a_l = a_r + a_s, \tag{6}$$

где k, l, r, s — номера членов, удовлетворяющие условию $k + l = r + s$.

В самом деле,

$$a_k + a_l = a_1 + d(k-1) + a_1 + d(l-1) = 2a_1 + d(k+l-2),$$
$$a_r + a_s = a_1 + d(r-1) + a_1 + d(s-1) = 2a_1 + d(r+s-2)$$

и так как, по условию $r + s = k + l$, то

$$a_k + a_l = a_r + a_s.$$

В частности, если арифметическая прогрессия состоит из n членов, то a_k и a_{n-k+1} являются ее членами, равноотстоящими от концов a_1 и a_n, причем

$$1 + n = k + (n - k + 1).$$

Поэтому согласно свойству 3

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \tag{6'}$$

т. е. *для любой конечной арифметической прогрессии сумма двух*

членов, равностоящих от ее концов, есть величина постоянная для данной прогрессии, равная сумме крайних членов.

Замечание. Свойство 1 так же, как и свойство 2, является условием достаточным для того, чтобы соответствующая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ была арифметической прогрессией. Действительно, если для последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

выполняются соотношения

$$a_{k+1} = a_k + d \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$a_1 = a,$$

где a и d—заданные числа, то написав эту формулу для $k=1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}$$

и сложив все эти равенства, получаем

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Последнее означает, что $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — арифметическая прогрессия.

Таким образом, арифметическую прогрессию можно определить как последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$, заданную рекуррентным соотношением: $a_{k+1} = a_k + d$, $a_1 = a$, $k = 1, 2, \ldots$.

Предлагаем читателю доказать, что последовательность чисел $a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots$, заданная рекуррентным соотношением $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, $a_1 = a$, $k = 2, 3, \ldots$, есть арифметическая прогрессия.

Последовательность же чисел, удовлетворяющая свойству 3, может и не быть арифметической прогрессией. Например, 1, 2, 4, 5—не есть арифметическая прогрессия, хотя $1 + 5 = 2 + 4$.

Сумма *n* членов арифметической прогрессии. Обозначим через S_n сумму первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \tag{7}$$

Запишем слагаемые в обратном порядке

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \tag{8}$$

Складывая почленно равенства (7) и (8) и группируя члены, получаем

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В скобках, число которых равно n, стоят суммы членов, равноудаленных от концов прогрессии.

По свойству 3 каждая из этих сумм равна a_1+a_n. Следовательно,

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\,n}{2}, \tag{9}$$

т. е. *сумма n последовательных членов арифметической прогрессии равна полусумме ее крайних членов, умноженной на число членов.*

Если в формуле (9) выразить a_n по формуле общего члена, то получаем

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n. \tag{9'}$$

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. Последовательность чисел с общим членом $a_n=aq^{n-1}$, где $a\neq 0$ и $q\neq 0$ — любые заданные числа, называется *геометрической прогрессией.*

Число a называется *первым членом* геометрической прогрессии, q — *знаменателем* геометрической прогрессии. Для обозначения геометрической прогрессии употребляют знак $\div\!\!\div$, т. е. пишут

$$\div\!\!\div a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots .$$

Из условия $a\neq 0$, $q\neq 0$ следует, что среди членов геометрической прогрессии не могут быть нули. При $a>0$ и $q>1$ геометрическая прогрессия возрастающая, так как $a_{k+1}=a_1q^k>a_1q^{k-1}=a_k$, т. е. $a_{k+1}>a_k$, при $0<q<1$ — убывающая ($a_{k+1}<a_k$).

Если $q<0$, то члены прогрессии — знакочередующиеся и она не будет монотонной.

Из определения геометрической прогрессии вытекают следующие свойства ее членов.

1. *Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на знаменатель прогрессии, т. е.*

$$\begin{aligned} &a_{k+1}=a_k\cdot q, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots \\ &a_1=a. \end{aligned} \tag{10}$$

В самом деле,

$$a_{k+1}=a_1q^k=a_1q^{k-1}\cdot q=a_k\cdot q.$$

2. *Квадрат каждого члена геометрической прогрессии равен произведению двух равноудаленных от него членов этой прогрессии, т. е.*

$$a_k^2=a_{k-m}\cdot a_{k+m}, \tag{11}$$

где k и m — любые натуральные числа и $k>m$.

Действительно,

$$a_{k+m}=a_1q^{k+m-1},\quad a_{k-m}=a_1q^{k-m-1}.$$

Поэтому

$$a_{k+m}\cdot a_{k-m}=a_1^2q^{2(k-1)}=a_k^2.$$

Если все члены геометрической прогрессии положительные числа, то свойство 2 можно записать формулой

$$a_k = \sqrt{a_{k-m} \cdot a_{k+m}}, \tag{12}$$

т. е. каждый член такой геометрической прогрессии есть среднее геометрическое членов, равноудаленных от него.

3. *Для любой геометрической прогрессии* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$$a_k \cdot a_l = a_r \cdot a_s, \tag{13}$$

где k, l, r, s*—номера членов и* $k+l=r+s$.

В самом деле, по определению геометрической прогрессии

$$a_k \cdot a_l = a_1 q^{k-1} \cdot a_1 q^{l-1} = a_1^2 q^{k+l-2},$$
$$a_r \cdot a_s = a_1 q^{r-1} \cdot a_1 q^{s-1} = a_1^2 q^{r+s-2},$$

и так как по условию $k+l=r+s$, то

$$a_k \cdot a_l = a_r \cdot a_s.$$

В частности, если геометрическая прогрессия состоит из n членов, то

$$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot a_n$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{13'}$$

т. е. *произведение двух членов конечной геометрической прогрессии, равноотстоящих от ее концов, есть величина постоянная для данной прогрессии, равная произведению ее крайних членов.*

Замечание. Так же, как и в случае арифметической прогрессии, каждое из свойств 1 и 2 является условием необходимым и достаточным для того, чтобы соответствующая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ была геометрической прогрессией.

Предоставляем читателю доказать, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, заданная рекуррентным соотношением $a_{k+1} = a_k q$ $(q \neq 0)$, $a_1 = a \neq 0$, есть геометрическая прогрессия (см. замечание к § 2).

Покажем, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, заданная рекуррентным соотношением $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$—заданные числа, $k = 2, 3, \ldots$, есть геометрическая прогрессия. С этой целью запишем каждое из равенств $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, $k = 2, 3, \ldots, n$ в виде пропорции

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Получаем:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

или

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

где q—величина каждого из равных отношений.

Приравнивая q каждое из этих отношений, получаем:

$$a_2 = a_1 q,\ a_3 = a_2 q,\ \ldots,\ a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Перемножая правые и левые части этих равенств, после сокращений получаем $a_{n+1} = aq^n$. Следовательно, данная последовательность есть геометрическая прогрессия.

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, удовлетворяющая свойству 3, может не быть геометрической прогрессией. Например, числа 1, 2, 3, 6 не образуют геометрической прогрессии, хотя $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$.

Сумма n членов геометрической прогрессии. Обозначим через S_n сумму n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \tag{14}$$

Умножая все члены этого равенства на знаменатель прогрессии q и учитывая, что $a_k \cdot q = a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, имеем

$$S_n q = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n q. \tag{15}$$

Вычтем из равенства (14) равенство (15). Тогда

$$S_n (1 - q) = a_1 - a_n q,$$

т. е.

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}, \tag{16}$$

если $q \neq 1$. Так как $a_n = a_1 q^{n-1}$, то из формулы (16) получим формулу

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}, \tag{17}$$

определяющую сумму S_n членов прогрессии через ее знаменатель и первый член.

Если $q = 1$, то $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ и

$$S_n = n \cdot a_1.$$

§ 4. БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1. **Определение.** Бесконечная геометрическая прогрессия $\pm a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, знаменатель которой $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей геометрической* прогрессией.

При $a > 0$ и $0 < q < 1$ члены прогрессии монотонно убывают:

$$a_n = a_1 q^{n-1} < a_1 q^{n-2} = a_{n-1}.$$

При $q < 0$ прогрессия не монотонна (см. § 3).

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если* $|q| < 1$, *то* $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное положительное число. Рассмотрим неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$. Решая его

относительно n, находим

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ и всех n, бóльших числа $\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$, справедливо неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$, что по определению предела последовательности означает

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

Из леммы и свойств предела вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} aq^{n-1} = a \cdot \lim_{n \to \infty} q^{n-1} = 0,$$

если $|q| < 1$, т. е. член бесконечно убывающей геометрической прогрессии стремится к нулю, когда его номер неограниченно возрастает.

II. **Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.** Совершенно очевидно, что понимая сумму в обычном смысле, ее нельзя определить для бесконечного числа слагаемых (складывая последовательно слагаемые, мы никогда не закончим процесс суммирования). Поэтому в случае бесконечно убывающей геометрической прогрессии поступают следующим образом.

Вычисляют по формуле (17) сумму двух, трех и т. д. первых ее членов

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q},$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q},$$

. . . . . .

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

. . . . . .

Эти суммы тоже образуют бесконечную последовательность, которая имеет предел. Действительно, по свойству предела

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n \to \infty} (1-q^n) = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (18)$$

При увеличении n в сумму S_n будет входить все большее и большее количество членов геометрической прогрессии. Поэтому, естественно понимать под выражением

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

предел последовательности S_1, S_2, ..., S_n, ..., который и называют суммой S бесконечно убывающей прогрессии.

Таким образом, учитывая это определение и результат (18), имеем

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

§ 5. ЗАДАЧИ

Прогрессии определяются двумя элементами: первым членом и разностью в случае арифметической и первым членом и знаменателем в случае геометрической прогрессии. Если прогрессии конечны, то для их определения нужно знать и n — число членов.

Пример 1. Найти все прогрессии, являющиеся одновременно и геометрическими и арифметическими.

Решение. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ составляют геометрическую прогрессию. Тогда $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Так как они составляют и арифметическую прогрессию, то по свойству 2 (§ 2) $a_{k+1} + a_{k+3} = 2a_{k+2}$, т. е. $a_1q^k + a_1q^{k+2} - 2a_1q^{k+1} = 0$. Сокращая на a_1q^k ($a \neq 0$, $q \neq 0$!), получаем уравнение $(q-1)^2 = 0$, откуда следует, что $q = 1$ и данная прогрессия есть последовательность равных чисел $a_1, a_1, \ldots, a_1, \ldots$.

Вывод. *Только последовательность равных чисел является одновременно и геометрической и арифметической прогрессией.*

Отсюда вытекает, что арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, у которых не все $a_i = b_i$ не могут иметь равными любую тройку своих последовательных членов, так как из условия $a_i = b_k$, $a_{i+1} = b_{k+1}$, $a_{i+2} = b_{k+2}$ вытекает, что $b_n = a_n$ для всех n.

Случай $a_i = b_k$ и $a_{i+1} = b_{k+1}$ возможен.

Пример 2. Даны две возрастающие прогрессии с положительными членами: геометрическая $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ и арифметическая $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, у которых $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$. Доказать, что $a_n < b_n$ при $n \geqslant 3$.

Решение. Из условия $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$ следует, что $a_1 + d = a_1q$. Поэтому $d = a_1(q-1)$ и $a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 + a_1(n-1)(q-1)$. Таким образом, наша задача сводится к доказательству неравенства

$$a_1 + a_1(n-1)(q-1) < a_1q^{n-1},$$

или

$$(n-1)(q-1) < q^{n-1} - 1 \qquad (a_1 \neq 0!).$$

Раскладывая правую часть последнего неравенства на множители, получаем

$$(n-1)(q-1) < (q-1)(q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1),$$
$$n - 1 < q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1.$$

Последнее, очевидно, так как $q > 1$.

Пример 3. Найти все прямоугольные треугольники, стороны которых составляют: 1) арифметическую прогрессию, 2) геометрическую прогрессию.

Решение. 1. Пусть a, $a+d$, $a+2d$ — стороны прямоугольного треугольника, где $a > 0$ и $d > 0$. Тогда $(a+2d)^2 = a^2 + (a+d)^2$. После приведения подобных членов и группировки получаем

$$(a+d)(3d-a) = 0.$$

Так как $a + d > 0$, то $a = 3d$. Итак, стороны искомых треугольни-

ков равны соответственно $3d$, $4d$, $5d$, где d—любое положительное число.

2. Пусть a, aq, aq^2—стороны прямоугольного треугольника, где $a>0$, $q>1$. Тогда $a^2q^4=a^2+a^2q^2$. Решая это уравнение, находим, что $q=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ (корень уравнения $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}<0$ отбрасываем). Итак, стороны искомых треугольников равны соответственно a, $\frac{a\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$, $\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$, где a—любое положительное число.

Пример 4. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 8, то прогрессия станет арифметической. Но если после этого увеличить последнее число на 64, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение. Можно решать задачу с тремя неизвестными a, b, c и свести ее к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} b^2=ac, \\ 2(b+8)=a+c, \\ (b+8)^2=a(c+64). \end{cases}$$

Однако проще свести задачу к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Обозначая числа через a, aq и aq^2, имеем

$$\begin{cases} 2(aq+8)=a+aq^2, \\ (aq+8)^2=a(aq^2+64). \end{cases}$$

Упрощая второе уравнение, получаем

$$aq+4-4a=0.$$

Исключая из первого и полученного уравнения a, имеем

$$q^2+2q-15=0,$$

откуда следует, что $q_1=3$; $q_2=-5$, $a^{(1)}=\frac{4}{4-q_1}=4$, $a^{(2)}=\frac{4}{4-q_2}=\frac{4}{9}$. Таким образом, мы получили две геометрические прогрессии

$$\pm 4,\ 12,\ 36 \text{ и } \pm \frac{4}{9},\ -\frac{20}{9},\ \frac{100}{9}.$$

Пример 5. Найти четыре действительных числа, из которых первые три составляют геометрическую, а последние три—арифметическую прогрессию. Сумма крайних членов равна 14, а сумма средних 12.

Решение. Четыре неизвестных числа x, y, z и t выразим через два a и q:

Первые три числа: a, aq, aq^2. Чтобы выразить через a и q четвертое число t, заметим, что числа aq, aq^2 и t составляют арифметическую прогрессию и по свойству 2 (см. § 2) $t=2aq^2-aq$.

Для определения a и q имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} a+2aq^2-aq=14, \\ aq+aq^2=12. \end{cases}$$

Исключая из этой системы a, получаем квадратное уравнение $5q^2-13q+6=0$, откуда находим: $q_1=2$; $q_2=\frac{3}{5}$.

Соответствующие значения a равны 2 и $\frac{25}{2}$.

Итак, мы получили два решения:

$$2,\ 4,\ 8,\ 12 \text{ и } \frac{25}{2},\ \frac{15}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{3}{2}.$$

Пример 6. Три числа, сумма которых равна 114, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической или как первый, четвертый и двадцать пятый члены арифметической прогрессии. Найти эти числа.

Решение. Прежде всего возникает вопрос, как обозначить неизвестные три числа—как члены арифметической или как члены геометрической прогрессии?

Если их обозначить как члены геометрической прогрессии: a, aq и aq^2, то из условия задачи имеем следующие три уравнения:

$$\begin{cases} a+aq+aq^2=114, \\ aq=a+3d, \\ aq^2=a+24d, \end{cases}$$

где d—промежуточная неизвестная величина. Если же их обозначить как члены арифметической прогрессии a, $a+3d$, $a+24d$, то имеем два уравнения:

$$a+a+3d+a+24d=114,$$
$$(a+3d)^2=a(a+24d).$$

Этот способ, очевидно, предпочтительней. Упрощая последнюю систему, находим

$$\begin{cases} a+9d=38, \\ d^2=2ad. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим два решения: 38, 38, 38 и 2, 14, 98.

Первый член геометрической прогрессии порой выгодно обозначать через $\frac{a}{q^k}$, *где* k—*некоторое натуральное число; такое обозначение может упростить решение задачи. Аналогично для арифметической прогрессии—первый член равен* $a-d(k-1)$.

Пример 7. Определить три числа, образующие геометрическую прогрессию, если сумма их равна 21, а сумма обратных величин равна $\frac{7}{12}$.

Решение. Искомые числа обозначим через $\frac{a}{q}$, a, aq. Из условий задачи имеем

$$\begin{cases} \frac{a}{q}+a+aq=21, \\ \frac{q}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{aq}=\frac{7}{12}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=21, \\ \frac{1}{a}\left(q+1+\frac{1}{q}\right)=\frac{7}{12}. \end{cases}$$

Деля первое уравнение на второе $\left(q+1+\frac{1}{q}\neq 0\right)$, находим

$$a^2=36,\ a=\pm 6,\ q^2+q+1=\pm\frac{7}{2}q.$$

Для $a=6$ получаем:

$$q_1^{(1)}=\frac{1}{2};\quad q_2^{(1)}=2.$$

Для $a=-6$ получаем:

$$q_1^{(2)}=\frac{-9+\sqrt{65}}{4};\quad q_2^{(2)}=\frac{-9-\sqrt{65}}{4}.$$

Таким образом, мы получаем четыре решения:

$$\underbrace{12,\ 6,\ 3};\ \underbrace{3,\ 6,\ 12};\ \underbrace{\frac{24}{9-\sqrt{65}},\ -6,\ \frac{3(9-\sqrt{65})}{2}};$$

$$\underbrace{\frac{3(9-\sqrt{65})}{2},\ -6,\ \frac{24}{9-\sqrt{65}}}.$$

Замечание. Прогрессии a_1, a_2, a_3 и a_3, a_2, a_1 считаются различными.

Пример 8. Определить стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию, причем периметр треугольника равен 15.

Решение. Выгодно обозначить стороны треугольника через $a-d$, a, $a+d$ ($d\geqslant 0$, $a>d$). Тогда из условий имеем $a-d+a+a+d=15$, т. е. $a=5$.

Так как в треугольнике $a+d<(a-d)+a$, то $d<\frac{a}{2}$ и целое. Следовательно, $d=0$, $d=1$ и $d=2$. Получаем три решения: 5, 5, 5; 4, 5, 6 и 3, 5, 7.

Очевидно, что если числа a_1, a_2, ..., a_n образуют прогрессию, арифметическую или геометрическую, то числа a_n, a_{n-1}, ..., a_1, за-

писанные в обратном порядке, образуют также прогрессию, арифметическую или геометрическую соответственно. При этом, если d — разность первой прогрессии, то $-d$ — разность второй (для геометрической: q — знаменатель первой прогрессии, $\frac{1}{q}$ — знаменатель второй).

Используем это замечание при решении следующей задачи.

Пример 9. Найти числа, составляющие арифметическую прогрессию, зная, что сумма первых четырех членов равна 68, сумма последних четырех членов равна —36, а сумма всех членов равна 68.

Решение. Сумма последних четырех членов прогрессии a_1, a_2, ..., a_n с разностью d есть сумма первых четырех членов прогрессии a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 с разностью $-d$. Следовательно, согласно формуле (9′) из условия задачи имеем

$$\begin{cases} \frac{2a_1+3d}{2}\cdot 4=68, \\ \frac{2a_n-3d}{2}\cdot 4=-36, \\ \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=68. \end{cases}$$

Складывая два первые уравнения системы, находим, что $a_1+a_n=8$. Тогда из третьего уравнения следует, что $n=17$. Дальнейшее решение очевидно. Решив систему

$$\begin{cases} 2a_1+3d=34, \\ 2a_1+29d=-18, \end{cases}$$

получаем $a_1=20$, $d=-2$.

Как в геометрической, так и в арифметической прогрессии любой член a_k можно выразить через любой другой член a_l соответственно по формулам

$$a_k=a_l\cdot q^{k-l} \text{ и } a_k=a_l+d(k-l).$$

Пример 10. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, даны $a_{m+n}=A$ и $a_{m-n}=B$. Найти a_m и a_n.

Решение. Так как $a_{m+n}=a_{m-n}\cdot q^{m+n-(m-n)}$, то $A=B\cdot q^{2n}$, откуда $q=\sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$ (берем арифметическое значение корня, так как $q>0$ по условию).

Теперь находим a_m и a_n:

$$a_m=a_{m+n}\cdot q^{m-(m+n)}=a_{m+n}\cdot q^{-n}=A\cdot\sqrt[2n]{\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}}=\sqrt{AB},$$

$$a_n=a_{m+n}\cdot q^{n-(m+n)}=a_{m+n}\cdot q^{-m}=A\cdot\sqrt[2n]{\left(\frac{A}{B}\right)^{-m}}=A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{m}{2n}}.$$

Замечание. Член a_m можно найти сразу, воспользовавшись свойством 2 (§ 3). Так как члены a_{m+n} и a_{m-n} равноудалены от

a_m, то

$$a_m = \sqrt{a_{m+n} \cdot a_{m-n}} = \sqrt{AB}.$$

При решении некоторых задач полезно использовать следующее свойство геометрической прогрессии.

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *— две геометрические прогрессии, то при любых действительных* α, β *и* $A \neq 0$ *числа* $c_n = A \cdot (a_n)^\alpha \cdot (b_n)^\beta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *тоже образуют геометрическую прогрессию.*

В самом деле, если q_1 — знаменатель первой прогрессии, а q_2 — знаменатель второй прогрессии, то

$$a_n = a_1 q_1^{n-1}, \quad b_n = b_1 \cdot q_2^{n-1}$$

и

$$c_n = A a_1^\alpha q_1^{(n-1)\alpha} \cdot b_1^\beta \cdot q_2^{(n-1)\beta} = A a_1^\alpha \cdot b_1^\beta (q_1^\alpha \cdot q_2^\beta)^{n-1} = c_1 \cdot q^{n-1},$$

где $c_1 = A a_1^\alpha b_1^\beta$, $q = q_1^\alpha \cdot q_2^\beta$. Это означает, что последовательность c_1, $c_2, \ldots, c_n, \ldots$ есть геометрическая прогрессия, первый член которой равен $A a_1^\alpha b_1^\beta$, а знаменатель $q_1^\alpha \cdot q_2^\beta$.

Из этого свойства вытекают следующие частные случаи.

1. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия, то числа $a_1^\alpha, a_2^\alpha, \ldots, a_n^\alpha, \ldots$ также образуют геометрическую прогрессию (достаточно взять $A = 1$ и $b_n = 1$).

2. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия, то числа $Aa_1, Aa_2, \ldots, Aa_n, \ldots$ также образуют геометрическую прогрессию.

Приведем несколько задач, при решении которых используются эти свойства.

Пример 11. Последовательность чисел образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна 8. Найти эту прогрессию, если сумма их кубов равна $\frac{512}{7}$.

Решение. Согласно доказанному кубы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии также образуют геометрическую прогрессию, причем бесконечно убывающую, так как $|q^3| < 1$, если $|q| < 1$.

Обозначая через a первый член, а через q знаменатель данной прогрессии, согласно формуле (18) имеем

$$\frac{a}{1-q} = 8.$$

Первый член новой прогрессии равен a^3, ее знаменатель q^3, поэтому

$$\frac{a^3}{1-q^3} = \frac{512}{7}.$$

Решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1-q} = 8, \\ \dfrac{a^3}{1-q^3} = \dfrac{512}{7}, \end{cases}$$

находим $q_1=\frac{1}{2}$, $q_2=2$ (не годится), $a=4$. Следовательно, $\div 4,2,1,\frac{1}{2},\ldots$ —искомая прогрессия.

Пример 12. Доказать, что если члены a_p, a_q, a_r и a_s арифметической прогрессии составляют геометрическую прогрессию, то $p-q$, $q-r$ и $r-s$ будут последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение. Четыре последовательных члена геометрической прогрессии дают следующий ряд равных отношений:

$$\frac{a_q}{a_p}=\frac{a_r}{a_q}=\frac{a_s}{a_r}=q.$$

Составляя производную пропорцию (см. гл. II), получаем

$$\frac{a_q-a_p}{a_p}=\frac{a_r-a_q}{a_q}=\frac{a_s-a_r}{a_r}. \tag{19}$$

Но $a_q-a_p=d(q-p)$, $a_r-a_q=d(r-q)$, $a_s-a_r=d(s-r)$—по свойству членов арифметической прогрессии (см. указания к примеру 10). Тогда из пропорции (19) следует, что

$$\frac{q-p}{a_p}=\frac{r-q}{a_q}=\frac{s-r}{a_r}=A,$$

где A—величина равных отношений, или $q-p=A\cdot a_p$, $r-q=A\cdot a_q$, $s-r=A\cdot a_r$. Числа $q-p$, $r-q$, $s-r$ пропорциональны последовательным членам геометрической прогрессии и, следовательно, также образуют геометрическую прогрессию.

Пример 13. Даны две геометрические прогрессии, состоящие из одинакового числа членов. Первый член первой прогрессии равен 20, знаменатель ее $\frac{3}{4}$. Первый член второй прогрессии равен 4, а знаменатель $\frac{2}{3}$. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма всех таких произведений равна $158\frac{3}{4}$. Найти число членов этих прогрессий.

Решение. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$—первая прогрессия и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$—вторая прогрессия. Тогда последовательность $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots, a_nb_n$ также является геометрической прогрессией, первый член которой $a_1b_1=80$ и $q=q_1\cdot q_2=\frac{1}{2}$. По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем

$$S_n=\frac{a_1b_1(1-q^n)}{1-q},$$

или

$$158\frac{3}{4}=\frac{80\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Решая последнее уравнение относительно n, находим $\frac{1}{2^n}=\frac{1}{128}$, т. е. $n=7$.

В замечаниях, сделанных в конце § 2 и 3, мы показали, что как для арифметической, так и для геометрической прогрессии существуют три эквивалентных между собой определения. В каких случаях выгодно брать то или иное определение, зависит от условий задач.

Пример 14. Доказать, что если положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ также образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Покажем, что $\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ при условии, что a, b и c образуют арифметическую прогрессию, т. е. $2b=a+c$.

Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=$$
$$=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{-d}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{-d}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{d}=\frac{c-a}{d(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=$$
$$=\frac{2d}{d(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}.$$

Следовательно, числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, из которых второе есть среднее арифметическое крайних, образуют арифметическую прогрессию.

§ 6. СУММИРОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть даны числа a_1, a_2, ..., a_n. Как найти сумму

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n?$$

Эта задача решена нами для случая арифметической и геометрической прогрессии. В общем же случае далеко не всегда удается найти формулу S_n для любого n и даже в тех случаях, когда это можно сделать, для ее нахождения требуются большие навыки в изобретении различных приемов.

Остановимся на некоторых задачах и методах их решений.

1. Сведение к известным суммам. Под «известными» суммами мы будем понимать суммы прогрессий и суммы равных степеней натуральных чисел $S_n^{(p)}=1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p$ для 1) $p=2$ и 2) $p=3$. Вычислим их.

Пример 1. Найти значения $S_n^{(2)}$ и $S_n^{(3)}$.

Решение. 1. Положим в тождестве $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$ последовательно $k=0, 1, 2, \ldots, n$. Имеем:

$$(0+1)^3=1^3,$$
$$(1+1)^3=1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1,$$
$$(2+1)^3=2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1.$$

Складывая левые и правые части всех этих равенств, получаем

$$(n+1)^3=3S_n^{(2)}+3S_n^{(1)}+n+1,$$

где $S_n^{(1)}=1+2+\ldots+n=\frac{n+1}{2}\cdot n$ — сумма членов арифметической прогрессии. Поэтому

$$S_n^{(2)}=\frac{1}{3}\left[(n+1)^3-3\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n-n-1\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Положим в тождестве $(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$ последовательно $k=0, 1, 2, \ldots, n$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&(0+1)^4=1^4,\\
&(1+1)^4=1^4+4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1,\\
&(2+1)^4=2^4+4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(n+1)^4=n^4+4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1.
\end{aligned}$$

Складывая левые и правые части всех этих равенств, получаем

$$(n+1)^4=4S_n^{(3)}+6S_n^{(2)}+4S_n^{(1)}+n+1,$$

откуда

$$S_n^{(3)}=\frac{1}{4}\left[(n+1)^4-6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n-n-1\right]=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Так последовательно можно найти значения $S_n^{(p)}$ для любого натурального p.

Пример 2. Дана последовательность чисел a_0 a_1, ..., a_n такая, что $a_k-a_{k-1}=k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$; $a_0=0$. Найти сумму $a_0+a_1+\ldots+a_n$.

Решение. Прежде всего найдем формулу для общего члена этой последовательности. Обозначая $S_k=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_k$, запишем эту сумму одну под другой со сдвигом на один член:

$$\begin{aligned}
S_k&=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k,\\
S_k&=\quad a_0+a_1+\ldots+a_{k-2}+a_{k-1}+a_k.
\end{aligned}$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее, получим

$$\begin{aligned}
0&=a_0+(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\ldots+(a_k-a_{k-1})-a_k=\\
&=1+2+\ldots+k-a_k=\frac{k(k+1)}{2}-a_k.
\end{aligned}$$

Итак,

$$a_k=\frac{k+1}{2}\cdot k=\frac{1}{2}(k^2+k).$$

Теперь легко получаем S_n:

$$\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{2}[(1^2+1)+(2^2+2)+\ldots+(n^2+n)]=\frac{1}{2}\left[S_n^{(2)}+S_n^{(1)}\right]=\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n+1}{2}\cdot n\right]=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Пример 3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — геометрическая прогрессия и $q\neq1$. Найти сумму произведений $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$.

Решение. Обозначая $S_n=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$, находим $S_n\cdot q$, где q — знаменатель геометрической прогрессии:

$$S_nq=a_1b_1q+a_2b_2q+\ldots+a_nb_nq=a_1b_2+a_2b_3+\ldots+a_{n-1}b_n+a_nb_nq.$$

Записывая S_n и S_nq одно под другим со сдвигом на один член:

$$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$
$$S_nq = \quad a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_nq$$

и вычитая из верхнего равенства нижнее, получаем

$$S_n(1-q) = a_1b_1 + b_2(a_2-a_1) + b_3(a_3-a_2) + \ldots + b_n(a_n-a_{n-1}) - a_nb_nq =$$
$$= a_1b_1 + d(b_2+b_3+\ldots+b_n) - a_nb_nq = a_1b_1 + d\frac{b_2-b_nq}{1-q} - a_nb_nq,$$

где d — разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Пример 4. Дана последовательность $a_1=1$, $a_2=11$, $\ldots$, $a_n=\underbrace{11\ldots1}_{n}$. Найти сумму

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n}.$$

Решение. Найдем формулу общего члена данной последовательности в ином виде. Очевидно, что

$$a_1=\frac{10-1}{9},\quad a_2=\frac{10^2-1}{9},\quad a_3=\frac{10^3-1}{9},\quad \ldots,\quad a_n=\frac{10^n-1}{9}.$$

Тогда

$$S_n=\frac{1}{9}[(10-1)+(10^2-1)+\ldots+(10^n-1)]=\frac{1}{9}[10+10^2+\ldots+10^n-n]=$$
$$=\frac{1}{9}\left[\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right]=\frac{10^{n+1}-10}{81}-\frac{n}{9}.$$

II. **Применение метода математической индукции.** Метод математической индукции применим в том случае, когда нам удалось угадать формулу, выражающую S_n в зависимости от n и нужно доказать справедливость этой формулы.

Пример 5. Доказать, что

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=$$
$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}. \qquad (23)$$

Решение. Для $n=1$ и $n=2$ формула (23) справедлива, так как

$$1-\frac{x}{1!}=(-1)^1\frac{x-1}{1}\quad\text{и}\quad 1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=(-1)^2\frac{(x-1)(x-2)}{2!}.$$

Допуская теперь, что равенство (23) справедливо для $n-1$, докажем его для n.

Согласно нашему допущению

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)}{(n-1)!}=$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{(x-1)\ldots(x-n+1)}{(n-1)!}.$$

Тогда

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}=$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}=$$

$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}(-n+x)=$$

$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(x-n)}{n!}.$$

III. **Представление членов последовательности в виде алгебраической суммы отдельных слагаемых.** Такое представление при суммировании приводит иногда к уничтожению почти всех членов последовательности. Проиллюстрируем этот метод на следующих примерах.

Пример 6. Найти сумму $S_n=1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n!$

Решение. Преобразуем каждый член данной суммы по формуле

$$k\cdot k!=[(k+1)-1]\,k!=(k+1)!-k!.$$

Тогда

$$S_n=(2!-1!)+(3!-2!)+\ldots+[(n+1)!-n!]=(n+1)!-1.$$

Пример 7. Найти сумму $S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Решение. Каждое слагаемое $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ представим в виде алгебраической суммы трех дробей:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}, \tag{24}$$

где коэффициенты A, B и C нужно подобрать так, чтобы равенство (24) было справедливым для всех натуральных k. С этой целью приведем правую часть равенства (24) к общему знаменателю. Получаем

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A(k^2+3k+2)+B(k^2+2k)+C(k^2+k)}{k(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k^2(A+B+C)+k(3A+2B+C)+2A}{k(k+1)(k+2)},$$

Из равенства этих дробей вытекает равенство их числителей, т. е.

$$1=k^2(A+B+C)+k(3A+2B+C)+2A. \tag{25}$$

Для того чтобы соотношение (25) имело место для всех k, достаточно, чтобы

$$\begin{cases} A+B+C=0,\\ 3A+2B+C=0,\\ 2A=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $A=\frac{1}{2}$; $B=-1$; $C=\frac{1}{2}$.

Подставляя полученные значения A, B и C в равенство (24), получаем тождество

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right), \tag{26}$$

справедливое для любого натурального k. Полагая в тождестве (26) $k=1, 2, \ldots, n$, находим

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right.$$

Теперь нетрудно заметить, что все слагаемые записанной суммы, кроме трех, взаимно уничтожаются, т. е.

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

ГЛАВА VI
СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

§ 1. СОЕДИНЕНИЯ. ВИДЫ СОЕДИНЕНИЙ

Пусть A — совокупность различных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, объединенных каким-нибудь общим признаком. Например, A — есть совокупность нечетных чисел от 1 до 99, или учащихся данной школы, или заданных точек на плоскости и т. д. Вместо слова «совокупность» будем говорить «множество».

Итак, A — множество, состоящее из конечного числа элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Из различных элементов множества A можно образовывать группы. Если в каждую группу входит одно и то же число элементов $m\,(m \leqslant n)$, взятых из множества A, то говорят, что они образуют *соединения* из n элементов по m в каждом. В зависимости от того, входят ли в соединение все элементы множества A или только часть их, играет ли роль порядок элементов или не играет, различают три вида соединений: 1) *размещения*, 2) *перестановки* и 3) *сочетания*.

Определение 1. Соединения, каждое из которых содержит m различных элементов $(m \leqslant n)$, взятых из n элементов множества A, отличающиеся друг от друга или составом элементов, или их порядком, называются *размещениями* из n элементов по m в каждом.

Число таких размещений обозначается символом A_n^m. Так, например, различные трехзначные числа, составленные из девяти цифр 1, 2, 3, ..., 9 и не содержащие одинаковых цифр, образуют размещения. Их число есть A_9^3.

Определение 2. Соединения, в каждое из которых входят все n элементов множества A и которые, следовательно, отличаются друг от друга только порядком элементов, называются *перестановками* из n элементов. Число таких перестановок обозначается символом P_n. Перестановки являются частным случаем размещений, когда $m = n$. Поэтому $P_n = A_n^n$.

Определение 3. Соединения, каждое из которых содержит m различных элементов $(m \leqslant n)$, взятых из n элементов множества A, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом, называются *сочетаниями* из n элементов по m.

Число таких сочетаний обозначается символом C_n^m или $\binom{n}{m}$. Изменение порядка элементов внутри одного сочетания не приводит к новому сочетанию. Например, всевозможные комбинации трех различных сомножителей, образованные из пяти цифр 1, 2, 3, 5, 7, есть сочетания из пяти элементов по 3, так как изменение порядка сомножителей здесь не дает ничего нового.

Выведем формулы числа размещений, перестановок и сочетаний.

Теорема 1. *Число всевозможных размещений из n элементов по m в каждом равно произведению m последовательно убывающих на еди-*

ницу чисел, из которых большее есть n, т. е.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1)^*. \qquad (1)$$

Доказательство проведем методом индукции. Если $m=1$, то, очевидно, что $A_n^1 = n$, так как из n различных элементов можно составить n различных размещений по одному элементу в каждом.

Допустим теперь, что составлены все A_n^{m-1} размещений, причем число таких размещений равно

$$A_n^{m-1} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)+1] = \\ = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2). \qquad (2)$$

Составим теперь размещения из n элементов по m в каждом. С этой целью возьмем произвольное размещение, содержащее $m-1$ элементов и будем присоединять к «его правому краю» по одному элементу из $n-m+1$ не вошедших в него элементов. При этом получится $n-m+1$ различных размещений по m элементов. Поступая так с каждым размещением, содержащим $m-1$ элементов (число этих размещений равно A_n^{m-1}), получаем $(n-m+1)\,A_n^{m-1}$ размещений по m элементов. Все эти размещения различны. В самом деле, два произвольных размещения по m элементов либо образованы из одного размещения, содержащего $m-1$ элементов, и тогда они отличаются присоединенными крайними элементами справа. Если они образованы из двух различных размещений, содержащих $m-1$ элементов, то они отличаются порядком или элементами среди первых $m-1$ членов.

Покажем, что в это число вошли все размещения по m элементом из n. Действительно, любое размещение из m элементов после отбрасывания крайнего справа элемента вошло в число размещений, содержащих по $m-1$ элементов, и, следовательно, образовано из него приписыванием справа отброшенного элемента, который не содержится среди его первых $m-1$ элементов.

Таким образом, число всех различных размещений из n элементов по m, т. е. A_n^m, вычисляется по формуле

$$A_n^m = (n-m+1)\cdot A_n^{m-1},$$

или в силу нашего предположения (2)

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m)(n-m+2)(n-m+1). \qquad (3)$$

Следствие. Полагая в равенстве (3) $m=n$, имеем

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!, \qquad (4)$$

т. е. число всевозможных перестановок из n элементов равно $n!$.

---

* Такое произведение называется обобщенной степенью и обозначается символом $n^{[m]} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$. Если $n=m$, то произведение $n^{[n]} = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ обозначается символом $n!$ (n факториал), причем условились считать, что $0!=1$. В дальнейшем будет понятно удобство такого соглашения. В литературе встречается также символ $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots 1$. Например, $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1) = (2n+1)!!$. Ясно, что $(2n)!! = 2^n\cdot n!$

Теорема 2. *Число всех различных сочетаний из n элементов по m в каждом выражается формулой*

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть составлены все сочетания из n элементов по m в каждом. Если в каждом из этих сочетаний произвести всевозможные перестановки элементов, то получатся все размещения из n элементов по m в каждом. В самом деле, взяв произвольное размещение по m элементов, можно указать сочетание, содержащее те же элементы, которое может отличаться от взятого размещения только лишь порядком элементов. Но тогда это размещение совпадает с одной из перестановок, которая получается из соответствующего сочетания. Остается показать, что среди всех полученных размещений нет одинаковых. Для этого возьмем два различных размещения. Они получены либо из одного сочетания и тогда отличаются порядком, либо из различных сочетаний и тогда отличаются хотя бы одним элементом. И в том, и в другом случае эти размещения различны.

Из одного сочетания получается $P_m = m!$ перестановок, из C_n^m сочетаний — $C_n^m \cdot P_m$ перестановок.

Следовательно, $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$ и $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$.

Формулу (5) можно записать в другом виде.

Предполагая, что $1 \leqslant m < n$, умножим числитель и знаменатель дроби (5) на произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-m) = (n-m)!$. Имеем

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots 1}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \quad (6)$$

Заметим, что формула (6), выведенная в предположении $1 \leqslant m < n$, остается верной для $m = n$. В самом деле, при $m = n$ равенство $C_n^n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$ ($0! = 1$, см. сноску на стр. 197) очевидно, так как из n элементов можно образовать только одно сочетание, содержащее n элементов.

Из определения размещений, перестановок и сочетаний следует, что выражения A_n^m, P_n и C_n^m имеют смысл лишь для $1 \leqslant m \leqslant n$. При $m > n$ полагают по соглашению $A_n^m = C_n^m = 0$. Если $m = 0$, то считают $A_n^0 = 1$ и $C_n^0 = 1$. Последнее согласуется с формулой (6). Полагая в ней $m = 0$, имеем

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Таким образом, можно считать, что формула (6) справедлива для $0 \leqslant m \leqslant n$.

Свойства сочетаний. 1. Для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \quad (7)$$

Согласно формуле (6)

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,(n-n+m)!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = C_n^m.$$

Можно доказать свойство (7) для $m \neq 0$ и $m \neq n$ другим способом. Образуем всевозможные сочетания из n элементов по m в каждом и рассмотрим соединения из элементов, не вошедших в каждое из таких сочетаний. Этих соединений будет столько, сколько сочетаний по m элементов, т. е. C_n^m. С другой стороны, эти соединения образуют всевозможные различные сочетания из n элементов по $n-m$ в каждом. (Доказательство этих утверждений проводится по той же схеме, как и в теореме 2. Предоставляем его читателю.)

Таким образом, $C_n^{n-m} = C_n^m$.

2. Для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство

$$(n+1)\,C_n^m = (m+1)\,C_{n+1}^{m+1}. \tag{8}$$

В самом деле, согласно формуле (6)

$$(m+1)\,C_{n+1}^{m+1} = \frac{(m+1)\,(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!} = (n+1)\,\frac{n!}{m!\,(n-m)!} = (n+1)\,C_n^m.$$

3. Для всех $m = 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}. \tag{9}$$

В самом деле, согласно формуле (6) для $m = 1, 2, \ldots, n-1$

$$C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m-1)!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right) = \frac{(n-1)!\,n}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m.$$

Приведенные выкладки теряют смысл при $n = m$, так как в этом случае $(n-m-1)! = (-1)!$. Однако формула (9) остается верной для $n = m$. Это проверяется непосредственной подстановкой $m = n$ в левую и правую часть формулы. Действительно, так как $C_n^n = 1$, $C_{n-1}^n = 0$, $C_{n-1}^{n-1} = 1$, то

$$C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^n = C_n^n.$$

Формулу (9) для $m \neq 0$ и $m \neq n$ можно доказать и другим способом. Разобьем все сочетания из n элементов по m в каждом на два класса: к первому отнесем все сочетания из n по m, не содержащие какой-нибудь фиксированный элемент, например a, ко второму отнесем все остальные сочетания, содержащие элемент a. Число сочетаний в первом классе равно, очевидно, C_{n-1}^m (из множества A исключаем элемент a), число элементов во втором классе равно C_{n-1}^{m-1} (из множества A исключаем элемент a и образуем из оставшихся $n-1$ элементов сочетания по $m-1$ элементу в каждом, а затем к каждому получившемуся сочетанию приписываем элемент a). Так как число всех сочетаний из n элементов по m равно C_n^m, то

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

§ 2. БИНОМ НЬЮТОНА

Теорема. *Для любого натурального n справедлива формула*

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^n a^n. \qquad (10)$$

Доказательство. Формула (10) верна для $n=2$ и $n=3$:

$$(x+a)^2 = C_2^0 x^2 + C_2^1 x \cdot a + C_2^2 a^2 = x^2 + 2xa + a^2,$$
$$(x+a)^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 \cdot a + C_3^2 x \cdot a^2 + C_3^3 a^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3.$$

Допуская, что она справедлива для $n-1$, т. е.

$$(x+a)^{n-1} = C_{n-1}^0 x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2} \cdot a + C_{n-1}^2 x^{n-3} a^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} a^{n-1},$$

покажем ее справедливость для n. Имеем

$$(x+a)^n = (x+a)(x+a)^{n-1} = (x+a)(C_{n-1}^0 x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2} a + \ldots + C_{n-1}^k x^{n-k-1} a^k + \ldots + C_{n-1}^{n-1} a^{n-1}) = C_{n-1}^0 x^n + x^{n-1}[C_{n-1}^1 a + C_{n-1}^0 a] + x^{n-2}[C_{n-1}^2 a^2 + C_{n-1}^1 a^2] + \ldots + x^{n-k}[C_{n-1}^k a^k + C_{n-1}^{k-1} a^k] + \ldots + x[C_{n-1}^{n-1} a^{n-1} + C_{n-1}^{n-2} a^{n-1}] + C_{n-1}^{n-1} a^n. \qquad (11)$$

Согласно тождеству (9)

$$C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0 = C_n^1,\ C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1 = C_n^2,\ \ldots,\ C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k,\ \ldots,\ C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-2} = C_n^{n-1}.$$

Кроме того, $C_{n-1}^{n-1} = C_n^n = 1$ и $C_{n-1}^0 = C_n^0 = 1$. Следовательно, равенство (11) принимает вид

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^n a^n,$$

или

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + a^n. \qquad (12)$$

Теорема доказана.

Формула (10) или (12) называется формулой *бинома Ньютона*, а ее правая часть называется *разложением* бинома. Коэффициенты $1, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^k, \ldots, 1$ называются *биномиальными*.

Записывая разность $x-a$ в виде $x+(-a)$, имеем

$$(x-a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} \cdot a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + (-1)^n a^n. \qquad (13)$$

Отметим следующие свойства разложения бинома.

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя бинома.

2. Сумма показателей степеней x и a каждого члена разложения равна показателю степени бинома.

3. Общий член разложения T_{k+1} имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} \cdot a^k. \qquad (14)$$

Полагая в этой формуле $k=0, 1, 2, \ldots, n$, мы получаем первый, второй, третий, ..., n-й члены разложения.

4. Биномиальные коэффициенты членов, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой, так как

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

5. Биномиальный коэффициент $(k+1)$-го члена разложения связан с предшествующим биномиальным коэффициентом соотношением

$$C_n^k = \frac{n+1-k}{k} C_n^{k-1}, \tag{15}$$

из которого вытекает следующее правило:

каждый биномиальный коэффициент разложения, начиная со второго, равен предшествующему биномиальному коэффициенту, умноженному на показатель степени у буквы x в предшествующем члене (степень x убывает) и деленному на число предшествующих ему членов.

6. Из равенства (15) следует, что $C_n^k > C_n^{k-1}$, если $\frac{n+1-k}{k} > 1$, т. е. $k < \frac{n+1}{2}$, и $C_n^k < C_n^{k-1}$, если $\frac{n+1-k}{k} < 1$, т. е. $k > \frac{n+1}{2}$.

Если показатель бинома — число нечетное $(n = 2p+1)$, то биномиальные коэффициенты C_{2p+1}^0, C_{2p+1}^1, ..., C_{2p+1}^p возрастают $(p < p+1)$, а C_{2p+1}^{p+1}, C_{2p+1}^{p+2}, ..., C_{2p+1}^{2p+1} — убывают. Коэффициенты $C_{2p+1}^p = C_{2p+1}^{p+1}$ — наибольшие.

Если показатель бинома — число четное $(n = 2p)$, то биномиальные коэффициенты C_{2p}^0, C_{2p}^1, ..., C_{2p}^p — возрастают $\left(p < \frac{2p+1}{2}\right)$, а C_{2p}^p, C_{2p}^{p+1}, ..., C_{2p}^{2p} — убывают. Разложение имеет один наибольший коэффициент C_{2p}^p.

7. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n. В самом деле, полагая в формуле (10) $x = a = 1$, имеем

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n.$$

8. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах, и равна 2^{n-1}, т. е.

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}.$$

Доказательство получается из формулы (13), если положить в ней $x = a = 1$.

Используя формулу (10), найдем разложение трехчлена $x+y+z$. С этой целью запишем его в виде бинома $[x+(y+z)]^n$, в котором второй член равен $y+z$. Согласно формулам (14) и (12), для $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k}(y+z)^k = C_n^k x^{n-k}\left[C_k^0 y^k + C_k^1 y^{k-1} z + C_k^2 y^{k-2} z^2 + \ldots + C_k^p y^{k-p} z^p + \ldots + C_k^k z^k\right] = C_k^0 C_n^k x^{n-k} y^k + C_k^1 C_n^k x^{n-k} y^{k-1} z + \ldots + C_k^p C_n^k x^{n-k} y^{k-p} z^p + \ldots + C_k^k C_n^k x^{n-k} z^k. \tag{16}$$

(Это равенство будет справедливым и при $k = 0$, если принять условие, что $C_0^0 = 1$. Кроме того, $C_k^p = 0$, если $p > k$.) Все разложение запишется в виде суммы $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n+1}$, где каждое T_{k+1} вычисляется по формуле (16).

Отметим некоторые свойства разложения трехчлена.

1. Разложение трехчлена содержит $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ членов. В самом деле, T_1 получается при $k=0$ и содержит один член x^n, T_2 содержит два члена и т. д. Следовательно, число членов в сумме $T_1+T_2+\ldots T_{n+1}$, среди которых нет подобных (они отличаются, например, степенью x), равно сумме

$$1+2+\ldots+(n+1)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

2. Сумма показателей при x, y и z в каждом члене разложения равна показателю трехчлена:

$$n-k+k-p+p=n.$$

3. Формула общего члена разложения трехчлена:

$$U_{n,\,k,\,p}=C_n^kC_k^px^{n-k}y^{k-p}z^p,$$

где $0\leqslant k\leqslant n$, $0\leqslant p\leqslant k$.

Коэффициент $C_n^k\cdot C_k^p$ называется биномиальным. Вычисляя его по формуле (6), имеем

$$C_n^kC_k^p=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{k!}{p!\,(k-p)!}=\frac{n!}{(n-k)!\,(k-p)!\,p!},$$

тогда

$$U_{n,\,k,\,p}=\frac{n!}{(n-k)!\,(k-p)!\,p!}x^{n-k}y^{k-p}z^p. \qquad (17)$$

§ 3. ЗАДАЧИ

1. Задачи, связанные с определением числа различных способов образования каких-либо групп из заданного множества элементов, относятся к классу так называемых комбинаторных задач. Их решение требует применения логических рассуждений и аппарата теории соединений.

Проиллюстрируем сказанное следующими задачами.

Задача 1. На десяти карточках записаны цифры 0, 1, 2, 3, ... 9. Берут четыре карточки и составляют из цифр, записанных на них, четырехзначное число. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить таким образом?

Решение. Всего различных комбинаций из четырех карточек можно составить столько, сколько существует размещений из 10 элементов по 4. Но условиям задачи не удовлетворяют комбинации цифр, начинающихся нулем. Таких комбинаций будет $A_9^3=\frac{9!}{6!}$. Вычтя их из общего числа размещений A_{10}^4, получаем искомое:

$$A_{10}^4-A_9^3=\frac{10!}{6!}-\frac{9!}{6!}=\frac{9!\,(10-1)}{6!}=\frac{9!\,9}{6!}.$$

Задача 2. Сколько различных правильных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 так, чтобы в каждую дробь входило два числа?

Решение. Очевидно, всего различных дробей из данных чисел можно составить столько, сколько существует размещений из

8 элементов по 2 (A_8^2), но нас интересуют лишь правильные дроби, которых будет в два раза меньше, т. е.

$$\frac{1}{2} \cdot A_8^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28.$$

Эту задачу можно решить иначе.

Любая пара данных чисел образует только одну правильную дробь. Всего же различных пар, в которых первый элемент меньше второго, будет столько, сколько существует сочетаний из 8 элементов по 2, т. е.

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Задача 3. Сколькими способами можно поставить на книжную полку n книг так, чтобы m определенных книг оказались рядом?

Решение. Пусть m определенных книг оказались в крайнем правом положении. Остальные $n-m$ книг можно расставить $(n-m)!$ способами (число перестановок из $n-m$ элементов). Но m интересующих нас книг можно поставить $m!$ различными способами так, чтобы они занимали крайнее правое положение. Комбинируя каждую из расстановок m интересующих нас книг с расстановками остальных книг, мы имеем $m!\,(n-m)!$ способов расстановки книг, при которых интересующие нас книги занимают крайнее правое положение. Но группу из m рядом стоящих книг, как единое целое, можно поставить $(n-m+1)$-ю способами (первая из этих книг занимает первое, второе, ..., $(n-m+1)$-е место). Таким образом, число всех способов расстановки книг равно $(n-m+1)\,m!\,(n-m)!$.

Задача 4. Сколько различных вариантов хоккейной команды можно составить из 9 нападающих, 5 защитников и 3 вратарей, если в состав команды должны войти 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?

Решение. Из 9 нападающих можно выбрать трех C_9^3 различными способами. Из 5 защитников можно выбрать двух C_5^2 различными способами. Из трех вратарей можно выбрать одного вратаря тремя способами. Комбинируя каждую тройку нападающих с парами защитников, получаем $C_9^3 \cdot C_5^2$ различных команд без вратаря. Комбинируя эти команды с каждым из вратарей, имеем

$$C_9^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = \frac{9!\,5! \cdot 3}{6!\,3!\,3!\,2!} = 2880$$

различных команд.

Задача 5. Некто забыл нужный ему номер телефона, который состоит из одной из десяти букв и пяти цифр, но он помнит, что в образовании этого номера участвуют цифры 2, 3, 6, 7. Какое наибольшее число проб надо сделать, чтобы дозвониться нужному абоненту?

Решение. В искомый телефонный номер должны войти четыре цифры, которые можно разместить на пяти местах $A_5^4 = \frac{5!}{1} = 5!$ раз-

личными способами; но пятая цифра может быть любой из десяти. Поэтому число комбинаций из таких пяти цифр равно $10 \cdot A_5^4$. Среди них есть и одинаковые. Эти одинаковые комбинации появляются в том случае, когда забытая пятая цифра—2, 3, 6, 7. Таких комбинаций будет $4 \cdot A_5^4$. Исключая из всего количества комбинаций повторяющиеся, получим число различных телефонных номеров без буквы

$$10 \cdot A_5^4 - 2 \cdot A_5^4 = 8 \cdot A_5^4.$$

Комбинируя эти номера с каждой из десяти букв, находим число различных проб:

$$10 \cdot 8 \cdot A_5^4 = 9600.$$

Задача 6. Сколькими способами можно из 40 человек, поступающих в вуз, создать 4 группы разных специальностей по 10 человек в каждой?

Решение. Первую группу можно создать C_{40}^{10} способами. Вторую группу можно создать из оставшихся 30 человек C_{30}^{10} способами. Третью группу можно создать из оставшихся 20 человек C_{20}^{10} способами. Оставшиеся 10 человек составят четвертую группу. Итак, число всех различных способов составления четырех групп из 40 человек равно

$$C_{40}^{10} \cdot C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} = \frac{40!}{10!\,30!} \cdot \frac{30!}{10!\,20!} \cdot \frac{20!}{10!\,10!} = \frac{40!}{(10!)^4}.$$

Задача 7. Группа из 14 юношей и 15 девушек решила посетить театр, но в кассе оказалось лишь 20 билетов (12-й ряд с 1 по 20-е место). Сколькими способами можно распределить 20 билетов между юношами и девушками так, чтобы никакие две девушки и два юноши не сидели бы рядом?

Решение. Допустим, 10 юношей займут нечетные места, а девушки четные. В этом случае никакие две девушки не окажутся рядом. Количество способов, которыми можно 10 юношей из 14 рассадить по 10 нечетным местам, есть число размещений из 14 по 10 (A_{14}^{10}). 15 девушек при этом по 10 четным местам можно рассадить A_{15}^{10} способами. Таким образом, будет $A_{14}^{10} \cdot A_{15}^{10}$ способов. Такое же число способов будет, если юноши займут четные места, а девушки нечетные. Общее число способов равно $2A_{15}^{10} \cdot A_{14}^{10}$.

2. Уравнение или система, содержащие выражения A_n^m, C_n^m и P_n, где один или оба индекса n и m содержат неизвестное, с помощью формул (1)—(8) сводятся к уравнению или системе, равносильным данным при одном ограничении, что m и n—натуральные.

В некоторых случаях формулу для A_n^m удобно записать в факториальной форме:

$$A_n^m = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1} = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (18)$$

Заметим, что из равенства $P_n = P_k$ следует, что $n = k$, из равенства $A_n^m = A_n^l$ следует, что $m = l$, а из равенства $C_n^m = C_n^l$ следует, что либо $m = l$, либо $n - m = l$.

Задача 8. Найти x из уравнения $\frac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132$, где $n \geqslant 10$ — натуральное.

Решение. Согласно формулам (1) и (18) имеем

$$\frac{(x+2)!\,(x-n)!}{(x-n)!\,x!} = 132, \text{ или } \frac{(x+2)!}{x!} = 132,$$

где $x+2 \geqslant 0$, $x-n \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$. Сокращая дробь на $x!$ $[(x+2)! = x!\,(x+1)\,(x+2)]$, получаем квадратное уравнение $x^2+3x-130=0$, равносильное данному, если x — натуральное. Решая это уравнение, находим, что $x=10$ (корень $x=-13<0$ отбрасывается).

Задача 9. Найти x из уравнения $x^2 C_{x-1}^{x-4} = A_4^2 C_{x+1}^3 - x C_{x-1}^{x-4}$.

Решение. Учитывая, что $A_4^2 = 12$, перепишем данное уравнение в виде

$$x(x+1)\,C_{x-1}^{x-4} = 12 C_{x+1}^3 \quad \text{или} \quad \frac{x}{4} C_{x-1}^{x-4} = \frac{3}{x+1} C_{x+1}^3,$$

где $x \geqslant 4$.

Согласно формулам (6) и (7)

$$\frac{x}{4} C_{x-1}^{x-4} = \frac{x}{4} C_{x-1}^3 = C_x^4 \quad \text{и} \quad \frac{3}{x+1} C_{x+1}^3 = C_x^2,$$

поэтому уравнение примет вид

$$C_x^4 = C_x^2,$$

откуда следует, что $x-4=2$, т. е. $x=6$.

Задача 10. Решить уравнение

$$\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}.$$

Решение. Согласно формуле (5) имеем

$$\frac{x!\,(4-x)!}{4!} - \frac{x!\,(5-x)!}{5!} = \frac{x!\,(6-x)!}{6!}.$$

Так как $0<x<4$ ($x=0$ и $x=4$ не удовлетворяют уравнению) и $(6-x)! = (6-x)\,(5-x)\,(4-x)!$, то после сокращения на $\frac{x!\,(x-4)!}{4!}$ получаем уравнение $1 - \frac{5-x}{5} = \frac{(5-x)\,(6-x)}{5 \cdot 6}$, равносильное данному при условии, что $x<4$ и натуральное. Решая его, находим $x^2-17x+30=0$, откуда $x=2$ ($x=15$ отбрасываем).

Задача 11. Найти x и y из условия

$$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y : C_{x+1}^{y-1} = 5:5:3.$$

Решение. Данное условие равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y, \\ 3C_{x+1}^y = 5C_{x+1}^{y-1}, \end{cases}$$

где $x \geqslant y$ — натуральные числа.

Из первого уравнения следует, что $y+1+y=x+1$, т. е. $x=2y$. Тогда из второго уравнения получаем

$$3C_{2y+1}^{y}=5C_{2y+1}^{y-1}, \quad \text{или} \quad \frac{3(2y+1)!}{y!(y+1)!}=\frac{5(2y+1)!}{(y-1)!(y+2)!}.$$

Сокращая на общий множитель $\frac{(2y+1)!}{(y+1)!(y-1)!}$ (положительный), имеем $3(y+2)=5y$, откуда $y=3$ и $x=6$.

3. Формула $T_{k+1}=C_n^k x^{n-k}a^k$ общего члена бинома $(x+a)^n$ позволяет, не производя всего разложения целиком, записать любой член разложения, если указан его номер, или найти член, имеющий заданный коэффициент или заданный показатель, если таковые существуют, и т. д.

Задача 12. Найти все рациональные члены разложения бинома $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5$.

Решение. Пусть искомый член есть T_{k+1}. Тогда

$$T_{k+1}=C_5^k(\sqrt[3]{3})^{5-k}\cdot(\sqrt{2})^k=C_5^k\cdot 3^{\frac{5-k}{3}}\cdot 2^{\frac{k}{2}},$$

где $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Из этих чисел нужно выбрать такое k, при котором показатели $\frac{5-k}{3}$ и $\frac{k}{2}$ суть целые числа. Очевидно, что $k=2$ и искомый член $T_{2+1}=C_5^2\cdot 3\cdot 2=60$.

Задача 13. Найти x, если известно, что третий член разложения бинома $(x+x^{\lg x})^5$ равен 1 000 000.

Решение. Имеем

$$T_{2+1}=C_5^2\cdot x^{5-2}(x^{\lg x})^2=10x^{3+2\lg x}.$$

По условию

$$10x^{3+2\lg x}=1\,000\,000.$$

Логарифмируя данное равенство по основанию 10 ($x>0$) (см. гл. VIII), получаем уравнение

$$2\lg^2 x+3\lg x-5=0,$$

откуда находим, что $x_1=10$, $x_2=10^{-5/2}$.

Задача 14. Найти коэффициент при x^4 в разложении

$$(1+2x+3x^2)^{10}.$$

Решение. Записав данное выражение в виде $[(1+2x)+3x^2]^{10}$, имеем

$$[(1+2x)+3x^2]^{10}=(1+2x)^{10}+10\cdot 3x^2(1+2x)^9+C_{10}^2 9x^4(1+2x)^8+\ldots.$$

Следующие члены не выписываем, так как они содержат x в степени выше четвертой. Выписывая коэффициенты при x^4 у каждого слагаемого правой части, находим

$$C_{10}^4\cdot 2^4+10\cdot 3\cdot C_9^2\cdot 2^2+C_{10}^2\cdot 9=8085.$$

Задача 15. Определить показатель n (n — натуральное) разложения $\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)^n$ по убывающим степеням величины x, если 10-й от начала член разложения имеет наибольший коэффициент.

Решение. Имеем

$$T_{9+1}=C_n^9\left(\frac{1}{5}\right)^{n-9}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^9=C_n^9\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^9.$$

Так как коэффициент этого члена наибольший, а коэффициенты 11 и 9-го членов равны соответственно $C_n^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^{10}$ и $C_n^8\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^8$, то

$$\begin{cases} C_n^9\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^9 > C_n^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^{10}, \\ C_n^9\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^9 > C_n^8\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^8, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_n^9 > 2C_n^{10}, \\ C_n^9 > \frac{1}{2}C_n^8. \end{cases}$$

Раскрывая символы C_n^k и производя все сокращения; получаем

$$\begin{cases} n<14, \\ n>\frac{25}{2}, \end{cases}$$

где n — натуральное.

Таким образом, если решение задачи существует, то оно единственное и равно 13. Остается показать, что решение существует, т. е. $C_{13}^9\cdot 2^9 \geqslant C_{13}^k\cdot 2^k$ для всех $k=0, 1, 2, \ldots, 13$. Беря отношение коэффициентов предыдущего и последующего членов, имеем

$$\frac{C_{13}^k\cdot 2^k}{C_{13}^{k+1}2^{k+1}}=\frac{(13-k-1)!\,(k+1)!}{(13-k)!\,k!\,2}=\frac{k+1}{2\,(13-k)};$$

так как $\frac{k+1}{2(13-k)}<1$ при $k<9$ и $\frac{k+1}{2(13-k)}>1$ при $k>9$, то отсюда следует, что при $k<9$ коэффициенты членов возрастают, с ростом k при $k>9$ они убывают. Поэтому коэффициент 10-го члена от начала — наибольший.

Задача 16. Найти показатель бинома $(a+5)^n$ и номер члена, коэффициент которого при степени a равен 853 125, если его биномиальный коэффициент равен 1365.

Решение. Допустим, что искомый номер равен $p+1$. Тогда $T_{p+1}=C_n^p a^{n-p}\cdot 5^p$, причем $C_n^p=1365$, а $C_n^p\cdot 5^p=853\,125$. Отсюда следует, что $5^p=625=5^4$ и $p=4$.

Для определения n имеем уравнение

$$C_n^4=1365, \text{ или } n(n-1)(n-2)(n-3)=4!\cdot 1365.$$

Разложим 1365 на простые множители:

$$1365 = 13 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3.$$

Тогда

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 13 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2^3 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12.$$

Так как n целое, то $n = 15$. Это решение единственное, так как при $n > 15$ величина $n(n-1)(n-2)(n-3) > 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$, а при $n < 15$ величина $n(n-1)(n-2)(n-3) < 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$.

4. Используя формулы (6), (7) и (8), (10) и свойства биномиальных коэффициентов, удается получить ряд соотношений между числами C_n^k.

Задача 17. Вычислить сумму

$$S_n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \ldots + 2^n \cdot C_n^n.$$

Решение. Согласно формуле (10)

$$(x+2)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot 2 + \ldots + C_n^k x^{n-k} \cdot 2^k + \ldots + C_n^n \cdot 2^n.$$

Полагая $x = 1$, имеем

$$3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + 2^k C_n^k + \ldots + 2^n \cdot C_n^n.$$

Задача 18. Доказать, что при $n > p$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \ldots + C_{p+1}^{p-1} + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}.$$

Решение. Согласно формуле (9)

$$C_n^k - C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^k \text{ для любого } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Поэтому

$$\begin{gathered} C_n^p - C_{n-1}^{p-1} = C_{n-1}^p, \\ C_{n-1}^p - C_{n-2}^{p-1} = C_{n-2}^p, \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_{p+1}^p - C_p^{p-1} = C_p^p, \\ C_p^p - C_{p-1}^{p-1} = 0. \end{gathered}$$

Складывая левые и правые части всех этих равенств, после приведения подобных получаем

$$C_n^p - C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-1} - \ldots - C_p^{p-1} - C_{p-1}^{p-1} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Задача 19. Вычислить сумму

$$S_n = C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1}.$$

Решение. Согласно формуле (8)

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}.$$

Полагая $k=0, 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$\frac{C_n^0}{1}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^1,\quad \frac{C_n^1}{2}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^2,\quad \ldots,$$
$$\frac{C_n^{n-1}}{n}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^n,\quad \frac{C_n^n}{n+1}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1},$$

откуда

$$C_n^0+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{1}{n+1}[C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+1}^{n+1}].$$

В квадратных скобках стоит сумма всех биномиальных коэффициентов бинома $(x+a)^{n+1}$, кроме первого $C_{n+1}^0=1$. По свойству биномиальных коэффициентов она равна $2^{n+1}-1$ и

$$S_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Задача 20. Вычислить сумму

$$S_n=C_n^0-C_n^1+2C_n^2-3C_n^3+\ldots+(-1)^n nC_n^n \quad (n=2, 3, \ldots).$$

Решение. Вновь используя формулу (8), для $m=1, 2, \ldots, n$ имеем

$$C_n^1=nC_{n-1}^0,\quad 2C_n^2=nC_{n-1}^1,\quad 3C_n^3=nC_{n-1}^2,\quad \ldots,\quad nC_n^n=nC_{n-1}^{n-1}.$$

Поэтому

$$S_n=1-n[C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\ldots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}]=1,$$

так как по свойству биномиальных коэффициентов выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю.

В некоторых случаях выгодно подобрать такой многочлен, чтобы искомая сумма была коэффициентом при некоторой степени x.

Задача 21. Вычислить сумму

$$S_n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2.$$

Решение. Искомая сумма является коэффициентом при x^n в многочлене

$$Q(x)=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n)(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+\ldots+C_n^n).$$

Учитывая, что $C_n^k=C_n^{n-k}$, имеем

$$Q(x)=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n)^2=(1+x)^{2n},$$

причем x^n содержит $(n+1)$-й член:

$$T_{n+1}=C_{2n}^nx^n.$$

Следовательно, искомая сумма $S_n=C_{2n}^n$.

ГЛАВА VII
ФУНКЦИЯ

§ 1. ПОСТОЯННЫЕ И ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В своей практической деятельности человек сталкивается с величинами различной природы: длина, площадь, объем, масса, температура, вес и т. д.

В зависимости от конкретных условий некоторые из этих величин принимают одно и то же постоянное значение, т. е. не меняются: другие, наоборот, принимают различные значения.

Отвлечемся от физической природы величин и будем рассматривать только их численные значения.

Те из величин, которые в рассматриваемом процессе принимают различные значения, называются *переменными* (величинами); величины, которые в рассматриваемом процессе сохраняют неизменное значение, называются *постоянными* (величинами).

Переменная величина считается заданной, если указано множество значений, которые она может принимать. Это множество называется областью изменения переменной. Например, остаток от деления натуральных чисел на число 6 есть переменная, которая может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Последние образуют область изменения остатка. Остаток при делении четного числа на два принимает единственное значение — 0. В данном случае этот остаток есть постоянная величина.

Вообще, постоянную величину можно рассматривать как частный случай переменной, область изменения которой состоит из одного числа.

Область изменения переменной (величины) может быть самой разнообразной природы. Для некоторых из них, наиболее важных и часто встречающихся, введены специальные названия и обозначения.

Числовой *отрезок* $[a, b]$ — множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x \leqslant b$.

Числовой *интервал* (a, b) — множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$.

Числовые *полуинтервалы* $[a, b)$ или $(a, b]$ — множество действительных чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$.

Бесконечные промежутки (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$ — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a < x < \infty$, $-\infty < x < b$, $-\infty < x < \infty$; $[a, \infty)$ и $(-\infty, b]$ — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \leqslant x < \infty$ или $-\infty < x \leqslant b$.

§ 2. ФУНКЦИЯ

Математика изучает не изменение каждой переменной в отдельности, а зависимость между ними в процессе их изменения. Так, например, при изменении радиуса шара, меняется и его объем, но мы не изучаем изменение каждой из этих величин в отдельности, а рассматриваем вопрос об изменении объема шара в зависимости от изменения его радиуса.

Совместно могут изменяться несколько переменных величин (например, объем, радиус основания и высота конуса). Мы рассмотрим самый простой случай двух совместно изменяющихся переменных величин. Выражение «две совместно изменяющиеся переменные величины» мы употребляем в том смысле, что каждое значение одной из них вполне определяется значением другой.

Определение. Если в силу некоторого закона каждому значению переменной x, изменяющейся на множестве E, отвечают определенные значения y, то y называется *функцией* от x.

Переменную x называют *независимой переменной*, или *аргументом* функции, множество E — *областью задания*, или *областью определения функции*.

Множество всех значений, которые принимает функция, называется *областью изменения функции*.

Если каждому x из области задания функции соответствует единственное значение y, последняя называется *однозначной*. В противном случае функция называется *многозначной*. В математике обычно рассматриваются только однозначные функции (если не сделано дополнительных оговорок).

Для указания того, что y есть функция от x, употребляют запись вида $y=f(x)$, или $y=g(x)$, или $y=y(x)$ и т. д. Буквы f, g, y и т. д. символизируют закон, по которому получается значение y, соответствующее данному значению x. Если нужно указать значение y_0, отвечающее выбранному значению x_0, то пишут $y_0=f(x_0)$, или $y_0=g(x_0)$, или $y_0=y(x_0)$ и т. д.

Рассмотрим частный случай функции, когда область ее задания состоит из всех натуральных чисел, т. е. $x=1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. В этом случае вместо $y=f(n)$ пишут y_n. Когда n пробегает все свои значения, функция $y=f(n)$ принимает значения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Функция натурального аргумента называется *последовательностью* (см. гл. V, § 1).

§ 3. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Задать функцию $y=f(x)$ на множестве E это значит указать закон, по которому для каждого x из E получается соответствующее ему значение y. Из различных возможных способов задания функции остановимся на трех способах.

1. Аналитический способ. Этот способ состоит в том, что задается формула, т. е. последовательность математических

операций, которые нужно произвести над аргументом x, чтобы получить значение функции. При этом функция может задаваться одной формулой во всей области ее задания, или несколькими, различными для разных частей области ее задания, например,

$$y = x^2 + 2x - 1,$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x < 0; \\ x + 1, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

В общем случае, если нет специальной оговорки, за область определения функции, заданной аналитически, принимают область существования соответствующего аналитического выражения, т. е. множество значений x, для которых это выражение имеет смысл *. Так функция $y = \pi x^2$ определена на всей числовой оси, как и задающее ее аналитическое выражение. Но если эта функция выражает зависимость площади круга от величины радиуса (т. е. $x = R$, $y = S$), то функция $S = \pi R^2$ задана в области $R > 0$.

Область задания функции $y_n = \frac{1}{n^2+1}$ есть множество всех натуральных чисел, в то время как аналитическое выражение $\frac{1}{x^2+1}$ имеет смысл для всех действительных значений x, а не только для натуральных.

2. Табличный способ. Этот способ состоит в том, что записываются в виде таблицы значения аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие им значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Такое задание функции наиболее употребительно во время опытов, когда хотят найти зависимость между некоторыми величинами. Недостаток табличного задания функции состоит в том, что таблица полностью не задает функцию, так как не известны ее значения в точках, не помещенных в таблицу. Удобство таблицы в том, что по ней сразу, без вычислений, находятся значения функции, соответствующие тем значениям аргументов, которые помещены в таблицу. Поэтому таблица употребляется и как способ представления известных функций.

Так, нам хорошо знакомы таблицы логарифмов, тригонометрических функций, степеней чисел и др.

3. Графический способ. Пусть $y = f(x)$ есть функция от x, заданная на множестве E. Это означает, в силу определения функции, что каждому значению x из E соответствует определенное значение y. Каждую такую пару x и y будем рассматривать как абсциссу и ординату точки M в некоторой выбранной прямоугольной системе координат (см. гл. I, § 4). Геометрическое место всех таких точек называется *графиком* рассматриваемой функции (рис. 21).

---

* В предыдущих главах это множество мы называли «множеством допустимых значений».

Графический способ задания функции очень употребителен в экспериментальных работах, особенно там, где используются самопишущие приборы. Получив соответствующую кривую, по ней изучают ту зависимость, которую «задает» этот график. График является удобным представлением функции, когда она задана аналитическим или табличным способом. Наглядность графика является хорошим средством для иллюстрации и исследования свойств функции. Простейшим способом построения графика функции является так называемый способ построения по точкам.

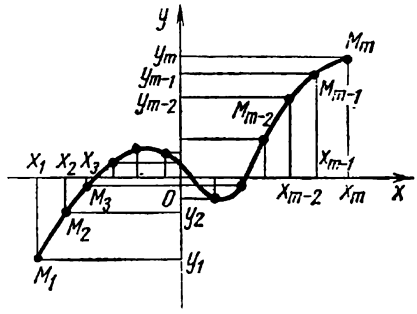


Рис. 21

Составляют таблицу

x	x_1	x_2	x_3	·	·	·	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	·	·	·	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

и затем наносят на чертеж точки M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-2}, M_{n-1}, M_n с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n) соответственно. Эти точки соединяют плавной кривой, которая с некоторым приближением, иногда весьма грубым, изображает график функции (рис. 21). Чем больше число взятых точек, тем точнее полученная кривая воспроизводит график функции.

§ 4. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если для любых двух различных значений аргумента из области ее определения, отличающихся только знаком, ее значения совпадают, т. е. $f(-x)=f(x)$. Этим свойством обладают, например, функции $y=x^2$, $y=|x|$, $y=5$ и т. д.

В самом деле, $(-x)^2=x^2$, $|-x|=|x|$, $y=5$ для всех x.

Сумма, разность, произведение и частное четных функций есть также четная функция.

Действительно, если $y=f(x)$ и $y=g(x)$*—четные функции, то, например, для их суммы $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ и произведения $\psi(x)=f(x)\cdot g(x)$ имеем:

1) $\varphi(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=\varphi(x)$, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

2) $\psi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=\psi(x)$, т. е. $\psi(-x)=\psi(x)$.

* Речь идет в одном тексте о различных функциях. Поэтому их надо обозначать различными буквами f, g, φ, ψ и т. д.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если значения функции, вычисленные для двух любых значений аргумента из области задания функции, отличающихся только знаком, также отличаются только знаком, т. е. $f(-x)=-f(x)$.

К нечетным функциям относятся, например, $y=x^3$, $y=\frac{x}{x^2+1}$ и т. д. В самом деле $(-x)^3=-x^3$, $\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}$.

Сумма и разность нечетных функций есть функция нечетная, а произведение и частное нечетных функций — функция четная. Так, например, если $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, то для их суммы $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ и произведения $\psi(x)=f(x)\cdot g(x)$ имеем:

$$\varphi(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-[f(x)+g(x)],$$

т. е. $\varphi(-x)=-\varphi(x)$;

$$\psi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot[-g(x)]=f(x)\cdot g(x),$$

т. е. $\psi(-x)=\psi(x)$.

Предлагаем читателю доказать, что произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

Однако не надо думать, что каждая функция является четной или нечетной. Большинство функций не относятся ни к одному из этих классов. Например, такова функция $y=x^3+1$. В самом деле $(-x)^3+1=-x^3+1$, т. е. $(-x)^3+1\neq-(x^3+1)$ и также $(-x)^3+1\neq x^3+1$.

Вообще, сумма двух функций различной четности не является четной, а также нечетной функцией (доказать!).

Заметим, что если функция $y=f(x)$ четная или нечетная, то область ее задания обязательно симметрична относительно центра O: если x принадлежит области задания, то $-x$ также принадлежит этой области. По этой причине радикалы с четными показателями $2n\,(y=\sqrt[2n]{x})$ не могут быть четными или нечетными функциями, так как их область задании $x\geqslant 0$ не симметрична относительно центра O (см. § 9).

Из определения четных и нечетных функций вытекает, что *график четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно центра O.*

В самом деле, пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на графике четной функции $y=f(x)$, т. е.

$$y_0=f(x_0). \tag{1}$$

Рассмотрим точку $N(-x_0, y_0)$ (рис. 22), симметричную точке M относительно оси Oy.

В силу четности данной функции и равенства (1)

$$f(-x_0)=f(x_0)=y_0,$$

а это означает, что точка $N(-x_0, y_0)$ также принадлежит графику функции $y=f(x)$.

Аналогично доказывается, что график нечетной функции симметричен относительно начала системы координат (рис. 23).

Таким образом, график четной (нечетной) функции достаточно построить для $x \geqslant 0$, а затем эту кривую симметрично отобразить относительно оси Oy (начала системы координат).

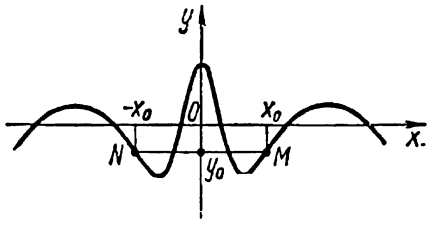


Рис. 22

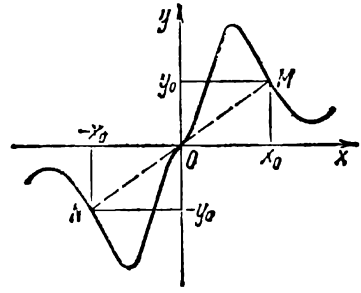


Рис. 23

Свойство четности или нечетности связано с областью задания функции. Так, например, функция $y=x^2$, заданная на отрезке $[-1, 2]$, не является четной на нем (хотя бы потому, что этот отрезок не симметричен относительно начала O). Однако эта функция четная на части этого отрезка, например на отрезке $[-1, 1]$.

§ 5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что для каждого значения аргумента x из области ее задания имеют место равенства $f(x+T)=f(x)$ и $f(x-T)=f(x)$.

Число T, прибавление или вычитание которого из аргумента x не меняет значения функции $y=f(x)$, называется *периодом* этой функции.

Из этого определения вытекает, что если T есть период функции, то числа kT ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) также являются ее периодом. Действительно,

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\ldots=f(x+kT)$$

и

$$f(x)=f(x-T)=f(x-2T)=\ldots=f(x-kT).$$

Наименьший положительный период, если он существует, называется *основным* периодом. Например, основной период функций $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π, основной период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ равен π (см. гл. IX, § 3).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если T — основной период функции $y=f(x)$, то число $\frac{T}{\omega}$ является основным периодом функции $y=f(\omega x)$.*

(Запись $f(\omega x)$ означает, что в выражении $f(x)$ все x заменены на ωx. Например, если $f(x)=x^2+\sqrt{x}+2\sin x+1$, то $f(\omega x)=(\omega x)^2+\sqrt{\omega x}+2\sin \omega x+1$.)

Доказательство. Положим

$$f(\omega x)=\varphi(x). \tag{1}$$

Тогда для любого числа $x+l$, принадлежащего области определения функции $\varphi(x)$, имеем

$$\varphi(x+l)=f[\omega(x+l)]=f(\omega x+\omega l). \tag{2}$$

Так как T основной период функции $f(x)$, то наименьшее положительное число, при котором $f(\omega x+\omega l)=f(\omega x)$ есть $\omega l=T$. Тогда согласно формулам (1) и (2) получаем

$$\varphi(x+l)=f(\omega x+\omega l)=f(\omega x)=\varphi(x).$$

Последнее означает, что $l=\frac{T}{\omega}$ есть основной период функции $\varphi(x)=f(\omega x)$.

Аналогично

$$\varphi(x-l)=f(\omega x-\omega l)=f(\omega x)=\varphi(x) \text{ при } l=\frac{T}{\omega}.$$

Например, основной период функции $\sin 2x$ равен $\frac{2\pi}{2}=\pi$, а функции $\sin\frac{x}{2}$ равен $2\pi:\frac{1}{2}=4\pi$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ — периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно, то число T, кратное T_1 и T_2, является периодом их суммы, произведения, разности и частного.

В самом деле, пусть $T=kT_1$ и $T=mT_2$, где k и m — натуральные числа. Число T, по доказанному ранее, есть период каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда для функции $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ имеем

$$\varphi(x+T)=f(x+T)+g(x+T)=f(x+kT_1)+g(x+kT_2)=$$
$$=f(x)+g(x)=\varphi(x).$$

Для частного $\psi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ имеем

$$\psi(x+T)=\frac{f(x+T)}{g(x+T)}=\frac{f(x+kT_1)}{g(x+mT_2)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\psi(x) \text{ и т. д.}$$

Используя это свойство, найдем период функции

$$y=\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{3}.$$

Период первого слагаемого $\left(\cos\frac{3x}{2}\right)$ равен $\frac{4\pi}{3}$, период второго слагаемого $\left(\sin\frac{x}{3}\right)$ равен 6π. Число $T=12\pi$ кратно $T_1=\frac{4\pi}{3}$ и $T_2=6\pi$ ($12\pi=9T_1$ и $12\pi=2T_2$). Следовательно, число 12π есть период функции

$$y=\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{3}.$$

Замечание. Не следует считать, что если T_1 и T_2 основные периоды функций $f(x)$ и $g(x)$, то число T, являющееся наименьшим общим кратным T_1 и T_2, всегда является основным периодом функций $f(x)+g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$. Например, основной период функций $\sin x$ и $\cos x$ есть 2π, а основной период их произведения $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ равен π.

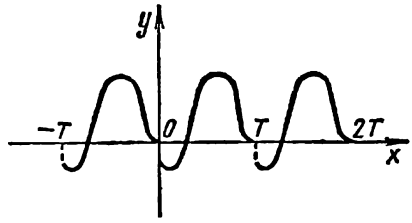


Рис. 24

График периодической функции с основным периодом T достаточно построить на любом отрезке длины T, например на $[0, T]$, а затем сдвигать эту кривую вправо и влево на отрезки $T, 2T, \ldots$ (рис. 24).

§ 6. ОГРАНИЧЕННЫЕ И НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* в области своего задания E, если существует такое положительное число M, что для всех x из области E значения $f(x)$ по абсолютной величине не превосходят этого числа M, т. е. $|f(x)|\leqslant M$.

В противном случае функция называется *неограниченной*. Если функция неограничена, то какое бы число $M>0$ мы ни взяли,

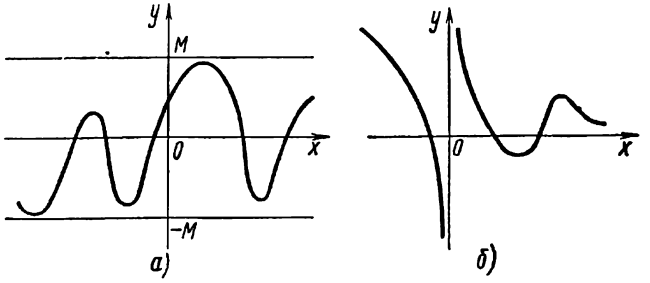


Рис. 25

всегда найдется в области E такое x_0, что $|f(x_0)|>M$. Например, функция $y=\frac{1}{1+x^2}$ — ограниченная, так как $\left|\frac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1$ для всех действительных значений x. К ограниченным функциям относятся также тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$, $y=\sqrt{a^2-x^2}$ (a — постоянная) и др. На рис. 25 приведены графики ограниченной и неограниченной функций. График ограниченной функции целиком лежит внутри полосы $y=M$, $y=-M$, так как неравенство $|f(x)|\leqslant M$ равносильно неравенству $-M\leqslant f(x)\leqslant M$ (см. гл. I, § 4).

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, конечном или бесконечном (см. § 1), если для любых двух значений x из этого промежутка большему значе-

нию аргумента соответствует большее значение функции, т. е. из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из данного промежутка.

Функция называется *убывающей* на некотором промежутке, если из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из этого промежутка.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными* функциями.

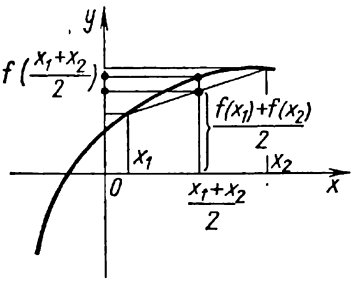


Рис. 26

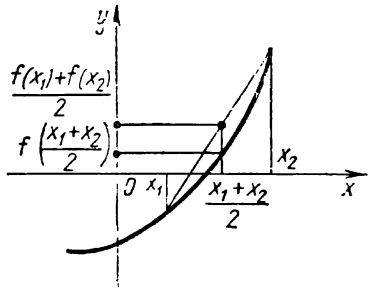


Рис. 27

Замечание. При построении графика функции полезно использовать такие характеристики поведения кривой, как выпуклость и вогнутость и наличие асимптот.

Определение 3. Если для любых точек x_1 и x_2 из некоторого промежутка справедливо неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \qquad (1)$$

то кривая, определяемая уравнением $y=f(x)$, называется *выпуклой* на этом промежутке.

Неравенство (1) означает, что середина любой хорды кривой $y=f(x)$ лежит ниже точки кривой с той же абсциссой $\frac{x_1+x_2}{2}$ (рис. 26). Если же для любых x_1 и x_2 из некоторого промежутка

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

то кривая, определяемая уравнением $y=f(x)$, называется *вогнутой* на этом промежутке.

В этом случае середина любой хорды кривой лежит выше соответствующей точки ее дуги (рис. 27).

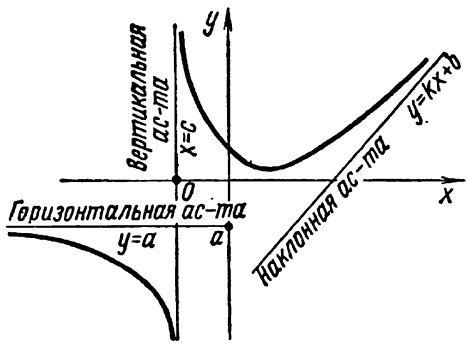


Рис. 28

Определение 4. Прямая линия называется *асимптотой* кривой, если расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Асимптоты разделяются на горизонтальные, вертикальные и наклонные (рис. 28).

§ 7. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть на некотором промежутке E задана функция $y=f(x)$ и D — область ее изменения.

Возьмем какое-нибудь число y_0 из области D. В области E обязательно найдется хотя бы одно число x_0, при котором наша функция принимает именно значение y_0, так что $y_0=f(x_0)$. Чтобы получить это значение x_0, достаточно через y_0 на оси ординат (рис. 29) провести прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечет график функции $y=f(x)$ в одной или нескольких точках.

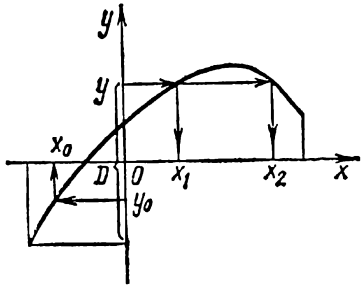


Рис. 29

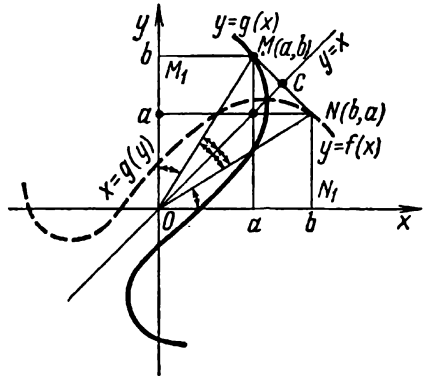


Рис. 30

Абсциссы этих точек и дают искомые значения x (одно из них x_0), при которых функция равна y_0. Таким образом, каждому значению y_0 из области D соответствует одно или несколько значений x, принадлежащих промежутку E. Этим определяется в области D однозначная (если каждому y из D соответствует единственное значение x из E) или многозначная функция $x=g(y)$, которая называется *обратной* для функции $y=f(x)$.

Графики функции $y=f(x)$ и обратной для нее функции $x=g(y)$ совпадают, только аргумент обратной функции рассматривается на оси Oy. Но если, следуя нашим привычкам, аргумент обозначать буквой x и откладывать его на оси абсцисс, т. е. вместо уравнения $x=g(y)$ писать уравнение $y=g(x)$, то график функции $y=g(x)$ будет отличным от графика функции $y=f(x)$. Покажем, что *графики функции* $y=f(x)$ *и обратной ей функции* $y=g(x)$ *симметричны относительно биссектрисы* I *и* III *координатных углов*. В самом деле, пусть точка $M(a, b)$ принадлежит графику функции $y=g(x)$ (рис. 30). Это значит, что справедливо равенство

$$b=g(a). \tag{1}$$

Рассмотрим точку $N(b, a)$. Ее координаты удовлетворяют уравнению $x=g(y)$, так как согласно равенству (1)

$$b=g(a).$$

Следовательно, точка $N(b, a)$ лежит на графике функции $x=g(y)$ или $y=f(x)$, так как эти графики совпадают.

Покажем, что точки $M(a, b)$ и $N(b, a)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. С этой целью соединим центр O с точками M и N и рассмотрим прямоугольные треугольники MOM_1 и NON_1. Так как $M_1O=N_1O=|b|$, а $M_1M=N_1N=|a|$, то эти треугольники равны. Из их равенства вытекает, что $MO=NO$, $\angle MOM_1=\angle NON_1$. Следовательно, $\triangle MON$ — равнобедренный и прямая OC — биссектриса I и III координатных углов — является его биссектрисой, так как $\angle MOC=\angle NOC$ (дополнения равных углов до 45°). Но тогда OC является также медианой и высотой, т. е. $MN \perp OC$ и $MC=CN$. Последнее и означает, что точки M и N симметричны относительно биссектрисы OC.

Итак, каждая точка M графика обратной функции $y=g(x)$ симметрична некоторой точке графика $y=f(x)$ и, как легко показать, обратно, каждая точка графика $y=f(x)$ симметрична некоторой точке графика $y=g(x)$. Поэтому весь график $y=g(x)$ симметричен графику $y=f(x)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Если функция $y=f(x)$ монотонна в промежутке E, то указанная прямая $y=y_0$, где $y_0 \in D$, пересекает ее график лишь в одной точке. Это значит, что каждому значению y из области D соответствует единственное значение x, т. е. обратная функция $x=g(y)$ — однозначная.

В случае, когда $y=f(x)$ немонотонная, обратная функция $x=g(y)$ — многозначная, так как некоторым значениям y будет соответствовать несколько значений x.

Все эти рассуждения помогут понять смысл следующей важной теоремы.

Теорема. *Если $y=f(x)$ возрастает (или убывает) на промежутке E и D — множество всех ее значений (область изменения функции), то обратная ей функция $y=g(x)$ определена в области D, однозначна и также возрастает (или убывает).*

Доказательство этой теоремы дается в курсе высшей математики.

Замечание. Если уравнение $y=f(x)$ можно разрешить относительно x, т. е. получить уравнение $x=g(y)$, то, очевидно, функция $y=g(x)$ является обратной по отношению к функции $y=f(x)$.

Например, пусть $y=\frac{x}{x+1}$ — заданная функция. Выразив x через y, найдем, что

$$x=\frac{y}{1-y}.$$

Следовательно, функция $y=\frac{x}{1-x}$ будет обратной относительно заданной $y=\frac{x}{x+1}$.

§ 8. ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Пусть нам известен график функции $y=f(x)$ и $a>0$.

I. Сдвинем все точки этого графика параллельно оси Ox на отрезок, равный a единицам, вправо. Тогда мы получим некоторую новую кривую (рис. 31). Если $M(x_0, y_0)$—произвольная точка графика $x=f(x)$, т. е.

$$y_0=f(x_0), \tag{1}$$

то после сдвига она перейдет в точку N с координатами $x=x_0+a$, $y=y_0$. Отсюда следует, что $x_0=x-a$, $y_0=y$ и согласно равенству (1)

$$y=f(x-a).$$

Последнее означает, что сдвинутая кривая есть график функции $y=f(x-a)$.

Итак, мы получили следующее правило.

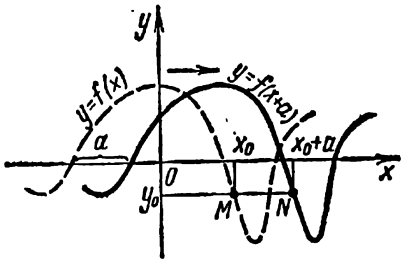


Рис. 31

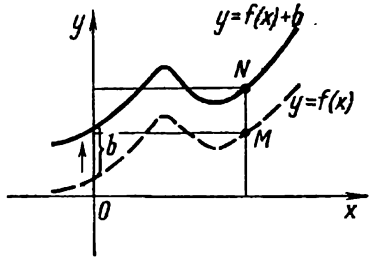


Рис. 32

Правило I. График функции $y=f(x-a)$ $(y=f(x+a))$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом последнего вдоль оси Ox на a единиц вправо (влево), $a>0$.

Сдвинем все точки графика $y=f(x)$ параллельно оси Oy на $b>0$ единиц вверх (рис. 32). После этого сдвига мы получим новую кривую. Рассуждая так же, как и в случае сдвига вдоль оси Ox, убедимся, что эта кривая будет графиком функции $y=f(x)+b$. Таким образом, справедливо следующее правило.

Правило II. График функции $y=f(x)+b$ $(y=f(x)-b)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом последнего вдоль оси Oy на b единиц вверх (вниз), $b>0$.

Заметим, что оба правила можно объединить в одно.

Правило III. График функции $y=f(x-a)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ путем двух параллельных сдвигов последнего: вдоль оси Ox на $|a|$ единиц (вправо, если $a>0$, и влево, если $a<0$) и затем вдоль оси Oy на $|b|$ единиц (вверх, если $b>0$, и вниз, если $b<0$).

II. Умножим абсциссу каждой точки графика $y=f(x)$ на число $\frac{1}{a}$, не меняя при этом ее ординаты. Тогда каждая точка $M(x_0, y_0)$

графика $y=f(x)$ перейдет в новую точку N (рис. 33), координаты которой

$$x=\frac{x_0}{a};\quad y=y_0.$$

Такое преобразование называется *сжатием* вдоль оси Ox с коэффициентом $a>0$.

Так как $y_0=f(x_0)$, а $x_0=ax$ и $y_0=y$, то $y=f(ax)$.

Последнее означает, что кривая, полученная в результате преобразования сжатия графика $y=f(x)$, будет графиком функции $y=f(ax)$ (на рис. 33 $a=2$).

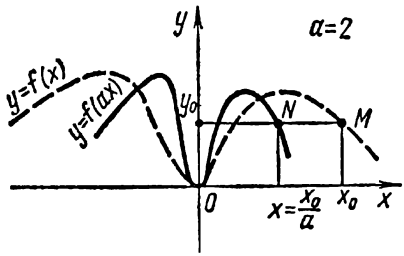


Рис. 33

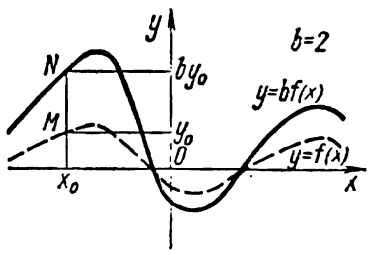


Рис. 34

Правило IV. График функции $y=f(ax)$, где $a>0$, получается из графика $y=f(x)$ сжатием последнего вдоль оси Ox с коэффициентом, равным a.

Умножим теперь ординату каждой точки графика $y=f(x)$ на число $b>0$, не меняя при этом ее абсциссы. Это преобразование называется *растяжением* вдоль оси Oy с коэффициентом, равным b. Полученная кривая, как легко показать, будет графиком функции $x=bf(x)$ (рис. 34).

Правило V. График функции $y=bf(x)$, где $b>0$, получается из графика $y=f(x)$ растяжением последнего вдоль оси Oy с коэффициентом b.

Замечание. При $a<1$, очевидно, $\frac{x}{a}>x$, т. е. абсцисса x увеличивается (по существу график растягивается, а не сжимается). Аналогично $by<y$ при $b<1$, т. е. ордината уменьшается (кривая сжимается к оси Ox, а не растягивается). Однако в любом случае умножение координаты на число называется растяжением, а деление ее на число—сжатием.

III. От каждой точки $M(x_0, y_0)$ графика $y=f(x)$ перейдем к точке N, симметричной M относительно оси Oy (рис. 35). Очевидно, что координаты точек M и N связаны соотношением

$$x=-x_0,\quad y=y_0.$$

Но тогда $y=f(-x)$. Это означает, что геометрическое место точек N образует график функции

$$y=f(-x).$$

Правило VI. График функции $y=f(-x)$ получается из графика $y=f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси Oy (рис. 35).

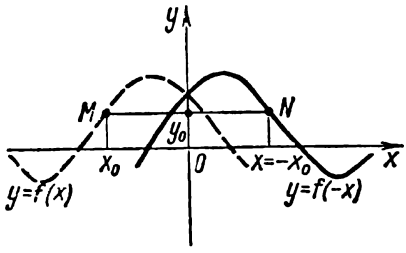


Рис. 35

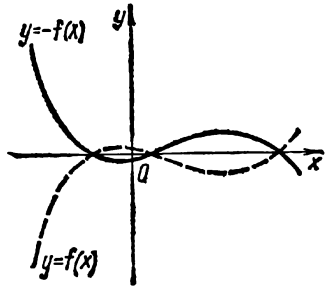


Рис. 36

Правило VII. График функции $y=-f(x)$ получается из графика $y=f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси Ox (рис. 36).

§ 9. ОБЗОР СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

Функция $y=f(x)$ называется *элементарной*, если при вычислении ее значений применяются и притом в конечном числе лишь следующие операции: сложение, вычитание, умножение и деление; возведение в произвольную степень и извлечение корня произвольной степени; взятие логарифма числа по произвольному положительному основанию; нахождение синуса, косинуса, тангенса, котангенса, арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа.

В общем случае исследование функции проводится по следующему плану.

1. Находят область определения и область изменения функции.
2. Проверяют, не является ли функция четной, нечетной, периодической.
3. Находят промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства функции.
4. Определяют наибольшее и наименьшее значения функции и т. д.

После этого анализа нужно построить график функции. При этом следует дополнительно к уже рассматриваемым свойствам:

1) определить точки пересечения графика с осями координат (для того чтобы найти точки пересечения с осью Ox, решаем уравнение $f(x)=0$; для нахождения точек пересечения с осью Oy полагаем $x=0$ и вычисляем значение $f(0)$);

2) найти промежутки выпуклости и вогнутости графика;

3) выяснить, имеет ли кривая, определяемая уравнением $y=f(x)$, асимптоты.

В некоторых случаях проще построить график функции, а затем, исследуя его, выяснить свойства функции.

1. Линейная функция $y=kx+b$.

1) Рассмотрим частный случай, когда $k=0$. Тогда

$$y=b.$$

Эта функция определена на всей оси Ox и для каждого x принимает одно и то же постоянное значение b. Следовательно, ее график есть прямая, параллельная оси Ox (рис. 37) и отстоящая от нее на $|b|$ единиц (вверх, если $b>0$ и вниз, если $b<0$). При $b=0$ графиком функции $y=0$ является ось абсцисс.

2) При $b=0$ $y=kx$. Такое соотношение между x и y при $k\neq 0$ называется *прямой пропорциональной зависимостью*. Эта функция определена всюду. Она монотонно возрастает при $k>0$ и убывает при $k<0$.

Для построения ее графика заметим, что точка (0, 0) удовлетворяет данному уравнению. Для всякой другой его точки $M(x, y)$ будет справедливо равенство $\frac{y}{x}=k$. Но $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образуемый прямой OM с положительной полуосью абсцисс (он отсчитывается от положительной полуоси против часовой стрелки, рис. 38).

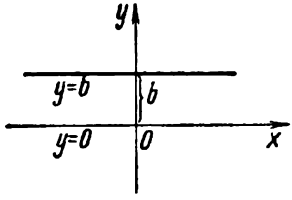


Рис. 37

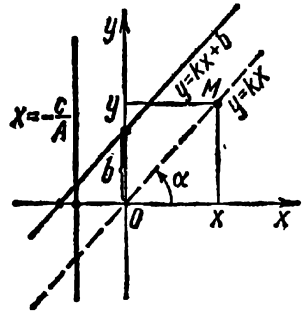


Рис. 38

Обратно, всякая точка, лежащая на прямой, проходящей через начало координат под углом α к положительной полуоси Ox, удовлетворяет уравнению $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha=k$, или $y=kx$. Следовательно, график прямой пропорциональной зависимости есть прямая, проходящая через начало координат.

Угол α наклона этой прямой определяется коэффициентом k ($k=\operatorname{tg}\alpha$), который называется *угловым коэффициентом* прямой.

3) *Общий случай*: $y=kx+b$. График этой функции можно получить из графика функции $y=kx$ параллельным сдвигом последнего вдоль оси Oy на отрезок $|b|$ (вверх, если $b>0$, и вниз, если $b<0$, см. правило II, § 8). При этом преобразовании мы вновь получаем прямую с угловым коэффициентом k, отсекающую на оси Oy отрезок величины $|b|$ (вверх от точки O, если $b>0$, и вниз, если $b<0$).

Для построения этой прямой достаточно найти любые две ее точки, например, точки пересечения с координатными осями (рис. 38).

Пример. Построить график функции $y=5x+1$.

Решение. График этой функции есть прямая. Найдем точки ее пересечения с осями Ox и Oy. Если $y=0$, то $x=-\frac{1}{5}$; если $x=0$, то $y=1$. Следовательно, эта прямая проходит через точки $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ и (0, 1) (рис. 39).

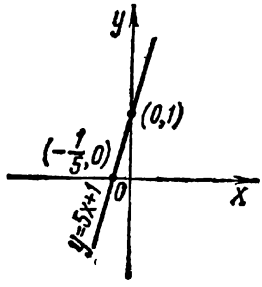


Рис. 39

Следствие. *Уравнение $Ax+By+C=0$ (A и B — одновременно не равны нулю) определяет прямую.*

Действительно, если $B\neq 0$, то уравнение можно записать в виде $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}=kx+b$, где $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{A}$. Если же $B=0$ ($A\neq 0$), то уравнение принимает вид $Ax+C=0$ или $x=-\frac{C}{A}=b$. И в том, и в другом случае мы получаем прямую.

II. Дробно-линейная функция $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — постоянные, причем $c\neq 0$ (иначе мы имели бы линейную функцию) и $ad\neq bc$ (иначе произошло бы сокращение и мы получили бы функцию вида $y=\text{const}$).

Сначала рассмотрим более простой случай.

1. *Обратная пропорциональная зависимость* $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$.

Разберем случай $k>0$:

1) функция определена всюду, кроме $x=0$, т. е. область ее определения — интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$;

2) функция нечетная, так как $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$, т. е. начало координат служит центром симметрии и поэтому дальнейшее исследование проводим для $x>0$;

3) знак y совпадает со знаком x;

4) функция убывающая, так как для $x_1<x_2$ имеем $\frac{k}{x_1}>\frac{k}{x_2}$, т. е. $f(x_1)>f(x_2)$;

когда x стремится к нулю, оставаясь больше нуля, значения y неограниченно возрастают.

Какое бы число $M>0$ мы ни взяли, можно указать такое значение $\bar{x}$, что для $0<x<\bar{x}$ значения $\frac{k}{x}$ превзойдут M, т. е. $\frac{k}{x}>M$ (рис. 40). Тогда говорят, что $y=\frac{k}{x}$ стремится к положительной бесконечности при $x\to 0$ и $x>0$, и пишут

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{k}{x}=+\infty.$$

График неограниченно приближается к оси Oy, нигде ее не пересекая: ось Oy является асимптотой. При возрастании x значения y неограниченно уменьшаются, оставаясь при этом положительными (рис. 40).

Какое бы малое число ε мы ни взяли, можно найти такое значение $\tilde{x}$, что для $x > \tilde{x}$ значения $\frac{k}{x} < \varepsilon$. Тогда говорят, что $y = \frac{k}{x}$ стремится к нулю при x, стремящемся к бесконечности, и записывают

$$\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x}$$

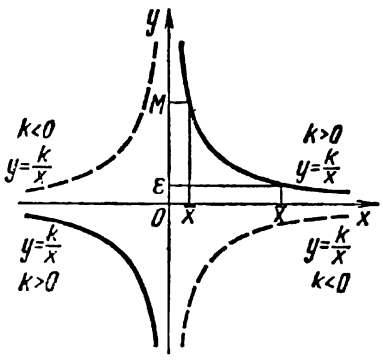


Рис. 40

График неограниченно приближается к оси Ox, нигде ее не пересекая: ось Ox является асимптотой. График вогнутый. Действительно, неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{2k}{x_1+x_2} < \frac{k}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right),$$

или

$$\frac{4}{x_1+x_2} < \frac{x_1+x_2}{x_1x_2},$$

откуда $4x_1x_2 < (x_1+x_2)^2$, или $(x_1-x_2)^2 > 0$, что очевидно.

Используя все эти свойства, строим график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ (рис. 40). Полученная кривая называется *гиперболой*, она состоит из двух ветвей, расположенных в I и III координатных углах (квадрантах).

График функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ получается из графика $y = \frac{|k|}{x}$ симметричным отображением последнего относительно оси Ox. Эта кривая также называется гиперболой: ее ветви расположены во II и IV координатных углах (рис. 40).

2. *Общий случай:* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Функция определена всюду, кроме $x = -\frac{d}{c}$. Для построения ее графика преобразуем правую часть равенства. Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Полагая $k = \frac{bc-ad}{c^2}$, $m = \frac{d}{c}$, $n = \frac{a}{c}$, убеждаемся, что дробно-линейную функцию всегда можно привести к виду

$$y = n + \frac{k}{x+m}.$$

Согласно правилу III, §8, график функции $y = n + \frac{k}{x+m}$ можно получить сдвигом гиперболы $y = \frac{k}{x}$ на $|m|$ единиц вдоль оси Ox и на

$|n|$ единиц вдоль оси Oy в том или ином направлении в зависимости от знаков m и n (рис. 41).

При этом сдвиге асимптоты гиперболы $y=\frac{k}{x}$ (координатные оси) перейдут в прямые $x=-m\left(x=-\frac{d}{c}\right)$ и $y=n\left(y=\frac{a}{c}\right)$. Эти прямые будут асимптотами дробно-линейной функции.

Для более точного построения ее графика целесообразно найти точки его пересечения с координатными осями. Итак, график дробно-линейной функции есть гипербола (смещенная).

Пример. Построить график функции $y=\frac{4x+1}{2x-3}$.

Решение. Выделяя целую часть, имеем

$$y=2+\frac{\frac{7}{2}}{x-\frac{3}{2}}.$$

Отсюда следует, что прямые $x=\frac{3}{2}$ и $y=2$ являются асимптотами этой гиперболы.

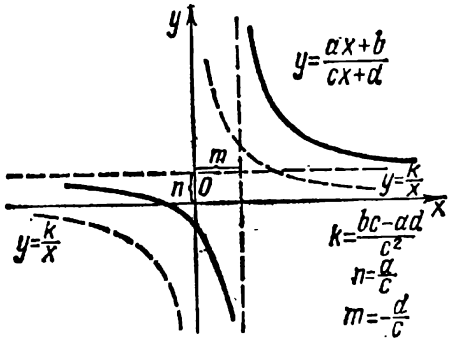


Рис. 41

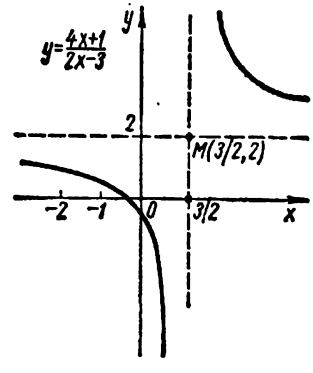


Рис. 42

Теперь находим точки ее пересечения с осями Ox и Oy. Если $x=0$, то $y=-\frac{1}{3}$; если $y=0$, то $x=-\frac{1}{4}$. Следовательно, гипербола пересекает ось Ox в точке $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ и ось Oy в точке $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$. Взяв еще несколько «контрольных» точек, строим требуемый график (рис. 42).

III. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, иначе функция — линейная).

Рассмотрим сначала более простой случай.

1. *Квадратичная функция $y=ax^2$.*

Разберем случай $a>0$:

1) Функция определена для всех x, причем $y=ax^2\geqslant 0$. Следовательно, ее наименьшее значение равно нулю и достигается при $x=0$;

2) функция четная, так как $f(-x)=a(-x)^2=ax^2=f(x)$. Поэтому ось Oy служит осью симметрии и дальнейшее исследование проводим для $x\geqslant 0$;

3) функция возрастающая. Действительно, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $ax_1^2<ax_2^2$, т. е. $f(x_1)<f(x_2)$. Очевидно, что при возрастании x значения функции y также неограниченно растут (при $x\to+\infty$ $y\to+\infty$);

4) график этой функции — вогнутый.

Действительно, неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ в рассматриваемом случае имеет вид: $a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2<\frac{1}{2}(ax_1^2+ax_2^2)$, или $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2>0$, что очевидно.

Используя эти замечания, получим, что график квадратичной функции имеет вид кривой, изображенной на рис. 43. Эта кривая

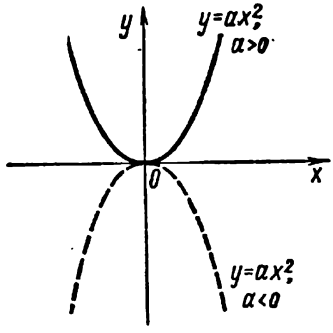


Рис. 43

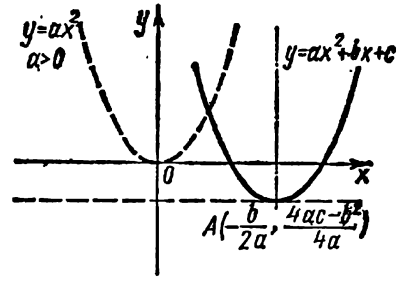


Рис. 44

носит название *параболы*. Точка O, называемая *вершиной* параболы, делит ее на две ветви — правую и левую, направление которых совпадает с положительным направлением оси Oy.

При $a<0$ из равенства $y=ax^2=-|a|x^2$ следует, согласно правилу VII, § 8, что графиком $y=ax^2$ будет парабола, ветви которой направлены в отрицательную сторону оси Oy (рис. 43).

2. *Общий случай*: $y=ax^2+bx+c$.

Для построения графика квадратного трехчлена выделим полный квадрат:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Полагая $\frac{b}{2a}=m$, $\frac{4ac-b^2}{4a}=n$, видим, что квадратный трехчлен всегда можно привести к виду $y=a(x+m)^2+n$. График последней

функции получается из графика функции $y=ax^2$ согласно правилу III, § 8 путем двух параллельных переносов.

После этих параллельных переносов направления ветвей не меняются, а вершина переходит в точку $A\ (-m,\ n)$. Вертикаль $x=n$, проходящая через вершину, является осью симметрии полученной кривой.

Таким образом, график квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ есть парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Ее ветви направлены вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$ (рис. 44).

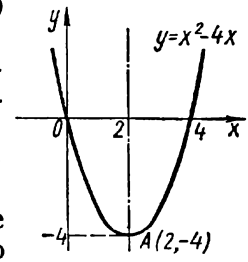


Рис. 45

Для более точного построения графика рекомендуется найти точки ее пересечения с координатными осями.

Пример. Построить график функции $y=x^2-4x$.

Решение. Это парабола. Записав данное уравнение в виде $y=(x-2)^2-4$, мы видим, что ее вершина находится в точке $(2,\ -4)$ и ветви направлены вверх.

Если $y=0$, то $x_1=0$ и $x_2=4$. Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках $(0,\ 0)$ и $(4,\ 0)$. Взяв еще несколько «контрольных» точек, строим ее график (рис. 45).

IV. Степенная функция $y=x^n$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $n=2k$. *Функция* $y=x^{2k}$:

1) определена на всей числовой оси;

2) четная, так как $(-x)^{2k}=x^{2k}$. Поэтому ее достаточно исследовать лишь на полуинтервале $[0,\ \infty)$;

3) на интервале $(0,\ \infty)$ она возрастает, так как из неравенства $x_1<x_2$ следует, очевидно, неравенство $x_1^{2k}<x_2^{2k}$;

4) когда x неограниченно возрастает, y также неограниченно возрастает. Наименьшее значение функции равно нулю: $x^{2p}\geqslant 0$; причем $y=0$ при $x=0$;

5) покажем, что при $x>0$ график функции $y=x^n$ при любом натуральном n вогнутый, т. е. что справедливо неравенство

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n<\frac{x_1^n+x_2^n}{2}. \qquad (*)$$

где $0<x_1<x_2$.

Доказательство проведем методом индукции. При $n=2$ очевидно, что

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2<\frac{x_1^2+x_2^2}{2}.$$

Допустим, что неравенство (*) справедливо для n, и покажем, что тогда

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{n+1}<\frac{x_1^{n+1}+x_2^{n+1}}{2}. \qquad (**)$$

Умножая обе части неравенства(*) на $\frac{x_1+x_2}{2}>0$, получим

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{n+1}<\frac{(x_1^n+x_2^n)(x_1+x_2)}{4}.$$

или

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{n+1}<\frac{x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+x_1^n\cdot x_2+x_2^n\cdot x_1}{4}. \qquad (***)$$

Сравнивая неравенства (**) и (***), видим, что неравенство (**) по свойству транзитивности будет заведомо справедливо, если справедливо неравенство

$$\frac{x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+x_1^n\cdot x_2+x_2^n\cdot x_1}{4}<\frac{x_1^{n+1}+x_2^{n+1}}{2}$$

или равносильное ему неравенство

$$x_1^{n+1}+x_2^{n+1}-x_1^n x_2-x_2^n x_1>0.$$

Последнее преобразуется к виду

$$(x_1-x_2)(x_1^n-x_2^n)>0.$$

Отсюда следует его очевидность, так как x_1-x_2 и $x_1^n-x_2^n$ имеют одинаковые знаки.

2. *Функция* $y=x^{2k+1}$:

1) определена всюду;

2) нечетная, так как $f(-x)=(-x)^{2k+1}=-x^{2k+1}=-f(x)$, и поэтому ее достаточно исследовать на промежутке $x\geqslant 0$;

3) она возрастает на всей числовой оси. В самом деле, если $0<x_1<x_2$, то $x_1^{2k+1}<x_2^{2k+1}$.

Если $x_1<x_2<0$, то вновь $x_1^{2k+1}<x_2^{2k+1}<0$;

4) график функции $y=x^{2k+1}$ вогнутый на интервале $(0, \infty)$ (см. п. 1).

Так как эта функция нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат и, следовательно, на интервале $(-\infty, 0)$ он выпуклый.

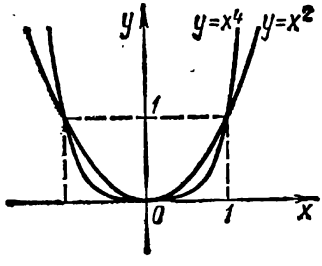


Рис. 46

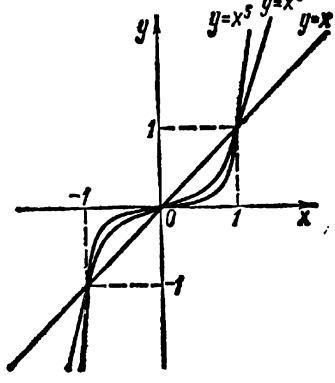


Рис. 47

Графики функции $y=x^n$ для $n=2k$ и $n=2k+1$ приведены на рис. 46 и 47. Эти кривые называются параболами. При $n=2$—это просто парабола, при $n=3$—кубическая парабола и т. д.

V. Радикал $y=\sqrt[n]{x}$.

Радикал определяется, как функция, обратная степенной функции $y=x^n$.

Рассмотрим случай $n=2k$.

Так как функция $y=x^{2k}$ монотонно возрастает на промежутке $[0, \infty)$ и принимает все значения от 0 до ∞, то согласно теореме об обратной функции (§ 7) *функция* $y=\sqrt[2k]{x}$:

1) определена на промежутке $[0, \infty)$, являющемся областью изменения функции $y=x^{2k}$;

2) монотонно возрастает от 0 до ∞.

График этой функции изображен на рис. 48. Он может быть получен путем зеркального отображения относительно биссектрисы I координатного угла графика $y=x^{2k}$, соответствующего участку $x \geqslant 0$.

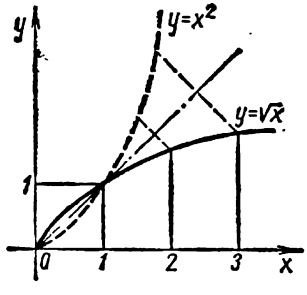


Рис. 48

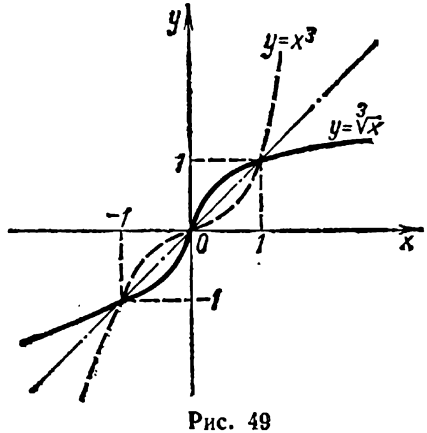


Рис. 49

Если $n=2k+1$, то функция $y=x^{2k+1}$ монотонно возрастает на всей числовой оси и принимает любые положительные и отрицательные значения. Следовательно, согласно теореме об обратной функции, *функция* $y=\sqrt[2k+1]{x}$:

1) определена на всей числовой оси (область изменения функции $y=x^{2k+1}$);

2) монотонно возрастает; область ее изменения — вся числовая ось. Ее график получается путем зеркального отображения параболы $y=x^{2k+1}$ относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 49).

В следующей главе мы рассмотрим показательную и логарифмическую функцию. Главы IX—XIII посвящены тригонометрическим и обратным тригонометрическим функциям.

ГЛАВА VIII

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 1. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Определение. Функция, определяемая равенством

$$y=a^x, \tag{1}$$

где a — постоянное положительное основание, не равное единице, называется *показательной*.

Показательная функция рассматривается только при положительном основании a, так как при $a<0$ выражение a^x в области действительных чисел не имеет смысла, например для любого иррационального x и всех рациональных чисел $\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q=2k$.* При $a=1$ число $1^x=1$ для любых x и это тоже не представляет интереса.

Все свойства показательной функции непосредственно вытекают из свойств степени с любым показателем (см. гл. I, § 4).

Перечислим их.

I. Показательная функция $y=a^x$ определена для всех действительных значений аргумента x, т. е. ее область определения есть вся числовая ось $(-\infty, \infty)$.

II. $a^0=1$ при любом основании $a\neq 0$.

III. При $a>1$ выражение $a^x>1$ для $x>0$ и $a^x<1$ для $x<0$; при $0<a<1$ — наоборот.

Полное доказательство этого пункта дается в курсе высшей математики; оно связано со свойствами предела. Остановимся лишь на случае рационального x. Если $x=\frac{m}{n}$, где $m>0$, $n>0$ — целые, то

$$a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Так как $a^m>1$ при $a>1$, то $\sqrt[n]{a^m}>1$, т. е. $a^{\frac{m}{n}}>1$. Если $x=-\frac{m}{n}$, то

$$a^x=a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}<1 \text{ при } a>1.$$

Если $a<1$, то, полагая $b=\frac{1}{a}>1$, имеем

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}<1$$

* Заметим, что выражение a^x для отдельных значений x может иметь смысл и при отрицательных значениях a, например, $(-1)^3=-1$, $(-32)^{\frac{1}{5}}=-2$ и т. д.

и

$$a^{-\frac{m}{n}}=\left(\frac{1}{b}\right)^{-\frac{m}{n}}=b^{\frac{m}{n}}>1.$$

IV. Показательная функция $y=a^x$ положительна во всей области своего определения и принимает все положительные значения. Последнее означает, что для любого $y>0$ существует такое значение x, при котором $a^x=y$.

Первая часть утверждения следует из свойства степени с положительным основанием. Вторая часть доказывается в курсе высшей математики.

V. Показательная функция $y=a^x$ монотонна. Она возрастает при $a>1$ и убывает при $a<1$.

Покажем это. Пусть $a>1$ и $x_1<x_2$. Так как $a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)$ и $a^{x_1}>0$, то знак разности $a^{x_2}-a^{x_1}$ совпадает со знаком разности $a^{x_2-x_1}-1$. По свойству III $a^{x_2-x_1}>1$ при $x_2-x_1>0$. Следовательно, $a^{x_2-x_1}-1>0$ и $a^{x_2}>a^{x_1}$. Последнее означает, что $y=a^x$ возрастает при $a>1$.

Если $a<1$, то $b=\frac{1}{a}>1$. Тогда при $x_1<x_2$ разность $a^{x_2}-a^{x_1}=\frac{b^{x_1}-b^{x_2}}{b^{x_1+x_2}}<0$, так как $b^{x_1}-b^{x_2}<0$, а $b^{x_1+x_2}>0$. Итак, в случае $a<1$ разность $a^{x_2}-a^{x_1}<0$ при $x_1<x_2$, т. е. $y=a^x$ убывает.

VI. Из равенства $a^{x_1}=a^{x_2}$ следует, что $x_1=x_2$. Это свойство вытекает из монотонности функции $y=a^x$.

VII. Если $a<b$, то $a^x<b^x$ при $x>0$ и $a^x>b^x$ при $x<0$. При $x=0$ значения a^x и b^x совпадают.

В самом деле, по свойству показателя степени $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$, где $\frac{a}{b}<1$. Поэтому $\frac{a^x}{b^x}<1$ при $x>0$ и $\frac{a^x}{b^x}>1$ при $x<0$.

VIII. График функции $y=a^x$ — вогнутый.

Действительно, неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ в нашем случае означает, что

$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2}),$$

или

$$a^{x_1}+a^{x_2}-2a^{\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}}>0,$$

что очевидно, так как

$$\left(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2>0.$$

Учитывая перечисленные свойства функции $y=a^x$, построим ее график.

Рассмотрим сначала случай $a>1$. Так как $a^x>0$ при всех x, то график функции лежит над осью абсцисс и пересекает ось

ординат в точке (0, 1) при любых $a > 0$. При увеличении x кривая быстро растет вверх (при $x = 1$ $y = a$, при $x = 2$ $y = a^2$ и т. д.). При движении в отрицательном направлении оси Ox ($x \to -\infty$) ординаты неограниченно уменьшаются, принимая, однако, лишь положительные значения. Ось абсцисс является ее горизонтальной асимптотой.

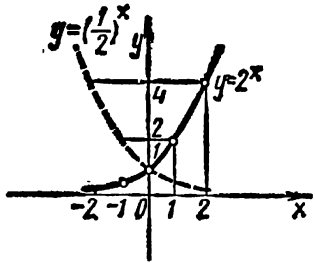


Рис. 50

Для построения графика функции $y = a^x$ при $a < 1$ замечаем, что $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, где $\frac{1}{a} > 1$. Это означает, что график функции $y = a^x$ с основанием, меньшим единицы, симметричен относительно оси Oy графику $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ с основанием, большим единицы (см. гл. VII). Эти графики имеют вид кривых, изображенных на рис. 50. Они называются *экспонентами*.

§ 2. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Так как показательная функция $y = a^x$ ($a \neq 1$, $a > 0$) монотонна во всей области своего определения, то согласно теореме об обратной функции (гл. VII, § 7) она имеет обратную однозначную функцию, определенную во всей области изменения этой показательной функции.

Определение. Функция, обратная показательной функции $y = a^x$, называется *логарифмической* функцией и обозначается символом $x = \log_a y$, где y является независимой переменной, x—функцией.

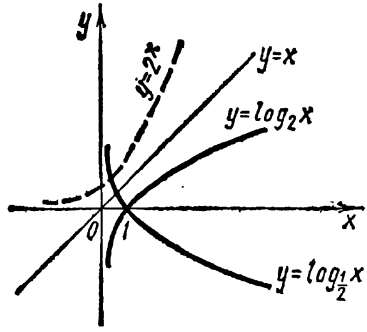


Рис. 51

Если перейти к привычным обозначениям, то получаем

$$y = \log_a x \qquad (2)$$

(читается: «y равен логарифму числа x по основанию a»). По определению логарифмической функции равенство (2) равносильно равенству

$$x = a^y. \qquad (3)$$

Это означает, что *логарифмом числа x по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число x.* Равенство (3) можно переписать в ином виде, если заменить в нем y его значением (2), т. е.

$$x = a^{\log_a x}. \qquad (4)$$

Все свойства логарифмической функции наглядно изображены на ее графике (рис. 51). Этот график получается из графика показательной функции $y = a^x$ зеркальным отображением последнего

относительно биссектрисы I и III координатных углов (см. гл. VII, § 7). Перечислим эти свойства.

I. Логарифмическая функция $y=\log_a x$ при положительном основании $a\neq 1$ определена для всех положительных значений аргумента x, т. е. область определения этой функции есть бесконечный интервал $(0, \infty)$ (поэтому говорят, что отрицательные числа и нуль не имеют логарифмов).

II. $\log_a 1=0$ и $\log_a a=1$ при любом $a>0$, $a\neq 1$.

III. Логарифмическая функция $y=\log_a x$ принимает все действительные значения, т. е. область ее изменения есть бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$.

IV. Логарифмическая функция $y=\log_a x$ монотонна во всей области своего определения. Она возрастает при $a>1$ и убывает при $a<1$.

V. Из равенства $\log_a x_1=\log_a x_2$ следует, что $x_1=x_2$. Это равенство вытекает из монотонности логарифма.

Основные тождества:

1. $a^{\log_a x}=x$. Эта формула вытекает из определения логарифма.

2. *Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов сомножителей при том же основании, т. е.*

$$\log_a (x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2.$$

Доказательство. Согласно равенству (4)

$$x_1=a^{\log_a x_1} \text{ и } x_2=a^{\log_a x_2}.$$

Поэтому

$$x_1\cdot x_2=a^{\log_a x_1}\cdot a^{\log_a x_2}=a^{\log_a x_1+\log_a x_2}.$$

Полученное равенство в силу соотношений (2) и (3) равносильно равенству

$$\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a (x_1\cdot x_2).$$

Свойство (2) распространяется на любое конечное число положительных сомножителей.

Замечание. Если $x_1\cdot x_2>0$, то $\log_a (x_1\cdot x_2)$ существует даже в том случае, когда $x_1<0$ и $x_2<0$. Тогда

$$\log_a (x_1\cdot x_2)=\log_a |x_1|+\log_a |x_2|,$$

так как в этом случае $x_1\cdot x_2=|x_1|\cdot|x_2|$.

3. *Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя при том же основании, т. е.*

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2.$$

Доказательство. Согласно равенству (4)

$$x_1=a^{\log_a x_1} \text{ и } x_2=a^{\log_a x_2}.$$

Поэтому

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{a^{\log_a x_1}}{a^{\log_a x_2}}=a^{\log_a x_1-\log_a x_2}.$$

Следовательно,

$$\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}.$$

Замечание. Если $\frac{x_1}{x_2} > 0$, а $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, то $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$, так как в этом случае $\frac{x_1}{x_2} = \frac{|x_1|}{|x_2|}$.

4. *Логарифм степени равен произведению логарифма основания этой степени на показатель, т. е.*

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,$$

где α — любое действительное число, а $x > 0$.

Доказательство. Так как $x = a^{\log_a x}$, то $x^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$. Следовательно, $\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha$.

Замечание. Если $x < 0$, то $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|$, так как $x^{2k} = |x|^{2k}$.

Следствие. Если $\alpha = \frac{1}{n}$, то $x^\alpha = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ и $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$, т. е. *логарифм корня равен логарифму при том же основании от подкоренного выражения, деленному на показатель корня.*

5. **Модуль перехода.** Пусть нам известен логарифм некоторого положительного числа x по основанию a. Найдем логарифм того же числа x по другому основанию b ($b > 0$, $b \neq 1$).

Представив число x в виде

$$x = b^{\log_b x},$$

найдем $\log_a x$. Имеем

$$\log_a x = \log_a (b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot \log_a b.$$

Отсюда получаем, что

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \tag{5}$$

Выражение $\frac{1}{\log_a b}$, не зависящее от числа x, называется *модулем перехода* от основания a к новому основанию b. Обозначая его буквой M (M зависит только от a и b), перепишем соотношение (5) в виде

$$\log_b x = M \cdot \log_a x.$$

Из равенства (5) вытекают такие следствия.

Следствие 1. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ или $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$. (6)

В самом деле, полагая в формуле (5) $x = a$, имеем

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}.$$

Следствие 2. Для любых $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$ имеет место формула

$$\log_a x_1 \cdot \log_b x_2 = \log_a x_2 \cdot \log_b x_1. \tag{7}$$

В самом деле, согласно формуле (5)

$$\log_a x_1 = \frac{\log_b x_1}{\log_b a}, \quad \log_b x_2 = \frac{\log_a x_2}{\log_a b}.$$

Перемножая эти равенства и учитывая соотношение (6), получаем формулу (7).

Следствие 3. *Логарифм не изменит своего значения, если число и основание возвести в одну и ту же степень, т. е.*

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x, \tag{8}$$

где α — любое действительное число.

В самом деле, полагая в равенстве (5) $b = a^\alpha$, для числа x^α имеем

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \frac{\log_a x^\alpha}{\log_a a^\alpha},$$

или

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \frac{\alpha \log_a x}{\alpha \log_a a} = \log_a x.$$

В частности, из формулы (8) получаем, что

$$\log_{a^\alpha} x = \log_a x^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \log_a x \tag{9}$$

для любого $x > 0$.

Логарифмирование и потенцирование. Каждому положительному числу при заданном основании соответствует определенное значение его логарифма. Нахождение логарифмов заданных чисел или выражений называется операцией *логарифмирования*. Заметим, что логарифмируя некоторое алгебраическое выражение, мы сводим операции возведения в степень, извлечения корня, умножения и деления к более простым операциям сложения и вычитания логарифмов и их умножения и деления на число.

Для нахождения логарифмов чисел существуют таблицы логарифмов для различных оснований (а не только «десятичные» для $a = 10$). Общий принцип построения таблиц логарифмов состоит в следующем. Пусть $a > 1$ — основание логарифма и x — положительное число. Всегда можно подобрать такое целое число m, чтобы x было заключено между числами a^m и a^{m+1}, т. е. $a^m \leqslant x < a^{m+1}$.

Представим число x в виде

$$x = a^m \cdot \frac{x}{a^m} = a^m \cdot x_1, \tag{10}$$

где $1 \leqslant x_1 = \frac{x}{a_m} < a$ (например, для $a = 2$ и $x = 17$ имеем $17 =$

$= 2^4 \cdot \frac{17}{16}$; для $a = 10$ и $x = 0{,}1093$ имеем $0{,}1093 = 10^{-1} \cdot 1{,}093$ и т. д.).

Тогда из равенства (10) получаем, что

$$\log_a x = \log_a (a^m \cdot x_1) = m + \log_a x_1,$$

причем $0 \leqslant \log_a x_1 < 1$.

Итак, логарифм любого положительного числа x можно представить в виде суммы двух частей — целой, называемой его *характеристикой*, и дробной, называемой его *мантиссой*. Характеристика может быть и отрицательной, мантисса всегда неотрицательна. Если характеристика отрицательна, то знак минус пишут над ней в виде черточки. Например, если $m = -3$, а $\log_a x_1 = 0{,}0325$, то пишут

$$\log_a x = \bar{3},0325.$$

Рассмотрим десятичные логарифмы ($a = 10$). Записав x в десятичной системе счисления $x = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_k \cdot 10^{n-k}$, где $a_0 \neq 0$, имеем

$$10^n \leqslant x < 10^{n+1}.$$

Следовательно, характеристика $\lg x$* равна n. Например, $\lg 2{,}031 = 0, \ldots$, так как $2{,}031 = 2 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$, $\lg 0{,}02031 = -2, \ldots$, так как $0{,}02031 = 2 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-5}$.

Вообще, если $x \geqslant 1$, то характеристика $\lg x$ на единицу меньше числа десятичных разрядов в изображении целой части числа x.

Если $0 < x < 1$, то характеристика $\lg x$ содержит столько отрицательных единиц, сколько имеется нулей до первой значащей цифры в изображении числа x.

Операция, обратная логарифмированию, называется *потенцированием*. Она состоит в отыскании x по заданному значению $\log_a x$. (Так как $x = a^{\log_a x}$, то операция потенцирования есть возведение в степень.)

Так как логарифмическая функция монотонна, то операции логарифмирования и потенцирования однозначны.

§ 3. УПРАЖНЕНИЯ

Пример 1. Что больше 202^{303} или 303^{202}?

Решение. I способ. Из свойств показательной функции следует, что $a^c < b^c$ при $1 < a < b$ и $c > 0$; $a^b < a^c$ при $a > 1$ и $b < c$.

В данном примере и основания, и показатели сравниваемых величин различны. Обозначая $A = 202^{303}$ и $B = 303^{202}$, приведем их к одному показателю. Имеем

$$A = (2 \cdot 101)^{3 \cdot 101} = (8 \cdot 101^3)^{101}, \quad B = (3 \cdot 101)^{2 \cdot 101} = (9 \cdot 101^2)^{101}.$$

Так как $8 \cdot 101^3 > 9 \cdot 101^2$, то $(8 \cdot 101^3)^{101} > (9 \cdot 101^2)^{101}$, т. е. $A > B$.

* Логарифмы по основанию 10 обозначаются символом «lg».

II способ. Прологарифмируем A и B по основанию 10. Имеем

$$\lg A = 303 \cdot \lg 202 = 303 \cdot 2, \ldots > 606$$

(характеристика $\lg 202$ равна 2);

$$\lg B = 202 \cdot \lg 303 = 202 \cdot 2, \ldots < 606.$$

Таким образом, $\lg A > \lg B$ и, следовательно, $A > B$.

Пример 2. Найти ошибку в следующих «рассуждениях». Очевидно, что $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Следовательно,

$$\log_a \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log_a \left(\frac{1}{2}\right)^3, \tag{11}$$

или

$$2 \log_a \frac{1}{2} > 3 \log_a \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Сокращая последнее неравенство на общий множитель, получаем явно неверный результат

$$2 > 3.$$

Решение. Ошибка состоит в следующем: при $a > 1$ равенства (11) и (12) верны, однако при сокращении на $\log_a \frac{1}{2} < 0$ знак полученного неравенства изменится на противоположный, т. е.

$$2 < 3.$$

При $a < 1$ из условия $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ вытекает, что $\log_a \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \log_a \left(\frac{1}{2}\right)^3$, т. е.

$$2 \log_a \frac{1}{2} < 3 \log_a \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $2 < 3$, так как $\log_a \frac{1}{2} > 0$ $(a < 1)$.

При решении задач на упрощение выражений, содержащих логарифмические или показательные функции, а также при доказательстве тождеств используются формулы, выведенные в § 2.

Пример 3. Вычислить без таблиц следующие выражения:

$$1)\ 2^{\log_4 9 + 1},\quad 2)\ 5^{\frac{3 - \lg 5}{\lg 25}}.$$

Решение. 1) Так как $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, то

$$2^{\log_4 9 + 1} = 2^{\log_4 9} \cdot 2.$$

Но $\log_{a^k} b^k = \log_a b$. Поэтому $\log_4 9 = \log_2 3$ и $2^{\log_4 9} = 2^{\log_2 3} = 3$. Итак,

$$2^{\log_4 9 + 1} = 3 \cdot 2 = 6.$$

2) Так как $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, то $\frac{1}{\lg 25} = \frac{1}{2} \log_5 10$.

Поэтому $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}} = 5^{(3-\lg 5)\cdot\frac{1}{2}\log_5 10} = 5^{\lg_5 10^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}} = 10\sqrt{10}:\sqrt{5} = 10\sqrt{2}$.

Пример 4. Упростить выражения:

$$1)\ a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}},\quad 2)\ \log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\ \ldots\ \log_9 10.$$

Решение. 1) Так как $a^{bc}=(a^b)^c$ и $\frac{1}{\lg a}=\log_a 10$,

то

$$a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}} = a^{\log_a 10\cdot\lg\lg a} = (a^{\log_a 10})^{\lg(\lg a)} = 10^{\lg(\lg a)} = \lg a.$$

2) Обозначая данное выражение через A и переходя в каждом логарифме к основанию 10 [по формуле (5)], имеем

$$A = \frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 4}\ \ldots\ \frac{\lg 10}{\lg 9} = \frac{1}{\lg 2} = \log_2 10.$$

Пример 5. Найти $\log_{54} 168$, если $\log_7 12 = a$ и $\log_{12} 24 = b$.

Решение. Разложим числа 168, 54, 12, 24 и 7 на простые множители:

$$168 = 2^3\cdot 3\cdot 7,\quad 54 = 2\cdot 3^3,\quad 12 = 2^2\cdot 3,\quad 24 = 2^3\cdot 3,\quad 7 = 7.$$

Отсюда видно, что число различных простых множителей, входящих в разложение, равно трем (2, 3, 7). Обозначая $\log_2 3 = x$ и $\log_2 7 = y$, мы можем выразить через x и y все логарифмы, содержащиеся в данной задаче. Действительно,

$$\left.\begin{aligned}
\log_7 12 &= \frac{\log_2 12}{\log_2 7} = \frac{\log_2(2^2\cdot 3)}{y} = \frac{2+x}{y},\\
\log_{12} 24 &= \frac{\log_2 24}{\log_2 12} = \frac{\log_2(2^3\cdot 3)}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \frac{3+x}{2+x},\\
\log_{54} 168 &= \frac{\log_2 168}{\log_2 54} = \frac{\log_2(2^3\cdot 3\cdot 7)}{\log_2(2\cdot 3^3)} = \frac{3+x+y}{1+3x}.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Используя данные задачи, составляем для определения x и y систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2+x}{y} = a, \\ \dfrac{3+x}{2+x} = b, \end{cases}$$

решая которую, находим, что $x = \frac{3-2b}{b-1}$, $y = \frac{1}{a(b-1)}$. Подставляя найденные значения x и y в третье из равенств (13), получаем

$$\log_{54} 168 = \frac{1+ab}{a(8-5b)}.$$

Замечание. Исследование способа решения показывает, что подобная задача имеет решение, если число различных простых множителей чисел и оснований на единицу больше числа условий. Тогда, принимая один из множителей за основание, мы получаем систему уравнений, число которых равно числу неизвестных.

Задачи, где все логарифмы рассматриваются при одном основании, решаются проще, без составления системы.

Пример 6. Вычислить $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = a$ и $\log_{30} 5 = b$.

Решение. Замечая, что $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, имеем

$\log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5 = \log_{30} 30 = 1$, или $a + b + \log_{30} 2 = 1$.

Отсюда находим $\log_{30} 2 = 1 - (a + b)$ и

$$\log_{30} 8 = 3(1 - a - b).$$

Пример 7. Найти $\lg 2$ и $\lg 5$, если $\lg 2 \cdot \lg 5 = a$.

Решение. Так как $\lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$, а по условию $\lg 2 \cdot \lg 5 = a$, то $\lg 2$ и $\lg 5$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - z + a = 0.$$

Решая его, находим $z_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4a})$, откуда

$$\lg 5 = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 4a}], \quad \lg 2 = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 4a}], \quad [\lg 5 > \lg 2, \quad 4a < 1].$$

Пример 8. Сколько цифр содержит число 2^{75}?

Решение. Вычисляя $\lg 2^{75}$, имеем

$$\lg 2^{75} = 75 \cdot \lg 2 = 75 \cdot 0{,}3010 = 22{,}5750.$$

Отсюда следует, что характеристика этого десятичного логарифма равна 22. Но характеристика на единицу меньше количества цифр. Следовательно, число 2^{75} содержит 23 цифры.

Пример 9. Доказать, что если $a^2 + b^2 = 7ab$, причем $ab \neq 0$, то

$$\lg \frac{|a+b|}{3} = \frac{1}{2}(\lg |a| + \lg |b|).$$

Решение. Дополняя левую часть данного равенства до полного квадрата, имеем

$$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab.$$

Из равенства положительных чисел вытекает равенство их логарифмов, взятых по одному и тому же основанию, т. е.

$$\lg (a+b)^2 = \lg 9ab.$$

Так как $\lg x^2 = 2 \lg |x|$ и $\lg (x_1 \cdot x_2) = \lg |x_1| + \lg |x_2|$, то из последнего равенства следует, что

$$2 \lg |a+b| = 2 \lg 3 + \lg |a| + \lg |b|,$$

или

$$\lg |a+b| - \lg 3 = \frac{1}{2}(\lg |a| + \lg |b|),$$

что окончательно дает

$$\lg \frac{|a+b|}{3} = \frac{1}{2}(\lg |a| + \lg |b|).$$

Пример 10. Доказать, что

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}$$

где $N > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$, $abc \neq 1$, $N \neq 1$.

Решение. Используя тождество $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, перейдем в каждом сомножителе левой части к основанию N. Обозначая ее через A, имеем

$$A = \frac{1}{\log_N a} \cdot \frac{1}{\log_N b} + \frac{1}{\log_N b} \cdot \frac{1}{\log_N c} + \frac{1}{\log_N c} \cdot \frac{1}{\log_N a} =$$
$$= \frac{\log_N c + \log_N a + \log_N b}{\log_N a \cdot \log_N b \cdot \log_N c} = \frac{\log_N abc}{\log_N a \cdot \log_N b \cdot \log_N c}.$$

Преобразуя каждый логарифм к числу N, получаем

$$A = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N},$$

что и требовалось доказать.

§ 4. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Показательные и *логарифмические* уравнения, т. е. такие, где неизвестные входят в показатель степени или находятся под знаком логарифмической функции, принадлежат к классу трансцендентных уравнений. Остановимся на некоторых типах таких уравнений и укажем приемы, сводящие эти уравнения к ранее изученным.

I. Рассмотрим показательное уравнение

$$a^u = a^v, \tag{14}$$

где $a \neq 1$ — положительный параметр, а один из показателей u и v или оба содержат неизвестное x. Согласно свойству VI (§ 1) из равенства степеней с одинаковыми основаниями вытекает равенство их показателей и обратно, т. е. $u = v$.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}.$$

Решение. Преобразуя данное уравнение к виду (14), имеем

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 2,$$

решая которое, находим

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

II. Рассмотрим уравнение вида

$$\log_a u=\log_a v, \tag{15}$$

где $a\neq 1$, $a>0$, а одна из величин u и v или обе содержат неизвестное.

Согласно свойству V (§ 2) из равенства логарифмов с одинаковыми основаниями вытекает равенство чисел, т. е. уравнение (15) равносильно уравнению $u=v$, при условии, что $u>0$ и $v>0$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\lg 2x=\lg(4x-15)^2$$

при условии, что $4x-15>0$ и $4x-15\neq 1$.

Переходя к равенству чисел, получаем квадратное уравнение $2x=(4x-15)^2$, корни которого $x_1=\frac{9}{2}$ и $x_2=\frac{25}{8}$. Так как $4x_1-15=3>0$, а $4x_2-15<0$, то $x_2=\frac{25}{8}$ не является корнем данного уравнения. Итак, единственный корень $x=\frac{9}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{\lg 2+\lg(4-5x-6x^2)}{\lg(2x-1)}=3$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\lg 2(4-5x-6x^2)=\lg(2x-1)^3 \qquad (2x-1\neq 1),$$

а последнее равносильно алгебраическому уравнению

$$2(4-5x-6x^2)=(2x-1)^3$$

при условии, что $4-5x-6x^2>0$ и $2x-1>0$ и $2x-1\neq 1$.

Решая систему неравенств

$$\begin{cases} 4-5x-6x^2>0, \\ 2x-1>0, \end{cases}$$

убеждаемся, что она несовместна, так как первое неравенство выполняется в интервале $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$, а второе в интервале $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Из несовместности системы следует, что данное уравнение не имеет корней.

Замечание. Этот вывод можно получить сразу, убедившись, что множество допустимых значений левой части данного уравнения пустое, т. е. не содержит ни одного числа.

III. Уравнение вида

$$Aa^n=Bb^v, \tag{16}$$

где u и v содержат неизвестное, в общем случае решается логарифмированием обеих частей по одному основанию.

Пример 4. Решить уравнение $2^{x+3}-3^{x^2-2}=3^{x^2+1}-2^{x-1}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду (16). Имеем $8\cdot 2^x-\frac{1}{9}\cdot 3^{x^2}=3\cdot 3^{x^2}-\frac{1}{2}\cdot 2^x$, или $\frac{17}{2}\cdot 2^x=\frac{28}{9}\cdot 3^{x^2}$, или $3^{x^2}=\frac{153}{56}\cdot 2^x$.

Прологарифмируем обе части последнего уравнения по основанию 3:

$$x^2=\log_3\frac{153}{56}+x\log_3 2.$$

Решая это уравнение, находим

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\log_3 2\pm\sqrt{\log_3^2 2+4\log_3\frac{153}{56}}\right).$$

IV. Рассмотрим уравнение вида

$$Aa^x+Bb^x=C \qquad (17)$$

(или $Aa^x+Bb^x=C\cdot c^x$, сводящееся к первому делением на $c^x\neq 0$). В некоторых случаях это уравнение удается свести к алгебраическому уравнению относительно нового неизвестного. Например, если $ab=1$, то заменой $a^x=y\left(\text{тогда } b^x=\frac{1}{y}\right)$ уравнение (17) сводится к квадратному уравнению $Ay^2-Cy+B=0$. Если $b=a^m$ (m—целое), то той же заменой уравнение (17) сводится к алгебраическому

$$Ay+By^m=C.$$

Пример 5. Решить уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\sqrt{2+\sqrt{3}}\Big)^x=4$.

Решение. Замечая, что $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=1$, положим $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=y\,(y>0)$. После этой замены получаем квадратное уравнение $y^2-4y+1=0$, равносильное данному при условии, что $y>0$. Его корни $y_1=2+\sqrt{3}$, $y_2=(2+\sqrt{3})^{-1}=2-\sqrt{3}$.

Возвращаясь к неизвестному x, имеем $(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}$, откуда $x_1=2$ и $(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=(2+\sqrt{3})^{-1}$, откуда $x_2=-2$.

Пример 6. Решить уравнение $4^{-\frac{1}{x}}-6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$.

Решение. Разделив все члены уравнения на $4^{-\frac{1}{x}}$ и замечая, что $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}.$$

Принимая, что $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=y$, получаем квадратное уравнение $y^2+y-1=0$, равносильное данному при условии, что $y>0$. Его

корни $y_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, причем $y_2<0$ не подходит. Возвращаясь к неизвестному x, имеем $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Прологарифмируем это равенство по основанию 10 и найдем, что

$$x=\frac{\lg 3-\lg 2}{\lg 2-\lg(\sqrt{5}-1)}.$$

V. Рассмотрим уравнение вида

$$u^v=u^z, \tag{18}$$

где u, v и z (все или некоторые) содержат неизвестное. Функция u^v (или u^z) определена только для положительного основания и при этом условии уравнение (18) равносильно уравнению $u^{v-z}=1$ или $(v-z)\log_a u=0$, которое в свою очередь равносильно совокупности двух уравнений

$$v-z=0 \quad \text{и} \quad u=1.$$

Как мы уже отмечали в сноске на стр. 232, при отдельных значениях v и z выражения u^v и u^z имеют смысл и для неположительных значений u. Однако те значения x, которые хотя формально и удовлетворяют равенству (18), но при которых $u\leqslant 0$, не принято считать корнями уравнения (18).

Пример 7. Решить уравнение $(x-1)^{\sqrt{x+1}}=(x-1)^{\frac{x+1}{2}}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\left(\frac{x+1}{2}-\sqrt{x+1}\right)\lg(x-1)=0,$$

или совокупности двух уравнений

$$x-1=1 \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2}-\sqrt{x+1}=0$$

при условии, что $x>1$. Из первого уравнения получаем $x_1=2$. Решая иррациональное уравнение, находим его корни $x_2=3$ и $x_3=-1$. При $x_3=-1$ основание $x-1<0$, поэтому $x_3=-1$ не является корнем данного уравнения (хотя формально $(-1-1)^{\sqrt{-1+1}}=(-1-1)^{\frac{-1+1}{2}}$). Итак, данное уравнение имеет два корня $x_1=2$; $x_2=3$.

Пример 8. Решить уравнение $5^x\cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}}=50$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду (18):

$$5^x\cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}}=2\cdot 5^2, \text{ или } 5^{x-2}\cdot 2^{\frac{x-2}{x+1}}=1, \text{ или } \left(5\cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2}=1.$$

Так как основание $u=5\cdot 2^{\frac{1}{x+1}}>0$ при всех x, то последнее

уравнение равносильно уравнению

$$(x-2)\log_2\left(5\cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)=0$$

или совокупности двух уравнений

$$x-2=0 \text{ и } \log_2 5+\frac{1}{x+1}=0.$$

Решая эти уравнения, находим

$$x_1=2;\ x_2=-1-\frac{1}{\log_2 5}=-1-\log_5 2.$$

VI. В некоторых случаях с помощью подстановки

$$y=\log_a u \text{ или } y=\log_u a$$

(u содержит неизвестное) логарифмическое уравнение сводится к алгебраическому.

Пример 9. Решить уравнение

$$\log_x\sqrt{5}+\log_x(5x)-2{,}25=(\log_x\sqrt{5})^2.$$

Решение. Учитывая, что $\log_x\sqrt{5}=\frac{1}{2}\log_x 5$, $\log_x(5x)=\log_x 5+1$, $(\log_x\sqrt{5})^2=\frac{1}{4}\log_x^2 5$, перепишем данное уравнение:

$$\frac{1}{2}\log_x 5+\log_x 5+1-2{,}25=\frac{1}{4}\log_x^2 5$$

или

$$\log_x^2 5-6\log_x 5+5=0.$$

Обозначив $\log_x 5=y$, имеем

$$y^2-6y+5=0.$$

Корни этого уравнения $y_1=1$, $y_2=5$. Возвращаясь к неизвестному x, находим

$$\log_x 5=1,\ x_1=5,$$
$$\log_x 5=5,\ x^5=5,\ x_2=\sqrt[5]{5}.$$

В некоторых случаях перед заменой целесообразно привести логарифмы, входящие в уравнение, к одному основанию.

Пример 10. Решить уравнение $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}\cdot\log_3 x}=-1$.

Решение. Заметим, что $\log_x\sqrt{3x}=\frac{1}{2}\log_x 3+\frac{1}{2}=\frac{1}{2\log_3 x}+\frac{1}{2}$. Тогда, обозначая $\log_3 x=y\,(y<0)$, получаем иррациональное уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+1\right)\cdot y}=-1.$$

Решая его, находим, что $y=-2$ ($y=1$ отбрасываем). Следовательно, $\log_3 x=-2$ и $x=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

Пример 11. Решить уравнение

$$\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right)\log_2^2 x+\log_2^4 x=1.$$

Решение. Так как $\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{\log_2\frac{2}{x}}{\log_2 2x}=\frac{1-\log_2 x}{1+\log_2 x}$, то полагая $\log_2 x=y$, получаем алгебраическое уравнение $\frac{1-y}{1+y}y^2+y^4=1$, или $y^5+y^4-y^3+y^2-y-1=0$ ($y\neq -1$). Выделяя корень $y_1=1$, имеем симметрическое уравнение $y^4+2y^3+y^2+2y+1=0$ (см. гл. III). Решая его, находим $y_{2,3}=\frac{-1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$ ($y_{4,5}$ — мнимые). Возвращаясь к неизвестному x, имеем

$$\log_2 x=1,\ \text{т. е. } x_1=2;$$

$$\log_2 x=\frac{-1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2},\ \text{т. е. } x_{2,3}=2^{\frac{-1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}}.$$

Не останавливаясь подробно на логарифмических уравнениях, содержащих параметры (исследование решений в зависимости от параметров детально проведено в гл. IV), приведем лишь один пример такого уравнения.

Пример 12. Решить уравнение

$$1+\log_b(2\lg a-x)\cdot\log_x b=\frac{2}{\log_b x},\quad a>0,\ b>0,\ b\neq 1.$$

Решение. Переписав уравнение в виде

$$\log_b x+\log_b(2\lg a-x)\log_x b\cdot\log_b x=\log_b b^2\quad (x>0,\ x\neq 1),$$

замечаем, что оно равносильно уравнению

$$x(2\lg a-x)=b^2$$

при условии, что $2\lg a-x>0$, $x>0$ и $x\neq 1$. Решая уравнение $x^2-2x\lg a+b^2=0$, находим, что

$$x_{1,2}=\lg a\pm\sqrt{\lg^2 a-b^2}. \qquad (*)$$

Из формулы (*) следует, что $x_{1,2}$ действительны и положительны в том и только в том случае, когда $\lg a>0$ и $\lg^2 a-b^2\geqslant 0$, т. е. $\lg a\geqslant b$. При этом x_1 и x_2 удовлетворяют ограничительному условию, так как $2\lg a-x_{1,2}=\lg a\pm\sqrt{\lg^2 a-b^2}>0$. Если $a<1$, то $\lg a<0$ и решение не существует. Остается исключить те значения параметров, при которых $x=1$, т. е. $\lg a\pm\sqrt{\lg^2 a-b^2}=1$. Последнее имеет место при условии $\lg a=\frac{b^2+1}{2}$.

Итак, данное уравнение имеет два решения $x_{1,2}=\lg a \pm \sqrt{\lg^2 a - b^2}$ при $a \geqslant 10^b$ и $a \neq 10^{\frac{b^2+1}{2}}$ и одно решение $x=b^2$ при $a=10^{\frac{b^2+1}{2}}$. При $a<10^b$ уравнение решений не имеет.

В заключение этого параграфа рассмотрим несколько систем логарифмических и показательных уравнений.

Пример 13. Решить систему

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2}=2, \\ \log_8 x \cdot \log_2 (y+1)^2=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Решение. Так как $x>0$, то из первого уравнения имеем

$$2\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 (y+1)-1=2 \text{ или } 4\log_2 x+\log_2 (y+1)=6.$$

Во втором уравнении $\log_8 x$ преобразуем к логарифму с основанием 2. Получаем

$$\log_2 x^{\frac{1}{3}} \cdot 2\log_2 (y+1)=\frac{4}{3},$$

или

$$\frac{2}{3}\log_2 x \cdot \log_2 (y+1)=\frac{4}{3}, \text{ или } \log_2 x \cdot \log_2 (y+1)=2.$$

Таким образом, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 4\log_2 x+\log_2 (y+1)=6, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (y+1)=2, \end{cases}$$

которая заменой $\log_2 x=u$ и $\log_2 (y+1)=v$ сводится к алгебраической

$$\begin{cases} 4u+v=6, \\ u \cdot v=2. \end{cases}$$

Решая ее, находим $u_1=1$, $v_1=2$ и $u_2=\frac{1}{2}$, $v_2=4$.

Теперь для определения x и y мы получаем следующую совокупность систем:

$$\begin{cases} \log_2 x=1, \\ \log_2 (y+1)=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \log_2 x=\frac{1}{2}, \\ \log_2 (y+1)=4. \end{cases}$$

Решая каждую из них, находим

$$x_1=2,\ y_1=3 \text{ и } x_2=\sqrt{2},\ y_2=15.$$

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\log_x 0{,}5}{\log_x 0{,}5+\log_y 0{,}5}=\dfrac{1}{\log_y 0{,}125}, \\ x+y=1. \end{cases}$$

Решение. Выразив из второго уравнения одно из неизвестных через другое, можно свести систему к одному уравнению. Однако проще первое уравнение заменить равносильным алгебраическим уравненнем. Преобразуя каждый логарифм к основанию 0,5, имеем

$$\frac{\frac{1}{\log_{0,5} x}}{\frac{1}{\log_{0,5} x}+\frac{1}{\log_{0,5} y}}=\frac{1}{3}\log_{0,5} y, \text{ или } \frac{\log_{0,5} y}{\log_{0,5} xy}=\frac{\log_{0,5} y}{3}.$$

Так как $\log_{0,5} y \neq 0$ ($y \neq 1$), то последнее уравнение равносильно уравнению $\log_{0,5} xy = 3$, или $xy = 0{,}125$ при условии $x > 0$ и $y > 0$.

Итак, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} xy = 0{,}125, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Решая ее, находим $x_1 = 0{,}5(1+\sqrt{0{,}5})$, $y_1 = 0{,}5(1-\sqrt{0{,}5})$ и $x_2 = -0{,}5(1-\sqrt{0{,}5})$, $y_2 = 0{,}5(1+\sqrt{0{,}5})$.

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения следует, что $x = y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}}$. Тогда из первого уравнения получаем

$$\left(y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}}\right)^{\sqrt{y}} = y, \text{ или } y^{\frac{1}{4}y} = y, \text{ причем } y > 0.$$

Поэтому последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений $y = 1$ и $\frac{1}{4}y = 1$. Итак, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Решая уравнение $x = y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}}$, находим

$$x_1 = y_1^{\frac{1}{4}\sqrt{y_1}} = 1 \text{ и } x_2 = y_2^{\frac{1}{4}\sqrt{y_2}} = 4^{\frac{1}{4}\cdot 2} = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Итак, система имеет два решения:

$$x_1 = y_1 = 1;\ x_2 = 2,\ y_2 = 4.$$

Пример 16. Решить систему

$$\begin{cases} x^{\frac{z}{3}} = \sqrt[15]{y^3}, \\ y^{\frac{z}{3}} = \sqrt[15]{x^2}, \\ z = \sqrt{x} + \sqrt{y}. \end{cases}$$

Решение. Из данной системы следует, что $x>0$, $y>0$ и $z>0$. Из первого и второго уравнений выражаем x через y и z:

$$x=\left(y^{\frac{8}{15}}\right)^{\frac{3}{z}}=y^{\frac{8}{5z}},$$
$$x=\left(y^{\frac{z}{3}}\right)^{\frac{15}{2}}=y^{\frac{5z}{2}}.$$

Сравнивая правые части полученных равенств, имеем

$$y^{\frac{8}{5z}}=y^{\frac{5z}{2}}.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $y=1$ и $\frac{8}{5z}=\frac{5z}{2}$. Из последнего уравнения находим, что $z=\frac{4}{5}$. Взяв $y_1=1$, из первого уравнения системы получаем $x_1=1$. Тогда из третьего уравнения следует, что $z_1=2$. Взяв $z=\frac{4}{5}$, имеем $x=y^{\frac{8}{5z}}=y^2$. Тогда из третьего уравнения системы следует, что $\frac{4}{5}=y+\sqrt{y}$,

$$y_2=\left(\sqrt{\frac{21}{5}}-1\right)^2\cdot\frac{1}{4};\ x_2=\left(\sqrt{\frac{21}{5}}-1\right)^4\cdot\frac{1}{16}.$$

Итак, данная система имеет два решения:

$$x_1=y_1=1,\ z_1=2 \text{ и } x_2=\frac{1}{16}\left(\sqrt{\frac{21}{5}}-1\right)^4,\ y_2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{21}{5}}-1\right)^2,\ z_2=\frac{4}{5}.$$

§ 5. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ И ПОКАЗАТЕЛЬНУЮ ФУНКЦИИ

I. Пусть дано неравенство

$$\alpha<a^u<\beta, \tag{20}$$

где u — некоторое выражение, содержащее неизвестное x; а α, β и a — заданные положительные числа или параметры.

Прологарифмируем данное неравенство по основанию a. Если $a>1$, то неравенство (20) равносильно неравенству

$$\log_a\alpha<u<\log_a\beta.$$

Если $0<a<1$, то неравенство (20) равносильно неравенству

$$\log_a\alpha>u>\log_a\beta.$$

II. Если основание степени также зависит от x, т. е.

$$v^\alpha<v^u<v^\beta \tag{21}$$

(v зависит от x, т. е. содержит x, причем $v>0$), то неравенство (21) равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}\alpha<u<\beta,\\ v>1\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\beta<u<\alpha,\\ 0<v<1.\end{cases}$$

III. Неравенство

$$\alpha < \log_a u < \beta \tag{22}$$

можно представить в виде

$$\log_a a^\alpha < \log_a u < \log_a a^\beta. \tag{23}$$

В силу монотонности логарифмической функции неравенство (23) равносильно одному из неравенств

$$a^\alpha < u < a^\beta \text{ при } a > 1$$

или

$$a^\alpha > u > a^\beta \text{ при } 0 < a < 1.$$

В частности, неравенство

$$\log_a u < \beta \tag{24}$$

равносильно одному из неравенств

$$0 < u < a^\beta \text{ при } a > 1$$

или

$$u > a^\beta \text{ при } 0 < a < 1.$$

(Из последнего следует, что $u > 0$, так как $\alpha^\beta > 0$).

Неравенство

$$\log_a u > \beta \tag{25}$$

равносильно одному из неравенств

$$u > a^\beta, \text{ если } a > 1,$$

или

$$0 < u < a^\beta, \text{ если } 0 < a < 1.$$

Пример 1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)} < 1.$$

Решение. Это неравенство типа (20), где $u = \log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)$, $\beta = 1$. Так как $a = \frac{1}{2} < 1$, то оно равносильно неравенству

$$\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1) > 0.$$

Последнее согласно результату (25) равносильно неравенству

$$0 < x^2-3x+1 < 1.$$

Решая его (см. гл. III, § 14), находим

$$0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ и } \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3.$$

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{100} < \log_{0,1}^2 x < 1.$$

Решение. Данное неравенство перепишем в виде

$$0,1 < |\log_{0,1} x| < 1.$$

Последнее равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 0,1 < \log_{0,1} x < 1, \\ \log_{0,1} x > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -1 < \log_{0,1} x < -0,1, \\ \log_{0,1} x < 0 \end{cases}$$

или согласно результатам (23), (25) и (24) совокупности систем

$$\begin{cases} 0,1 < x < \sqrt[10]{0,1}, \\ 0 < x < 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sqrt[10]{10} < x < 10, \\ x > 1. \end{cases}$$

Таким образом, решения данного неравенства — интервал $(0,1, \sqrt[10]{0,1})$ и $(\sqrt[10]{10}, 10)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$4x^2 + 3 \cdot 3^{\sqrt{x}} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6.$$

Решение. Сгруппируем члены, содержащие $3^{\sqrt{x}}$. Имеем

$$(2x^2 - x - 3)(3^{\sqrt{x}} - 2) > 0.$$

Последнее равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 3 > 0, \\ 3^{\sqrt{x}} - 2 > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x^2 - x - 3 < 0, \\ 3^{\sqrt{x}} - 2 < 0. \end{cases}$$

Решая первую систему, находим $x > \frac{3}{2}$; решая вторую, находим $0 \leqslant x < \log_3^2 2$.

И при решении неравенств иногда целесообразна замена неизвестного.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1}.$$

Решение. Учитывая, что $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1} = \log_3 \frac{x+1}{x-1}$, и полагая $\log_3 \frac{x+1}{x-1} = y$, получаем $\log_2 y < \log_{\frac{1}{2}} y$, или $\log_2 y < -\log_2 y$, т. е. $\log_2 y < 0$. Последнее равносильно неравенству $0 < y < 1$. Возвращаясь к неизвестному x, имеем

$$0 < \log_3 \frac{x+1}{x-1} < 1,$$

что в соответствии с результатом (21) равносильно неравенству

$$1 < \frac{x+1}{x-1} < 3.$$

Решая последнее, находим $2 < x < \infty$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_{\frac{9}{2}} \left(4^{x^2+4x} + 2^{x^2+4x-1} - \frac{1}{2}\right) < 1.$$

Решение. Данное неравенство согласно результату (24) равносильно неравенству

$$0 < 4^{x^2+4x} + 2^{x^2+4x-1} - \frac{1}{2} < \frac{9}{2}.$$

Полагая $y = 2^{x^2+4x}$ (тогда $4^{x^2+4x} = y^2$), имеем $0 < y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} < \frac{9}{2}$, или $0 < 2y^2 + y - 1 < 9$, причем $y > 0$. Таким образом, данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2y^2 + y - 1 > 0, \\ 2y^2 + y - 10 < 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим, что $\frac{1}{2} < y < 2$. Следовательно, $\frac{1}{2} < 2^{x^2+4x} < 2$, или $2^{-1} < 2^{x^2+4x} < 2^1$. Это неравенство согласно результату (21) равносильно неравенству $-1 < x^2 + 4x < 1$, из которого находим, что

$$-2 - \sqrt{5} < x < -2 - \sqrt{3} \text{ и } -2 + \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{5}.$$

ГЛАВА IX
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. УГОЛ В ТРИГОНОМЕТРИИ

Пусть луч, выходящий из точки O, занимает исходное положение OA. Сделав некоторый поворот от этого исходного положения против или по часовой стрелке, он займет положение OB (рис. 52). Это новое положение вместе с исходным образует угол AOB, у которого OA называется *начальной*, а OB — *конечной* сторонами. Угол называется *положительным*, если он образован поворотом луча против часовой стрелки, и *отрицательным* — в противоположном случае. Наименьший положительный поворот, при котором конечная сторона совместится с начальной, называется полным углом.

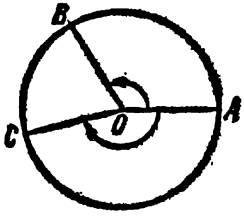


Рис. 52

При вращении луча от начальной стороны OA до конечной OB, он может совершить несколько полных положительных или отрицательных поворотов, т. е. одно и то же взаимное расположение лучей OA и OB может быть достигнуто бесконечным множеством различных поворотов. Следовательно, чтобы задать угол AOB, недостаточно знать его начальную и конечную стороны, а нужно указать еще тот поворот, который переводит луч из начального положения OA в конечное OB. Этим и определяется угол в тригонометрии.

Как и в геометрии, углы в тригонометрии измеряются в градусах и радианах*. Но если мера или величина геометрического угла есть число положительное, принимающее значения от 0 до 360° (градусов) или от 0 до 2π (радианов), то величина тригонометрического угла есть число, которое может принимать любые положительные и отрицательные значения.

Два угла называются *равными*, если равны их величины. При этом, очевидно, их начальные и конечные стороны могут быть совмещены. Обратное утверждение не имеет места, т. е. из совпадения сторон двух углов α и β не вытекает, вообще говоря, равенство этих углов. Однако они могут отличаться друг от друга только на полное число оборотов положительных или отрицательных, т. е.

$$\alpha-\beta=360^\circ\cdot k, \text{ или } \alpha-\beta=2\pi k,$$

где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Здесь, как и в дальнейшем, под словом угол понимают величину угла (т. е. слово «величина» опускается, так же как говоря «сторона треугольника $a=3$», опускают слово «длина»).

Суммой двух углов α и β называется третий угол γ, построенный по следующему правилу: принимая конечную сторону

* Существуют и другие единицы для измерения углов. Мы на них останавливаться не будем.

первого угла за начальную сторону второго, откладывают от нее второй угол против или по часовой стрелке, в зависимости от знака второго слагаемого (рис. 53).

Вычитание углов определяется как действие, обратное сложению, т. е. $\alpha-\beta=\gamma$, если $\beta+\gamma=\alpha$.

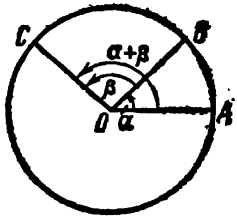


Рис. 53

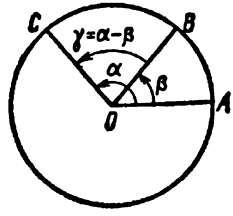


Рис. 54

Таким образом, если углы α и β откладывать от общей стороны OA и за начальную сторону разности γ принять конечную сторону OB вычитаемого β, то конечная сторона γ совпадет с конечной стороной OC уменьшаемого α (рис. 54). Заметим, что всякое вычитание может быть рассмотрено как сложение, т. е.

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

Очевидно, сложению углов соответствует сложение их величин, т. е. величина суммы углов равна сумме величин слагаемых.

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ КРУГ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Для удобства в тригонометрии используется так называемый «тригонометрический круг»—окружность произвольного радиуса R с центром в начале прямоугольной системы координат (рис. 55). Координатные оси делят этот круг на четыре квадранта, или четверти, соответствующие координатным четвертям и занумерованные в том же порядке. Горизонтальный радиус OA принимают за неподвижный и считают его начальной стороной всех углов в круге (если не сделано дополнительной оговорки). Конечную сторону этих углов образует другой радиус OB, который называют подвижным. Каждому действительному числу α соответствует единственное положение подвижного радиуса OB (или точки B на окружности), образующее угол в α радианов. Обратная связь неоднозначна—каждому положению подвижного радиуса OB (или точки B на окружности) соответствует бесчисленное множество

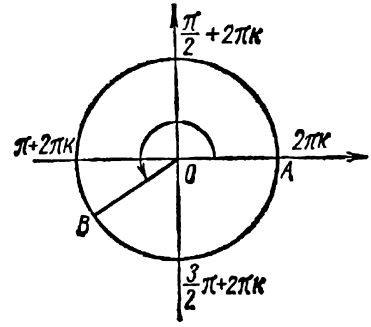


Рис. 55

действительных чисел α — величины всех углов, определенных этим положением подвижного радиуса OB. Все эти числа содержатся в формуле $\alpha+2\pi k$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ и α — одно из этих чисел.

Говорят, что угол α оканчивается в той четверти, в которой лежит соответствующий ему подвижный радиус. В частности, если α — острый угол, т. е. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то говорят, что он принадлежит I четверти.

Углы, конечная сторона которых лежит на горизонтальном или вертикальном диаметре (границы четвертей), обычно не относят ни к одной из четвертей. Таким образом, углы, изменяющиеся в интервалах $\left(2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, или $(360°\cdot k, 90°+360°k)$, оканчиваются в I четверти. Углы, изменяющиеся в интервалах $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \pi+2\pi k\right)$, или $(90°+360°k, 180°+360°\cdot k)$, оканчиваются во II четверти. Углы, изменяющиеся в интервалах $\left(\pi+2\pi k, \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right)$, или $(180°+360°\cdot k, 270°+360°\cdot k)$, оканчиваются в III четверти. И, наконец, углы, изменяющиеся в интервалах $\left(\frac{3}{2}\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k\right)$ или $(270°+360°\cdot k, 360°+360°\cdot k)$, оканчиваются в IV четверти.

Замечание. Вместо углов в круге можно говорить о соответствующих им дугах окружности, как положительных, так и отрицательных. При этом градусные измерения тех и других совпадают. Поэтому все, что в дальнейшем будет говориться об углах, в равной мере следует относить и к дугам.

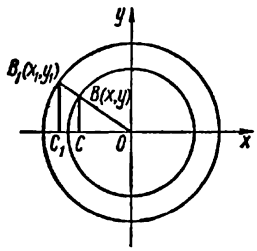


Рис. 56

Пусть α — некоторый угол и OB — соответствующий ему подвижный радиус. Обозначим через x и y координаты точки B и докажем, что для любого угла α величины отношений $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$ не зависят от длины радиуса R. С этой целью рассмотрим два тригонометрических круга с радиусами R и R_1 (рис. 56).

Пусть для определенности $R<R_1$. Продолжая радиус OB, получим на второй окружности точку B_1 с координатами x_1 и y_1. Очевидно, что тот же угол α во втором круге определяется радиусом OB_1. Если точки B и B_1 попадают на концы вертикального или горизонтального диаметра, то справедливость нашего утверждения очевидна (например, для левого конца горизонтального диаметра $y=y_1=0$, $x=-R$, $x_1=-R_1$ и, следовательно, $\frac{y}{R}=\frac{y_1}{R_1}=0$, $\frac{x}{R}=\frac{x_1}{R_1}=-1$. Аналогично исследуются другие три случая). Во всех остальных случаях можно построить подобные треугольники OBC и OB_1C_1, где C и C_1 — проекции точек B и B_1 на горизонтальный диаметр.

Из подобия этих треугольников имеем

$$\frac{BC}{R}=\frac{B_1C_1}{R_1} \text{ и } \frac{OC}{R}=\frac{O_1C_1}{R_1}.$$

Так как $BC=|y|$, $B_1C_1=|y_1|$, $OC=|x|$ и $OC_1=|x_1|$, то

$$\frac{|y|}{R}=\frac{|y_1|}{R_1} \text{ и } \frac{|x|}{R}=\frac{|x_1|}{R_1},$$

откуда в силу совпадения знаков x и x_1, y и y_1 следует требуемое, т. е.

$$\frac{y}{R}=\frac{y_1}{R_1} \text{ и } \frac{x}{R}=\frac{x_1}{R_1}. \qquad (*)$$

Из равенств (*), справедливых для любого α, следует независимость от длины радиуса R отношения $\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1}\right)$, если $x\neq 0$ и $x_1\neq 0$, т. е. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, и отношения $\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}\right)$, если $y\neq 0$ и $y_1\neq 0$, т. е. $\alpha\neq k\pi$. Все эти четыре отношения, зависящие только от угла α, называются тригонометрическими функциями этого угла, а именно:

1. *Синусом* угла α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, соответствующего α, к длине радиуса:

$$\sin\alpha=\frac{y}{R}.$$

2. *Косинусом* угла α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, соответствующего α, к длине радиуса:

$$\cos\alpha=\frac{x}{R}.$$

3. *Тангенсом* угла α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, соответствующего α, к его абсциссе:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

4. *Котангенсом* угла α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, соответствующего α, к его ординате:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

Иногда, кроме этих четырех функций, рассматриваются еще две функции: секанс и косеканс.

Секансом угла α называется величина, обратная косинусу α, т. е. $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$. *Косекансом* угла α называется величина, обратная синусу α, т. е. $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$. Эти две функции специального интереса не представляют, ими пользуются лишь как удоб-

ным представлением выражений $\frac{1}{\sin\alpha}$ и $\frac{1}{\cos\alpha}$. Поэтому мы в дальнейшем будем изучать свойства только первых четырех функций: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Из определения тригонометрических функций вытекает, что:

1) функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого α, причем $|\sin\alpha|\leqslant 1$ и $|\cos\alpha|\leqslant 1$;

2) функция $\operatorname{tg}\alpha$ определена для всех $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. Подвижный радиус, соответствующий значению $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$, лежит на вертикальном диаметре (абсцисса его конца равна нулю);

3) функция $\operatorname{ctg}\alpha$ определена для всех $\alpha\neq\pi k$. Подвижный радиус, соответствующий значению $\alpha=\pi k$, лежит на горизонтальном диаметре (ордината его конца равна нулю).

Знаки функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ совпадают со знаками ординаты и абсциссы конца соответствующего радиуса. Знаки функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ положительны в тех четвертях, где совпадают знаки координат x и y. Следовательно, $\sin\alpha>0$, если α оканчивается в I и II четвертях, $\cos\alpha>0$, если α оканчивается в I и IV четвертях, $\operatorname{tg}\alpha>0$ и $\operatorname{ctg}\alpha>0$, если α оканчивается в I и III четвертях.

Вместо тригонометрической функции угла или дуги можно говорить о тригонометрической функции действительного числа α.

Тригонометрической функцией *действительного аргумента* α называется одноименная тригонометрическая функция дуги или угла в α радианов. Все свойства тригонометрических функций мы будем формулировать для любого аргумента α, который может быть углом, дугой или числом.

§ 3. СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

I. **Четность и нечетность.** Для любых двух аргументов α и $-\alpha$, отличающихся только знаком, соответствующие им подвижные радиусы OB и OB_1 симметричны относительно оси абсцисс. Поэтому $x_B=x_{B_1}$, $y_B=-y_{B_1}$ и

$$\sin(-\alpha)=\frac{y_{B_1}}{R}=-\frac{y_B}{R}=-\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha)=\frac{x_{B_1}}{R}=\frac{x_B}{R}=\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{-y_{B_1}}{x_{B_1}}=\frac{-y_B}{x_B}=-\operatorname{tg}\alpha\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right),$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{x_{B_1}}{-y_{B_1}}=\frac{x_B}{-y_B}=-\operatorname{ctg}\alpha\quad(\alpha\neq\pi k).$$

Согласно определениям четной и нечетной функций (см. гл. VI) отсюда вытекает, что функция $\cos\alpha$—четная, а функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$—нечетные.

II. **Периодичность.** Значения тригонометрических функций определяются положением подвижного радиуса, которое не меняется, если его повернуть на полный угол по или против часовой стрелки. Это означает, что при прибавлении к аргументу α числа $\pm 2\pi$

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha \qquad \text{для любого } \alpha,$$
$$\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha \qquad \text{для любого } \alpha.$$

Что касается тангенса и котангенса, то

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{для } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \text{для } \alpha \neq \pi n.$$

В самом деле, точки $B(x, y)$ и $B_1(x_1, y_1)$ окружности (рис. 57), соответствующие аргументам α и $\alpha+\pi$ (или α и $\alpha-\pi$), симметричны относительно начала координат, т. е. $x = -x_1$, $y = -y_1$. Отсюда следует, что $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{y}$ и $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}$, т. е. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом, функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — периодические.

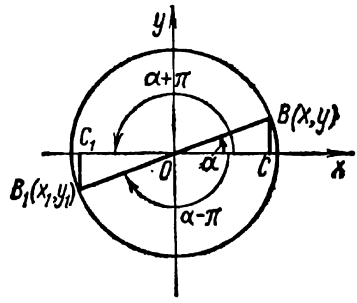


Рис. 57

Покажем, что основной период функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ равен 2π, а функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ равен π.

Предварительно заметим, что: 1) $\sin\alpha = 1$ в том единственном случае, когда соответствующий подвижный радиус совпадает с верхней половиной вертикального диаметра, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\cos\alpha = 1$ в том единственном случае, когда соответствующий подвижный радиус совпадает с правой половиной горизонтального диаметра, т. е. $\alpha = 2\pi k$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 0$ в том единственном случае, когда соответствующий подвижный радиус лежит на горизонтальном диаметре, т. е. $\alpha = \pi k$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$ в том единственном случае, когда соответствующий подвижный радиус лежит на вертикальном диаметре, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Из этих замечаний следует, что:

1) наименьший положительный поворот, через который может повториться единичное значение синуса и косинуса, равен 2π. Это означает, что период синуса и косинуса не может быть меньше, чем 2π. Следовательно, период 2π является основным для этих функций;

2) наименьший положительный поворот, через который может повториться нулевое значение тангенса и котангенса, равен π. Следовательно, период π является для этих функций основным.

III. **Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.** Пусть аргументу α соответствует подвижный радиус OB и x, y — координаты точки B. Имеем:

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{R}\right)^2+\left(\frac{x}{R}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{R^2}=1$, так как $x^2+y^2=R^2$ (см. гл. I). Таким образом, для любого α

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \tag{1}$$

2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{R}}{\frac{x}{R}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ для любого $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ *;

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{R}}{\frac{y}{R}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$ для любого $\alpha\neq\pi k$.

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{3}$$

3) к этим трем тождествам присовокупим еще два, определяющие функции $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right), \tag{4}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\quad(\alpha\neq\pi k). \tag{5}$$

Тождества (1)—(5) называются основными. Из них получаются еще три тождества.

Из соотношений (2) и (3) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}k\right). \tag{6}$$

Из формул (2), (1) и (4) следует, что

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha,$$

т. е.

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right). \tag{7}$$

Из формул (3), (1) и (5) следует, что

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

т. е.

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha\ (\alpha\neq k\pi). \tag{8}$$

---

* Здесь и в дальнейшем $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

§ 4. ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Дальнейшие свойства тригонометрических функций мы получим при анализе их графиков.

I. График функции $y=\sin x$. Возьмем окружность единичного радиуса с центром в точке $(-1,0)$ и разделим на m равных частей верхнюю полуокружность (рис. 58). Точки деления обозначим через $A_0, A_1, \ldots, A_m$ (нумерация производится против часовой стрелки). На то же число m равных частей разделим отрезок $[0, \pi]$ оси абсцисс. Точки деления обозначим через $x_0=0, x_1, x_2, \ldots, x_m=\pi$.

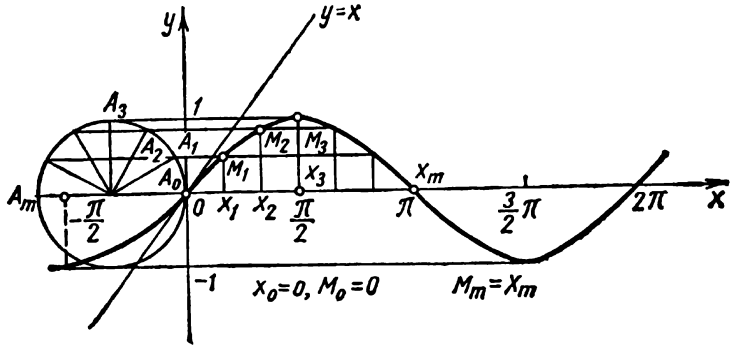


Рис. 58

Очевидно, что $\sin x_k$ равен ординате точки A_k окружности. Поэтому, проведя из $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ вертикали и спроектировав на них $A_0, A_1, \ldots, A_m$ соответственно, мы найдем ряд точек $M_0, M_1, \ldots, M_m$, лежащих на искомом графике. Теперь соединим их плавной кривой и мы получим график синуса на отрезке $[0, \pi]$. Используя свойство нечетности, а затем периодичности синуса, строим его график сначала на отрезке $[-\pi, 0]$, а затем на всей числовой оси. Полученная кривая называется *синусоидой*, а каждая ее часть, соответствующая отрезкам $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ... или $[-\pi, \pi]$, $[\pi, 3\pi]$ и т. д., называется *волной* синусоиды.

Замечания. 1) так как $\sin x < x$ (см. § 5), то синусоида лежит ниже биссектрисы I координатного угла и выше биссектрисы III координатного угла;

2) при соединении точек $M_0, M_1, \ldots, M_m$ полезно учесть, что график функции $y=\sin x$ выпуклый на интервале $(0, \pi)$. В самом деле, условием выпуклости в нашем случае является выполнение неравенства

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2} > \frac{\sin x_1+\sin x_2}{2},$$

или

$$\sin x_1+\sin x_2 < 2\sin\frac{x_1+x_2}{2}.$$

где $0 < x_1 < x_2 < \pi$. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos\frac{x_1-x_2}{2} < 2\sin\frac{x_1+x_2}{2},$$

или

$$\cos\frac{x_1-x_2}{2} < 1$$

(см. гл. X). Последнее очевидно, так как $0 < \left|\frac{x_1-x_2}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$.

Мы видим, что функция $y=\sin x$:

1) монотонно возрастает от -1 до 1 на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, принимая при этом все значения от -1 до 1, и монотонно убывает от 1 до -1 на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right]$, принимая при этом все значения от 1 до -1;

2) принимает наибольшее значение, равное 1, при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и наименьшее значение, равное -1, при $=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$;

3) обращается в нуль при $x=\pi k$.

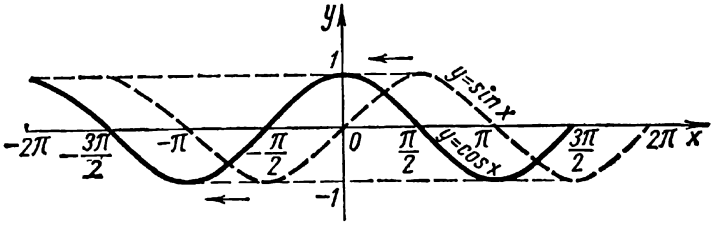


Рис. 59

II. График функции $y=\cos x$. Так как $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (см. гл. X), то график функции $y=\cos x$ получается сдвигом графика $y=\sin x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево вдоль оси Ox (см. гл. VII, § 8). Полученная кривая *(косинусоида)* симметрична относительно оси Oy (рис. 59).

Мы видим, что функция $y=\cos x$:

1) монотонно возрастает от -1 до 1 на каждом из промежутков $[\pi+2\pi k,\ 2\pi+2\pi k]$, принимая при этом все промежуточные значения от -1 до 1, и монотонно убывает от 1 до -1 на каждом из промежутков $[2\pi k,\ \pi+2\pi k]$, принимая при этом все значения от 1 до -1;

2) принимает наибольшее значение, равное 1, при $x=2\pi k$ и наименьшее значение, равное -1, при $x=\pi+2\pi k$;

3) обращается в нуль при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

III. График функции $y = \operatorname{tg} x$. Проведем единичную окружность с центром в точке (—1, 0) (рис. 60). Разделив дугу I четверти на m равных частей, получаем точки A_0, A_1 ..., $A_m = \frac{\pi}{2}$ ($A_0 = 0$). Проведем радиусы OA_0, OA_1, ..., OA_{m-1} и продолжим их до пересечения с осью Oy в точках C_0, C_1, C_2, ..., C_{m-1}. Одновременно разделим отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox на m равных частей точками $x_0 = 0$, x_1, ..., $x_m = \frac{\pi}{2}$. Очевидно, значение тангенса в точке x_k численно равно длине отрезка OC_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$). Поэтому, проведя вертикали из точек x_0, x_1, ..., x_{m-1} и спроектировав на них точки C_0, C_1, ..., C_{m-1} соответственно, находим точки M_0, M_1, ..., M_{m-1}, лежащие на графике $y = \operatorname{tg} x$. Соединив их плавной кривой, получаем график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 60).

Замечания. 1) из неравенства $\operatorname{tg} x > x$ для $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (см. гл. IX, § 5) следует, что график $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ лежит выше биссектрисы I координатного угла;

2) при соединении точек M_0, M_1, ..., M_{m-1} полезно учесть, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ вогнутый на промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В самом деле, условием вогнутости в нашем случае является выполнение неравенства

$$\operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2},$$

или

$$2 \operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2} < \operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2,$$

где $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$. Используя формулы (38) и (50) гл. X, получаем равносильное неравенство

$$\frac{\sin(x + x_2)}{1 + \cos(x_1 + x_2)} < \frac{\sin(x_1 + x_2)}{2 \cos x_1 \cdot \cos x_2},$$

которое равносильно, в свою очередь, неравенству

$$2 \cos x_1 \cdot \cos x_2 < 1 + \cos(x_1 + x_2).$$

Переходя в левой части от произведения к сумме (см. формулу (26) гл. X), получим неравенство

$$\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2) < 1 + \cos(x_1 + x_2),$$

или $\cos(x_1 - x_2) < 1$, которое очевидно.

Используя нечетность и периодичность тангенса ($T = \pi$), строим его график вначале на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, а затем на всей числовой оси (рис. 60).

График функции $y=\operatorname{tg} x$ называется *тангенсоидой*. Тангенсоида состоит из ряда отдельных одинаковых частей (ветвей), на которые она распадается при прохождении аргумента x через точки $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Поэтому достаточно рассмотреть одну из таких ветвей, например, на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале $y=\operatorname{tg} x$

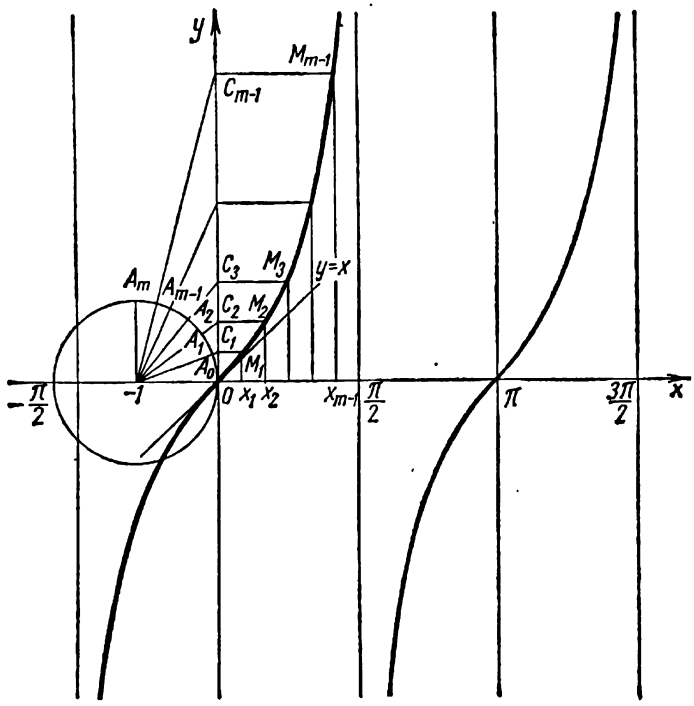


Рис. 60

возрастает, принимая при этом все значения, как положительные, так и отрицательные. Если аргумент приближается к правому концу интервала, то функция $y=\operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает.

Это означает, что для любого $M>0$ существует интервал $\left(\bar{x}_0; \frac{\pi}{2}\right)$, в котором $\operatorname{tg} x > M$ (см. гл. VII). В этом случае говорят, что $\operatorname{tg} x$ стремится к положительной бесконечности, когда x стремится к $\frac{\pi}{2}$, оставаясь все время меньше $\frac{\pi}{2}$, и пишут

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Если аргумент x приближается к левому концу указанного интервала, то функция $y=\operatorname{tg} x$ неограниченно убывает.

Это означает, что для любого $M > 0$ существует интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \bar{x}_1\right)$, в котором $\operatorname{tg} x < -M$. В этом случае пишут

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ являются вертикальными асимптотами тангенсоиды.

IV. График функции $y = \operatorname{ctg} x$. Так как $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, то, согласно правилам I и VII (гл. VII, §8) график котангенса получается из графика тангенса путем двух преобразований: сначала сдвигаем тангенсоиду $y = \operatorname{tg} x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц вправо вдоль оси Ox, а затем полученный график $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ отображаем симметрично относительно оси абсцисс (рис. 61).

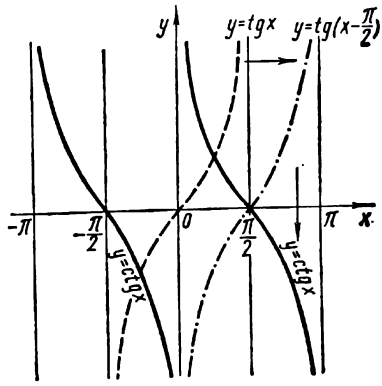


Рис. 61

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ называется *котангенсоидой*. Он состоит из одинаковых ветвей, соответствующих интервалам $(\pi k, \pi + \pi k)$. На каждом из этих интервалов $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает, причем $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \operatorname{ctg} x = +\infty$ и $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty$. Прямые $x = \pi k$ являются его вертикальными асимптотами.

V. График простого гармонического колебания (гармоника). Простое гармоническое колебание описывается уравнением $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, где $A > 0$ называется *амплитудой*, ω — *частотой*, а φ — *начальной фазой*. Если представить эту функцию в виде $y = A \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$, то мы видим, что ее график получается из графика $y = \sin x$ путем следующих его последовательных преобразований.

1. Согласно правилу VI, гл. VII, § 8 сжатием вдоль оси Ox с коэффициентом ω из графика $y = \sin x$ получаем график $y = \sin \omega x$ (рис. 62, *а*).

2. Сдвигая кривую $y = \sin \omega x$ вдоль оси Ox на отрезок $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ $\left(\text{вправо, если } \frac{\varphi}{\omega} < 0, \text{ и влево, если } \frac{\varphi}{\omega} > 0\right)$, получаем график функции $y = \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ (рис. 62, *б*).

3. Растягивая кривую $y = \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ вдоль оси Oy с коэф-

фициентом A, получаем требуемый график $y = A \sin \omega \left(x + \frac{\varphi}{\omega} \right)$, или $y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ (рис. 62, *б*).

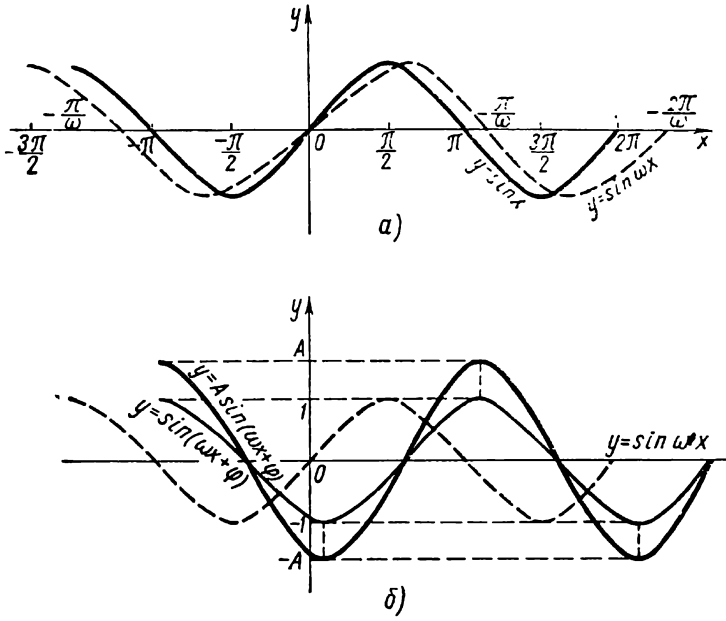


Рис. 62

Так как функция $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ — периодическая с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ (см. гл. VII, § 5), то достаточно построить ее график сначала на отрезке $\left[-\frac{\pi}{\omega} - \varphi, \frac{\pi}{\omega} - \varphi \right]$, а затем полученную основную волну

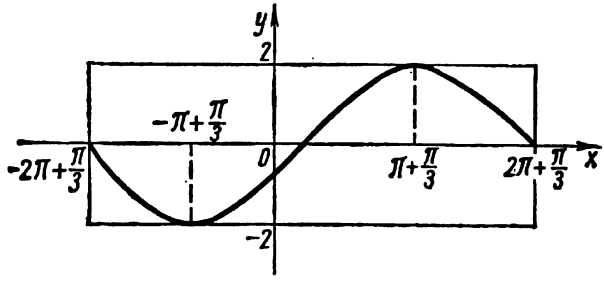


Рис. 63

гармоники продолжить периодически. Основная волна гармоники получается путем преобразований 1, 2, 3 основной волны синусоиды $y = \sin x$, $|x| \leqslant \pi$.

Итак, график гармоники $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ есть синусоида с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ее основная волна расположена внутри прямоугольника со сторонами $y = \pm A$ и $x = \pm \frac{\pi}{\omega} - \varphi$.

Пример. Построить график функции

$$y = 2\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Решение. Мы видим, что искомый график есть гармоника с амплитудой $A = 2$, периодом $T = 4\pi$ и начальной фазой $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Ее основная волна расположена в прямоугольнике со сторонами $y = \pm 2$, $x = \pm 2\pi + \frac{\pi}{3}$. Наибольшее значение $A = 2$ достигается при $x = \pi + \frac{\pi}{3}$, наименьшее — при $x = -\pi + \frac{\pi}{3}$ (рис. 63).

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

Пусть α — острый угол $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ и OB — соответствующий ему подвижный радиус. Тогда этот угол можно рассматривать как острый угол в прямоугольном треугольнике BOC, в котором катеты OC и BC равны соответственно координатам x и y точки B, а ги-

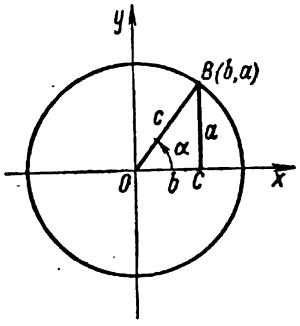


Рис. 64

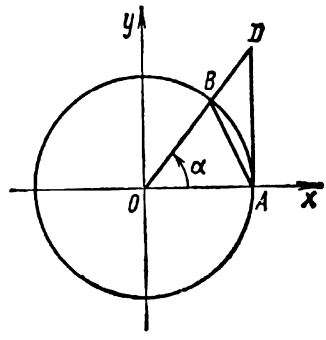


Рис. 65

потенуза OB равна радиусу круга (рис. 64). Верно и обратное. Всякий прямоугольный треугольник BOC с острым углом α, гипотенузой c и катетами a и b можно поместить в тригонометрический круг радиуса $R = c$ так, как это указано на рис. 64. При этом координаты точки B совпадают с длинами катетов: $B(b, a)$.

Согласно определению тригонометрических функций произвольного угла имеем:

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, т. е. синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к гипотенузе;

2) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, т. е. косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, т. е. тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, т. е. котангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к противолежащему.

Очевидно, что все тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике положительны.

Пусть α — радианная мера острого угла. Продолжим соответствующий ему подвижный радиус OB до пересечения в точке D с вертикальной касательной, проведенной к окружности в точке A (рис. 65). Рассмотрим треугольники BOA и DOA и круговой сектор BOA. Все они содержат общий угол α. Согласно свойству площадей (см. гл. XV)

$$S_{BOA} < S_{\overset{\frown}{BOA}} < S_{DOA}. \qquad (*)$$

Вычисляя эти площади, имеем

$$S_{BOA} = \frac{1}{2} OB \cdot \sin\alpha \cdot OB = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin\alpha.$$

$$S_{\overset{\frown}{BOA}} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha \quad \text{и} \quad S_{DOA} = \frac{1}{2} OA \cdot AD = \frac{1}{2} OA \cdot OA \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Подставляя найденные значения площадей в неравенство (*) и сокращая все его члены на множитель $\frac{R^2}{2}$, получаем

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha. \qquad (9)$$

Итак, мы доказали важное неравенство, справедливое для действительных чисел α, заключенных в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Заметим, что $\sin\alpha < \alpha$ для любого $\alpha > 0$.

§ 6. ЗАДАЧИ

Пример 1. Для каких значений x определены следующие функции:

$$1)\ \operatorname{ctg}(3x - 45°); \quad 2)\ \operatorname{tg}\frac{(x-1)^2}{2}?$$

Решение. 1. Функция $\operatorname{ctg}\alpha$ определена для всех углов $\alpha \neq 180° \cdot k$. Следовательно, функция $\operatorname{ctg}(3x - 45°)$ определена для всех x, при которых $3x - 45° \neq 180° \cdot k$, т. е. для $x \neq 15° + 60° \cdot k$.

2. Функция $\operatorname{tg}\frac{(x-1)^2}{2}$ определена для всех действительных значений x, при которых $\frac{(x-1)^2}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, т. е. для $x \neq 1 \pm \sqrt{\pi(2k+1)}$. Здесь k принимает лишь целые неотрицательные значения, так как при $k = -1, -2, \ldots$ подкоренное выражение $\pi(2k+1) < 0$.

Пример 2. Определить знаки чисел: 1) $\cos 2$; 2) $\cos(\sin\alpha)$; 3) $\sin 5 - \operatorname{tg} 4$.

Решение. 1. Так как $\pi = 3{,}1416\ldots$, то $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$. В этом

интервале косинус принимает отрицательные значения. Следовательно, $\cos 2 < 0$.

2. Так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого α, то $-\frac{\pi}{2} < \sin\alpha < \frac{\pi}{2}$. Но в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ косинус принимает положительные значения, поэтому $\cos(\sin\alpha) > 0$.

3. Так как $\pi = 3{,}1416, \ldots$, $\frac{3}{2}\pi = 4{,}71, \ldots$, $2\pi = 6{,}28, \ldots$, то $\frac{3}{2}\pi < 5 < 2\pi$ и $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$. Поэтому $\sin 5 < 0$, $\operatorname{tg} 4 > 0$. Следовательно, $\sin 5 - \operatorname{tg} 4 < 0$.

Пример 3. В каких четвертях может оканчиваться α, если:

1) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2$; 2) $\cos\alpha = -\frac{\pi}{2}$; 3) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$?

Решение. 1. Число $-\frac{\pi}{2} + 2 > 0$. Следовательно, α оканчивается в тех четвертях, где тангенс принимает положительное значение, т. е. в I и III четвертях. Это значит, что α может лежать лишь в одном из интервалов $\left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

2. Так как $-\frac{\pi}{2} < -1$, а косинус изменяется в пределах от -1 до 1, то не существует действительного α, при котором $\cos\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

3. Данное равенство справедливо для тех α, для которых $|\operatorname{tg}\alpha| = -\operatorname{tg}\alpha$. А это означает, что $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Следовательно, α может оканчиваться во II и IV четвертях, т. е. в одном из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Пример 4. Какие из тригонометрических функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут принимать значения:

1) $a + \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$; 2) $1 - \frac{1}{b}$ $(b > 0)$?

Решение. 1. Если $a \neq 0$, то $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geqslant 2$ (см. гл. II, § 8). Следовательно, эти значения могут принимать лишь функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут принимать любые значения, в частности, и значения $1 - \frac{1}{b}$ при любом $b \neq 0$.

Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ могут принимать значения $1 - \frac{1}{b}$ лишь для тех b, при которых $\left|1 - \frac{1}{b}\right| \leqslant 1$. Решая это неравенство и учитывая, что $b > 0$, находим $\frac{1}{2} \leqslant b < \infty$. Таким образом, функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принимают значения $1 - \frac{1}{b}$ в случае, если $b \geqslant \frac{1}{2}$. Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут принимать значения $1 - \frac{1}{b}$ при любых $b \neq 0$.

Пример 5. Какие из приведенных ниже функций являются четными и нечетными:

$$1)\ y=\sin^2 x;\quad 2)\ y=\sin x+2;\quad 3)\ y=\sqrt{\sin x}?$$

Решение. 1. $y=\sin^2 x=\sin x\cdot\sin x$ есть произведение двух нечетных функций и, следовательно, функция четная.

2. $y=\sin x+2$ есть сумма нечетной и четной функции и, следовательно, не обладает четностью, т. е. не является ни четной, ни нечетной функцией.

3. Так как $y=\sin x$ — нечетная функция, то отсюда следует, что $\sqrt{\sin x}$ четностью не обладает (радикал с четным показателем от нечетной функции (см. гл. VII, § 6).

Пример 6. Доказать, что функция $y=\sin\sqrt{x}$ не имеет периода.

Решение. Предположим, что T — период функции $\sin\sqrt{x}$. Тогда, по определению периода $\sin\sqrt{x+T}=\sin\sqrt{x}$ для любого x. Взяв в частности $x=0$ и $x=T$, получим два равенства

$$\sin\sqrt{T}=0 \quad\text{и}\quad \sin\sqrt{2T}=\sin\sqrt{T},$$

из которых вытекает, что $\sqrt{T}=\pi k$ и $\sqrt{2T}=\pi n$, где k и n — целые. Отсюда следует, что $\pi^2k^2=\frac{1}{2}\pi^2n^2$, т. е. $2=\frac{n^2}{k^2}$, что невозможно при целых n и k (см. гл. I).

Пример 7. Доказать, что $|\cos\alpha|+|\sin\alpha|\geqslant 1$.

Решение. Очевидно, что $\cos^2\alpha=|\cos\alpha|^2\leqslant|\cos\alpha|$ и $\sin^2\alpha=|\sin\alpha|^2\leqslant|\sin\alpha|$. Отсюда следует, что $|\cos\alpha|+|\sin\alpha|\geqslant 1$, причем это равенство достигается лишь в том случае, когда либо $|\sin\alpha|=1$, либо $|\cos\alpha|=1$, т. е. при $\alpha=\pi k$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Последние два равенства можно объединить в одно $\alpha=\frac{\pi}{2}\cdot n$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm\ \ldots$.

Можно дать другое доказательство, использующее тригонометрический круг. Пусть $\alpha\neq\frac{\pi}{2}n$ и $OB=1$ — подвижный радиус, соответствующий α. Рассмотрим прямоугольный треугольник BOC (C — проекция точки B на горизонтальный диаметр). Очевидно, $|\sin\alpha|=\frac{BC}{1}=BC$, $|\cos\alpha|=\frac{OC}{1}=OC$, $OB=R=1$. По свойству сторон треугольника $BC+OC>OB$, что и дает требуемое неравенство $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|>1$.

При $\alpha=\frac{\pi}{2}n$ либо $|\cos\alpha|=0$ и $|\sin\alpha|=1$, либо $|\sin\alpha|=1$ и $|\cos\alpha|=0$, т. е. $|\cos\alpha|+|\sin\alpha|=1$.

Пример 8. В каких четвертях справедливо неравенство $\sin\alpha+\cos\alpha<1$?

Решение. В I четверти $\sin\alpha=|\sin\alpha|$, $\cos\alpha=|\cos\alpha|$ и, следовательно, $\sin\alpha+\cos\alpha\geqslant 1$ (см. пример 7). Во II четверти $\cos\alpha<0$ и поэтому $\sin\alpha+\cos\alpha<\sin\alpha<1$. В III четверти $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$ и поэтому $\sin\alpha+\cos\alpha<1$. В IV четверти $\sin\alpha<0$ и поэтому $\sin\alpha+\cos\alpha<\cos\alpha<1$. Итак, неравенство $\sin\alpha+\cos\alpha<1$

справедливо для всех α, оканчивающихся во II, III и IV четвертях.

Пример 9. Определить, что больше: 1) $\sin 1$ или 1; 2) $\operatorname{tg} 1$ или 1; 3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ или $\operatorname{tg} 0{,}8$.

Решение. 1. Из неравенства $\sin\alpha < \alpha\,(\alpha > 0)$ сразу следует, что $\sin 1 < 1$.

2. Из неравенств $\alpha < \operatorname{tg}\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ и $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ сразу следует, что $\operatorname{tg} 1 > 1$.

3. Так как $\frac{\pi}{5} < 0{,}8$ и $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} < \operatorname{tg} 0{,}8$.

Пример 10. Зная, что $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, найти значения всех тригонометрических функций этого аргумента.

Решение. I способ. Согласно формуле (1) $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (перед радикалом берется знак «—», так как в указанных пределах $\sin\alpha < 0$). Затем, по формулам (2) и (3) находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sqrt{2}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

II способ. Будем решать эту задачу, исходя из определения тригонометрических функций. Так как значения тригонометрических функций не зависят от радиуса тригонометрического круга, то полагая $R = 3$, из равенства $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ находим, что абсцисса соответствующей точки круга равна $-1\,(x = -1)$. Из равенства $x^2 + y^2 = R^2$ находим ординату y этой точки $y = -2\sqrt{2}$ (в III четверти $y < 0$). Зная x, y и R, определяем значения остальных тригонометрических функций.

Пример 11. Выразить через $\operatorname{tg}\alpha$ остальные тригонометрические функции этого аргумента, если $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Решение. В равенстве $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ полагаем $x = -1$ (в III четверти $x < 0$). Тогда $y = -\operatorname{tg}\alpha$ и $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$. Согласно определению тригонометрических функций имеем

$$\sin\alpha = \frac{y}{R} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \cos\alpha = \frac{x}{R} = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Пример 12. Упростить выражения: 1) $\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$; 2) $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, где $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; 3) $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Во всех случаях имеется в виду, как всегда, арифметическое значение корня.

1) Из равенства $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$ следует, что $\sec^2\alpha-1=\operatorname{tg}^2\alpha$ и $\sqrt{\sec^2\alpha-1}=|\operatorname{tg}\alpha|$, так как знак $\operatorname{tg}\alpha$ неизвестен.

2) $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=|\sec\alpha|=-\sec\alpha$, так как $\sec\alpha<0$, если $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

3) $\sqrt{1-\sin^2\alpha}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha$, так как $\cos\alpha<0$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

БИБЛИОТЕКА
Советское Время
SOVIETIME.RU

ГЛАВА X

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

§ 1. ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ АРГУМЕНТОВ (ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ)

Будем рассматривать α и β как углы в тригонометрическом круге радиуса R. Отложим их от общего начала — радиуса OA. Пусть углу α соответствует радиус OB_1 и x_1, y_1 — координаты точки B_1, а углу β — радиус OB_2 и x_2, y_2 — координаты точки B_2 (рис. 66).

Согласно формуле расстояния между двумя точками (см. гл. I)

$$(B_1B_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Разделив все члены этого равенства на R^2 и учитывая, что

$$\frac{y_1}{R} = \sin\alpha, \quad \frac{x_1}{R} = \cos\alpha,$$

$$\frac{y_2}{R} = \sin\beta \text{ и } \frac{x_2}{R} = \cos\beta,$$

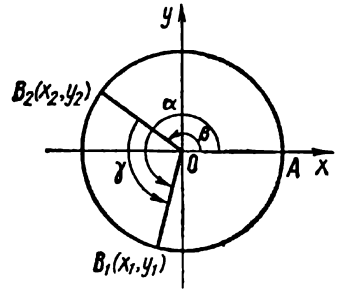


Рис. 66

получаем

$$\frac{(B_1B_2)^2}{R^2} = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2,$$

или

$$\frac{(B_1B_2)^2}{R^2} = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta). \quad (1)$$

Мы видим, что расстояние B_1B_2 зависит только от величин α и β и не зависит от выбора их общей начальной стороны.

Пусть $\gamma = \alpha - \beta$. Согласно определению вычитания углов (см. гл. IX, § 1), если принять радиус OB_2 за начальную сторону угла γ, то OB_1 совпадает с его конечной стороной (рис. 66).

Примем OB_2 за начальную сторону двух углов: нулевого (ему соответствует сам радиус OB_2) и угла, равного γ (ему соответствует радиус OB_1). Тогда по формуле (1), заменяя в ней α на γ, а β на 0, находим

$$\frac{(B_1B_2)^2}{R^2} = 2 - 2(\cos\gamma\cdot\cos 0 + \sin\gamma\cdot\sin 0). \quad (2)$$

Сравнивая соотношения (1) и (2) и учитывая, что $\cos 0 = 1$, а $\sin 0 = 0$, имеем

$$2 - 2(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta) = 2 - 2\cos\gamma.$$

Учитывая, что $\gamma = \alpha - \beta$, окончательно получаем тождество

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta, \quad (3)$$

справедливое для любых α и β.

Так как $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$, то из формулы (3) вытекает, что

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta),$$

откуда в силу четности косинуса и нечетности синуса вытекает тождество

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta, \tag{4}$$

также справедливое для любых α и β.

Полагая в формуле (3) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и учитывая, что $\cos\frac{\pi}{2}=0$, а $\sin\frac{\pi}{2}=1$, получаем равенство

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta, \tag{5}$$

справедливое для любого β. Отсюда, в свою очередь, следует справедливость для любого β равенства

$$\cos\beta=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right). \tag{6}$$

Используя равенства (5), (3) и (6), имеем

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta,$$

т. е.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta. \tag{7}$$

Так как $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$, то из формулы (7) получаем

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta. \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) справедливы для любых α и β.

Пусть $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$. Согласно формуле (2) гл. IX и формулам (7) и (4) этого параграфа

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}},$$

при условии, что $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$, т. е. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$.

Производя сокращение и снова используя формулу (2) гл. IX, получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \tag{9}$$

для любых α и β, удовлетворяющих условию $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\alpha\neq$ $\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, где k, n и m — целые числа и нуль. Замечая, что $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ и $\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$, из формулы (9) получаем, что

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \tag{10}$$

для любых α и β, удовлетворяющих условию $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\alpha\neq$ $\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$.

В качестве упражнения предлагаем читателю получить формулы

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta} \tag{11}$$

$$(\alpha\pm\beta\neq k\pi,\quad \alpha\neq n\pi,\quad \beta\neq m\pi).$$

§ 2. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Формулами приведения называются тождества, связывающие тригонометрические функции аргументов

$$\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\quad \pi\pm\alpha\quad \frac{3}{2}\pi\pm\alpha$$

с функциями аргумента α. Все эти формулы можно разбить на следующие группы:

I группа: для $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(90^\circ\pm\alpha)$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha\quad (\alpha\neq\pi k),$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha\quad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right).$$

II группа: для $\pi\pm\alpha$ $(180^\circ\pm\alpha)$.

$$\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha\quad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right),$$
$$\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,\quad \operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha\quad (\alpha\neq\pi k).$$

III группа: для $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ $(270^\circ\pm\alpha)$.

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha\quad (\alpha\neq\pi k),$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right).$$

(Знаки в обеих частях равенств берутся соответственно.)

Все записанные тождества являются следствиями формул предыдущего параграфа (если принять в них один из аргументов равным $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3}{2}\pi$) и формул $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Например, для первой группы формул получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha\pm\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha\mp\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\mp\sin\alpha$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{2}=1,\ \cos\frac{\pi}{2}=0\right).$$

Далее,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\mp\sin\alpha}=\mp\operatorname{ctg}\alpha$$

и

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)}=\frac{\mp\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mp\operatorname{tg}\alpha.$$

Анализируя все формулы приведения, можно отметить следующее:

1) если α откладывается от горизонтального диаметра $(\pi\pm\alpha)$, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента $\pi\pm\alpha$, не меняется; если же α откладывается от вертикального диаметра $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)$, то наименование приводимой функции заменяется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот);

2) все формулы приведения справедливы для любого α, кроме указанных, в частности, для $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Так как все тригонометрические функции такого α положительны, то знак правой части совпадает со знаком приводимой функции для $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (т. е. для острого угла, если α—угол).

Например, составим формулу приведения для $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$: 1) название тангенс меняем на котангенс $\left(\text{угол }\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$; 2) если считать угол α острым, то угол $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ будет оканчиваться в IV четверти, а там тангенс отрицателен. Поэтому пишем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Замечание. Формулы приведения позволяют выразить значение тригонометрической функции любого угла (для которого она, конечно, имеет смысл) через значение тригонометрической функции угла, заключенного в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$ (от 0 до 45°).

Действительно, любое β можно представить как $\beta = 2k\pi + \beta_1$, где угол β_1 удовлетворяет условию $0 \leqslant \beta_1 < 2\pi$. Воспользовавшись свойством периодичности тригонометрических функций, перейдем от функции угла β к функции угла β_1 ($0 \leqslant \beta_1 < 2\pi$). Но угол β_1 с каким-нибудь из диаметров круга (горизонтальным или вертикальным) образует острый угол $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$. Применяя соответствующую формулу приведения, мы значение функции угла β_1 выразим через значение функции угла α. Например,

$$\sin(-783°) = \sin(-3 \cdot 360° + 297°) = \sin 297° = \\ = \sin(270° + 27°) = -\cos 27°.$$

Из всего сказанного следует, что при составлении таблиц тригонометрических функций (а также их логарифмов) достаточно знать значения тригонометрических функций лишь для углов, взятых от 0 до 45°.

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КРАТНЫХ АРГУМЕНТОВ

Полагая в формулах (7) и (4) $\beta = \alpha$, получаем

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha, \tag{12}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \tag{13}$$

Используя тождество $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ и формулу (13), находим другое представление:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \tag{14}$$

Формулы (12)—(14) справедливы для любого α.

Полагая в формулах (9) и (11) $\beta = \alpha$, находим, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \left(\alpha \text{ и } 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \tag{15}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \quad (\alpha \text{ и } 2\alpha \neq \pi k). \tag{16}$$

Далее, имеем

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha,$$

откуда согласно равенствам (12) и (13) следует, что

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \tag{17}$$

Аналогично находим, что

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \tag{18}$$

Разделив тождество (17) на тождество (18), находим

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Разделив теперь числитель и знаменатель дроби на $\cos^3\alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \left(3\alpha \text{ и } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right). \tag{19}$$

Читателю в качестве упражнения предлагаем получить формулу

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1} \quad (3\alpha \text{ и } \alpha \neq \pi k). \tag{20}$$

Все эти тождества, причем в более общем виде, пригодном для любого $n\alpha$ (n—целое), можно получить другим способом, в основе которого лежит формула Муавра $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ (см. гл. I, § 6). Раскрывая левую часть по формуле бинома Ньютона (см. гл. VI, § 2), имеем

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + iC_n^1\cdot\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha -$$
$$- C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha - iC_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha + \ldots + i^n\sin^n\alpha.$$

Приравнивая действительные и мнимые части двух равных комплексных выражений (см. гл. I, § 6), получаем

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha + \ldots, \tag{21}$$

$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha + \ldots \tag{22}$$

(так как $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, $i^3 = -i$, то знаки в правых частях равенств (21) и (22) чередуются, при этом в равенство (21) входят четные степени $\sin\alpha$, а в (22) — нечетные). Многоточия означают, что слагаемые пишутся до тех пор, пока в коэффициентах C_n^k верхний индекс k не станет больше n (см. гл. VI, § 1). Разделив тождество (22) на (21), получаем

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha + \ldots}{\cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha - \ldots}$$

и после деления числителя и знаменателя на $\cos n\alpha$ имеем

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{C_n^1\operatorname{tg}\alpha - C_n^3\operatorname{tg}^3\alpha + C_n^5\operatorname{tg}^5\alpha + \ldots}{1 - C_n^2\operatorname{tg}^2\alpha + C_n^4\operatorname{tg}^4\alpha + \ldots} \tag{23}$$

Разделив тождество (21) на (22), так же находим

$$\operatorname{ctg} n\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^n\alpha - C\ \operatorname{ctg}^{n-2}\alpha + C_n^4\operatorname{ctg}^{n-4}\alpha - \ldots}{C_n^1\operatorname{ctg}^{n-1}\alpha - C_n^3\operatorname{ctg}^{n-3}\alpha + C_n^5\operatorname{ctg}^{n-5}\alpha - \ldots} \tag{24}$$

§ 4. Формулы преобразования произведения синусов и косинусов в сумму. Формулы понижения степени

Складывая и вычитая почленно равенства (3) и (4), получаем тождества

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)], \tag{25}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \tag{26}$$

справедливые для любых α и β. Аналогично, складывая равенства (7) и (8), получаем тождество

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)], \tag{27}$$

также справедливое для любых α и β.

Полагая в формулах (25) и (26) $\beta=\alpha$ и учитывая, что $\cos 0=1$, находим

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \tag{28}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \tag{29}$$

Далее, имеем

$$\cos^3\alpha=\cos^2\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{(1+\cos 2\alpha)\cos\alpha}{2}.$$

Раскрывая скобки и преобразуя произведение $\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha$ по формуле (25), находим

$$\cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}. \tag{30}$$

Аналогично имеем

$$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}. \tag{31}$$

Таким же способом можно получить формулы для $\cos^4\alpha$, $\sin^4\alpha$ и т. д.

Замечание. Формулы (28)—(31) можно также получить из равенств (14), (17) и (18).

Укажем общий метод получения формул для понижения степеней $\cos^n\alpha$ и $\sin^n\alpha$.

Полагая $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $b=\cos\alpha-i\sin\alpha$, имеем

$$\cos\alpha=\frac{a+b}{2},\quad \sin\alpha=\frac{a-b}{2i}.$$

Согласно формуле Муавра (см. гл. I, § 6) для любого натурального n

$$a^n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

и

$$b^n=(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha-i\sin n\alpha.$$

Отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} a^nb^n=1,\quad a^n+b^n=2\cos n\alpha,\\ a^n-b^n=2i\sin n\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\cos^n\alpha=\left(\frac{a+b}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}(a^n+na^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+b^n),\\ \sin^n\alpha=\left(\frac{a-b}{2i}\right)^n=\frac{1}{2^n\cdot i^n}(a^n-na^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+(-1)^nb^n).\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Группируя в каждой из скобок члены, равноудаленные от концов, и используя

соотношения (33), получаем искомые формулы. Например,

1) $\cos^4\alpha=\frac{1}{2^4}(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)=$

$=\frac{1}{16}[(a^4+b^4)+4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2]=$

$=\frac{1}{16}(2\cos 4\alpha+8\cos 2\alpha+6)=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3).$

2) $\sin^4\alpha=\frac{1}{2^4\cdot i^4}(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)=\frac{1}{16}[(a^4+b^4)-$

$-4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2]=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3).$

3) $\sin^5\alpha=\frac{1}{2^5\cdot i^5}(a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5)=$

$=\frac{1}{32i}[(a^5-b^5)-5ab(a^3-b^3)+10a^2b^2(a-b)]=$

$=\frac{1}{32i}(2i\sin 5\alpha-10i\sin 3\alpha+20i\sin\alpha)=\frac{1}{16}(\sin 5a-5\sin 3\alpha+10\sin\alpha).$

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА. ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Заменяя в равенствах (28) и (29) α на $\frac{\alpha}{2}$ и извлекая корень, получаем

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{34}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \tag{35}$$

Разделив тождество (35) на (34), имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\quad\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right), \tag{36}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\quad\left(\frac{\alpha}{2}\neq\pi k\right). \tag{37}$$

Знак перед радикалом берется в зависимости от знака соответствующей функции аргумента $\frac{\alpha}{2}$ (а не α).

Наряду с формулой (36), которая выражает $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\cos\alpha$ иррационально, имеют место два тождества, выражающие его через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ рационально, а именно

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\quad\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right),$$

откуда, согласно формулам (12) и (28) следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\quad\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right). \tag{38}$$

Далее,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0;\ \cos\frac{\alpha}{2}\neq 0\right),$$

откуда, согласно формулам (12) и (29) следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}\cdot k\right). \tag{39}$$

Аналогично доказываются тождества

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\quad\left(\frac{\alpha}{2}\neq\pi k\right) \tag{40}$$

и

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad\left(\frac{\alpha}{2}\neq\pi k\right). \tag{41}$$

В некоторых случаях существенную пользу приносят формулы, выражающие тригонометрические функции аргумента α через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Разделив числители и знаменатели правой части тождеств

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\quad\text{и}\quad\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ $\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, получаем равенства

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{42}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{43}$$

справедливые для любого $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Заменяя в равенстве (15) α на $\frac{\alpha}{2}$, имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\left(\alpha \text{ и } \frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right), \tag{44}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha\neq\pi k). \tag{45}$$

Отметим, что все тригонометрические функции аргумента α выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ рационально.

§ 6. ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ АРГУМЕНТОВ

1. $\alpha=\frac{\pi}{6}(\alpha=30°)$. Пусть OB — подвижный радиус, соответствующий $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Рассматривая прямоугольный треугольник OBC (рис. 67),

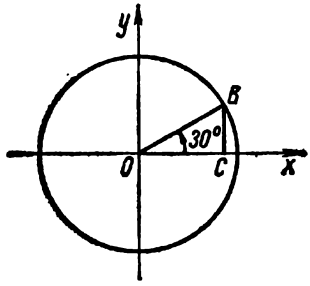


Рис. 67

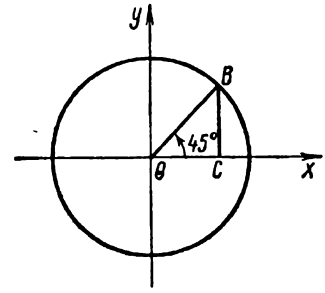


Рис. 68

имеем $y=BC=\frac{R}{2}$ (катет, лежащий против угла в 30°), $x=OC=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Поэтому

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{y}{R}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{x}{R}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{x}{y}=\sqrt{3}.$$

2. $\alpha=\frac{\pi}{4}(\alpha=45°)$. В этом случае прямоугольный треугольник OBC — равнобедренный (рис. 68), т. е. $x=y$, и так как $x^2+y^2=R^2$, то $x=y=R\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{y}{R}=\frac{x}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{y}{x}=\frac{x}{y}=1.$$

Замечание. Значения тригонометрических функций аргумента $\frac{\pi}{4}$ можно получить по формулам половинных аргументов, заметив, что $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, причем $\sin\frac{\pi}{2}=1$ и $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

3. $\alpha=\frac{\pi}{3}$ $(\alpha=60°)$. Так как $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$, то воспользовавшись формулами приведения и известными уже значениями тригонометрических функций аргумента $\frac{\pi}{6}$, получаем

$$\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. $\alpha=\frac{\pi}{10}(\alpha=18°)$. Замечая, что если $\alpha=\frac{\pi}{10}$, то $2\alpha+3\alpha=\frac{\pi}{2}$, имеем

$$\sin 2\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)=\cos 3\alpha,$$

откуда согласно формулам (12) и (18) следует, что

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha, \text{ или } 4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0.$$

Обозначая $\sin\alpha=x$, получаем квадратное уравнение $4x^2-2x-1=0$. Решая его, находим

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ (не годится)}.$$

Итак, $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Теперь находим значения других тригонометрических функций этого аргумента:

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}=\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}.$$

Воспользовавшись формулами сложения и формулами двойных и кратных аргументов, мы можем теперь найти значения тригонометрических функций от целого ряда других аргументов.

Так, например, замечая, что $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$, находим

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2-\sqrt{3}.$$

Замечая, что $\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$, имеем

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}},$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2}-1,$$

Теперь по формулам приведения можно вычислить значения тригонометрических функций аргументов $\frac{5\pi}{12}$ (75°), $\frac{3\pi}{8}$ (67,5°), $\frac{\pi}{24}$ (7,5°) и т. д. Так же определяются значения тригонометрических функций аргументов $\frac{2}{5}\pi$ (72°), $\frac{\pi}{5}$ (36°), $\frac{\pi}{20}$ (9°) и т. д.

Примечание. Значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ следует помнить. Остальные нужно уметь находить при необходимости.

§ 7. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Представляя аргументы α и β в виде

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2},$$

согласно тождествам (7) и (8) имеем

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{46}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{47}$$

Используя аналогично тождества (3) и (4), получаем

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{48}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \tag{49}$$

Далее,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\beta\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Замечая, что в числителе стоит $\sin(\alpha+\beta)$, окончательно имеем

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \quad \left(\alpha \text{ и } \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right). \tag{50}$$

Аналогично получаем

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \quad \left(\alpha \text{ и } \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \tag{51}$$

и

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \quad (\alpha \text{ и } \beta \neq \pi k) \tag{52}$$

(знаки в обеих частях равенства берутся соответственно).

В отдельных задачах тригонометрии удобно также пользоваться следующими тождествами.

Из формул (9), (10) и (11) имеем

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = (1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) \tag{53}$$

$$\left(\alpha \pm \beta,\ \alpha,\ \beta \text{ не равны } \frac{\pi}{2} + \pi k\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = (\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1)\cdot \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) \tag{54}$$

$$(\alpha \pm \beta,\ \alpha,\ \beta \text{ не равны } \pi k).$$

(Знаки в обеих частях равенств берутся соответственно.)

При решении задач мы будем ссылаться и на следующий ряд тождеств:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2a} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\cdot k\right), \tag{55}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\operatorname{ctg}2\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\cdot k\right), \tag{56}$$

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4} \pm \cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right). \tag{57}$$

Вообще

$$a\sin\alpha \pm b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}}\sin\alpha \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right). \tag{58}$$

Рассмотрим точку с координатами (a, b). Она лежит на тригонометрическом круге радиуса $R = \sqrt{a^2+b^2}$ и ей соответствует некоторый угол φ, для которого $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда равенство (58) перепишется в виде

$$(a\sin\alpha \pm b\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cdot\sin\alpha \pm \sin\varphi\cdot\cos\alpha) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha \pm \varphi), \tag{59}$$

где φ—угол, для которого $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Замечание. Если $a > 0$ и $b > 0$, то φ оканчивается в I четверти и тогда можно писать (см. гл. XII), что

$$\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Если $a > 0$, а $b < 0$, то φ оканчивается в IV четверти и тогда

$$\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Если $a<0$, а $b>0$, то φ оканчивается во II четверти и тогда

$$\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{a}{b}.$$

§ 8. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АРГУМЕНТАМИ α И β, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ РАВЕНСТВА ИХ ОДНОИМЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть α и β—два аргумента, синусы которых равны, т. е. $\sin\alpha=\sin\beta$. Переписав это равенство в виде $\sin\alpha-\sin\beta=0$ и используя формулу (47), имеем

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Последнее справедливо лишь в том случае, когда либо $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, либо $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$.

Из первого условия вытекает, что $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, где n—некоторое целое число (подвижный радиус, соответствующий аргументу $\frac{\alpha+\beta}{2}$, вертикален).

Из второго условия вытекает, что $\frac{\alpha-\beta}{2}=\pi k$, где k—некоторое целое число (подвижный радиус, соответствующий аргументу $\frac{\alpha-\beta}{2}$, горизонтален).

Таким образом, из равенства синусов двух аргументов α и β следует, что либо сумма этих аргументов равна $\pi+2\pi n$:

$$\alpha+\beta=\pi+2\pi n,$$

либо их разность равна $2\pi k$:

$$\alpha-\beta=2\pi k,$$

где n и k—некоторые целые числа.

II. Пусть $\cos\alpha=\cos\beta$. Переписав это равенство в виде $\cos\alpha-\cos\beta=0$ и используя формулу (49), имеем

$$-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

откуда следует, что либо $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, либо $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, т. е. либо $\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi n$, либо $\frac{\alpha-\beta}{2}=\pi k$ (см. п. I). Таким образом, из равенства косинусов двух аргументов α и β следует, что либо сумма, либо разность этих аргументов есть число, кратное 2π, т. е. либо $\alpha+\beta=2\pi n$, либо $\alpha-\beta=2\pi k$.

III. Пусть $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Переписав это равенство в виде $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = 0$ и используя формулу (51), имеем

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = 0,$$

причем $\cos\alpha \neq 0$ и $\cos\beta \neq 0$. Последнее справедливо лишь в том случае, когда $\alpha - \beta = \pi n$.

Итак, из равенства тангенсов двух аргументов α и β следует, что их разность есть число πn.

IV. Аналогично получаем, что из равенства $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$ следует, что разность аргументов есть число πk:

$$\alpha - \beta = \pi k.$$

ГЛАВА XI

ЗАДАЧИ НА ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТРИГОНОМЕТРИИ

Все требования, предъявляемые к тождественным преобразованиям и рассмотренные в главе II, в равной степени относятся и к тригонометрии (область допустимых значений букв, входящих в тождество, обоснование решения и т. д.—см. гл. II).

При решении задач на тождественные преобразования используются те же тождества, которые мы рассмотрели в IX и X главах. Будем называть все эти тождества основными или первичными.

Первичных тождеств очень много. Неудачный выбор их при решении той или иной задачи приводит к громоздкому, нерациональному решению, а порою и вовсе заводит в тупик.

Естественно, что нельзя дать общий «рецепт» решения всех задач. Приведем лишь некоторые различные типы задач на тождественные преобразования и методы их решения.

§ 1. УПРОЩЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Умение преобразовать к простейшему виду то или иное тригонометрическое выражение играет основную роль в задачах тригонометрии (особенно при решении тригонометрических уравнений).

Если тригонометрическое выражение содержит тригонометрические функции числовых аргументов, то в общем случае следует перейти к тригонометрическим функциям острых углов, выраженных в градусах или радианах.

Пример 1. Упростить выражение

$$A=\left(\frac{\sec 125^\circ\cdot\operatorname{ctg}305^\circ}{\sec(-215^\circ)}+\sin(-35^\circ)\cdot\cos 125^\circ\right):\sin^2 125^\circ.$$

Решение. Имеем

$$\sec 125^\circ=\frac{1}{\cos 125^\circ}=\frac{1}{\cos(90^\circ+35^\circ)}=-\frac{1}{\sin 35^\circ},$$

$$\operatorname{ctg}305^\circ=\operatorname{ctg}(270^\circ+35^\circ)=-\operatorname{tg}35^\circ,$$

$$\sec(-215^\circ)=\frac{1}{\cos 215^\circ}=\frac{1}{\cos(180^\circ+35^\circ)}=-\frac{1}{\cos 35^\circ},$$

$$\cos 125^\circ=\cos(90^\circ+35^\circ)=-\sin 35^\circ,$$

$$\sin 125^\circ=\sin(90^\circ+35^\circ)=\cos 35^\circ,$$

$$A=(-1+\sin^2 35^\circ):\cos^2 35^\circ=-1.$$

Пример 2. Упростить выражение

$$B=\operatorname{tg}^2(-4{,}7\pi)\cdot\cos^2(-7{,}8\pi)+\sin^2(-11{,}7\pi).$$

Р е ш е н и е. Имеем $\operatorname{tg}(-4{,}7\pi)=-\operatorname{tg}(5\pi-0{,}3\pi)=\operatorname{tg}0{,}3\pi=\operatorname{ctg}0{,}2\pi$,

$$\cos(-7{,}8\pi)=\cos(8\pi-0{,}2\pi)=\cos 0{,}2\pi;\ \sin(-11{,}7\pi)=$$
$$=-\sin(12\pi-0{,}3\pi)=\sin 0{,}3\pi=\cos 0{,}2\pi.$$

Подставляя полученные результаты в данное выражение, получаем

$$B=\operatorname{ctg}^2 0{,}2\pi\cdot\cos^2 0{,}2\pi+\cos^2 0{,}2\pi=\cos^2 0{,}2\pi\,(\operatorname{ctg}^2 0{,}2\pi+1)=$$
$$=\operatorname{ctg}^2 0{,}2\pi.$$

В отдельных случаях выражение удается упростить, выделяя в нем так называемую тригонометрическую единицу $(\sin^2 x+\cos^2 x)^k=1$, где k целое.

Пример 3. Упростить выражение

$$A=2(\sin^4 x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x)^2-(\sin^8 x+\cos^8 x).$$

Р е ш е н и е. Замечая, что

$$1)\ \sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cdot\cos^2 x=$$
$$=1-\sin^2 x\cdot\cos^2 x;$$
$$2)\ \sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cdot\cos^4 x=$$
$$=[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x]^2-2\sin^4 x\cdot\cos^4 x=$$
$$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cdot\cos^4 x,$$

получаем

$$A=2(1-\sin^2 x\cos^2 x)^2-(1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cdot\cos^4 x)=1.$$

При тождественных преобразованиях нужно хорошо знать все основные тождества и «видеть» их в самых разнообразных записях.

Пример 4. Упростить выражение

$$A=\cos^3\alpha\cos 3\alpha+\sin^3\alpha\cdot\sin 3\alpha.$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$A=\cos\alpha\,(1-\sin^2\alpha)\cos 3\alpha+\sin\alpha\,(1-\cos^2\alpha)\sin 3\alpha.$$

Раскрывая скобки и группируя, получаем

$$A=(\cos\alpha\cos 3\alpha+\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha\,(\sin\alpha\cos 3\alpha+\cos\alpha\sin 3\alpha)=$$
$$=\cos(3\alpha-\alpha)-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+3\alpha)=$$
$$=\cos 2\alpha-\sin^2 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\cos 2\alpha\,(1-\sin^2 2\alpha)=\cos^3 2\alpha.$$

В большинстве задач в процессе решения приходится использовать различные основные тождества несколько раз подряд.

Пример 5. Упростить выражение

$$A=\cos^2(a-x)+\cos^2(b-x)-2\cos(a-b)\cos(a-x)\cos(b-x).$$

Р е ш е н и е. Нецелесообразно пользоваться здесь формулой косинуса разности двух углов. Это приведет к очень громоздкому выражению. Проще вначале избавиться от квадратов функций с

помощью формул понижения степени. Тогда

$$B=\cos^2(a-x)+\cos^2(b-x)=\frac{1+\cos(2a-2x)}{2}+\frac{1+\cos(2b-2x)}{2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}[\cos(2a-2x)+\cos(2b-2x)].$$

Воспользовавшись теперь формулой сложения косинусов, получаем

$$B=1+\cos(a+b-2x)\cos(a-b).$$

Теперь видим, что произведение двух последних сомножителей в выражении A нужно разложить в сумму:

$$C=2\cos(a-x)\cdot\cos(b-x)=\cos(a+b-2x)+\cos(a-b).$$

Окончательно получаем

$$A=B-C\cdot\cos(a-b)=1+\cos(a+b-2x)\cos(a-b)-$$

$$-\cos(a+b-2x)\cos(a-b)-\cos^2(a-b)=1-\cos^2(a-b)=$$

$$=\sin^2(a-b).$$

При действиях с радикалами нужно помнить, что для четного показателя берется арифметическое значение корня, для нечетного — его единственное действительное значение.

Пример 6. Упростить выражение

$$A=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Решение. Имеем $2+2\cos 4\alpha=2(1+\cos 4\alpha)=4\cos^2 2\alpha$. Поэтому $\sqrt{2+2\cos 4\alpha}=2|\cos 2\alpha|$. Но $|\cos 2\alpha|=\cos 2\alpha$, если $\cos 2\alpha\geqslant 0$, т. е. если $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$, и $|\cos 2\alpha|=-\cos 2\alpha$, если $\cos 2\alpha\leqslant 0$, т. е. если $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Таким образом,

$$\sqrt{2+2\cos 4\alpha}=\begin{cases}2\cos 2\alpha, & \text{если } 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4};\\ -2\cos 2\alpha, & \text{если } \frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Дальнейшие преобразования проводим отдельно для каждой из указанных областей изменения α.

1. Если $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$, то $A=\frac{2}{\sqrt{2+2\cos 2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha}$, так как $\cos\alpha>0$.

2. Если $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $A=\frac{2}{\sqrt{2-2\cos 2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha}}=\frac{1}{\sin\alpha}$, так как $\sin\alpha>0$.

Итак,

$$A=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos\alpha}, & \text{если } 0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{4};\\ \dfrac{1}{\sin\alpha}, & \text{если } \dfrac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

В отдельных примерах при преобразовании суммы или разности тангенсов (и котангенсов) полезно пользоваться формулами

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)(1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta).$$

Пример 7. Упростить выражение

$$A=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha).$$

Решение. Область допустимых значений: 2α, $30^\circ-\alpha$, $60^\circ-\alpha$ не равны $90^\circ+180^\circ\cdot k$. Имеем

$$B=\operatorname{tg}2\alpha\,[\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)]=$$
$$=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha+60^\circ-\alpha)\cdot[1-\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)]=$$
$$=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha\cdot[1-\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)]=$$
$$=1-\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha).$$

Тогда

$$A=B+\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)=1.$$

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ БЕЗ ТАБЛИЦ

Конечно, не всякое тригонометрическое выражение от числовых значений аргументов можно вычислить без таблиц. Однако в некоторых случаях удается преобразовать заданное тригонометрическое выражение или к числу, или к тригонометрическим функциям аргументов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и т. д. Значения тригонометрических функций этих аргументов учащийся должен уметь находить без таблиц (см. гл. X, § 6).

Пример 1. Вычислить без таблиц

$$A=\operatorname{ctg}7^\circ,5+\operatorname{tg}67^\circ,5-\operatorname{tg}7^\circ,5-\operatorname{ctg}67^\circ,5.$$

Решение. Группируя тангенсы и котангенсы, получаем

$$(\operatorname{ctg}7^\circ,5-\operatorname{ctg}67^\circ,5)+(\operatorname{tg}67^\circ,5-\operatorname{tg}7^\circ,5)=\frac{\sin60^\circ}{\sin7^\circ,5\cdot\sin67^\circ,5}+$$
$$+\frac{\sin60^\circ}{\cos67^\circ,5\cdot\cos7^\circ,5}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos67^\circ,5\cdot\cos7^\circ,5+\sin7^\circ,5\cdot\sin67^\circ,5}{\sin7^\circ,5\cdot\sin67^\circ,5\cdot\cos67^\circ,5\cdot\cos7^\circ,5}=$$
$$=2\sqrt{3}\,\frac{\cos(67^\circ,5-7^\circ,5)}{\sin15^\circ\cdot\sin135^\circ}=2\sqrt{3}\,\frac{\cos60^\circ}{\sin15^\circ\cdot\sin45^\circ}=$$
$$=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=6+2\sqrt{3}.$$

Пример 2. Вычислить без таблиц

$$A=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

Решение. Используя формулу $\sin^4\alpha=\frac{(1-\cos 2\alpha)^2}{4}$ и формулы приведения, преобразуем каждое слагаемое данного выражения. Получаем

$$A=\frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{4}+\frac{\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{4}+\frac{\left(1-\cos\frac{5\pi}{8}\right)^2}{4}+$$
$$+\frac{\left(1-\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2}{4}=\frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{4}+\frac{\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{4}+$$
$$+\frac{\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{4}+\frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{4}=\frac{4+2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}}{4}=$$
$$=\frac{4+2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\sin^2\frac{\pi}{8}}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Чтобы вычислить значение произведения косинусов от аргументов, образующих геометрическую прогрессию со знаменателем $q=2$, полезно это произведение умножить и разделить на синус наименьшего аргумента и затем, применяя последовательно несколько раз формулу $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$, свернуть его.

Пример 3. Вычислить без таблиц

$$A=\cos 12^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 36^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 72^\circ\cdot\cos 84^\circ.$$

Решение. Замечая, что $\cos 84^\circ=-\cos 96^\circ$, разобьем данное произведение на два: $A=A_1\cdot A_2\cdot\cos 60^\circ$, где выражения $A_1=-\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 96^\circ$, $A_2=\cos 36^\circ\cdot\cos 72^\circ$, и вычислим каждое из них:

$$A_1=-\frac{\cos 12^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 96^\circ\cdot\sin 12^\circ}{\sin 12^\circ}=$$
$$=-\frac{\sin 24^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 96^\circ}{2\sin 12^\circ}=-\frac{\cos 48^\circ\cdot\sin 48^\circ\cdot\cos 96^\circ}{4\sin 12^\circ}=$$
$$=-\frac{\sin 96^\circ\cdot\cos 96^\circ}{8\sin 12^\circ}=-\frac{\sin 192^\circ}{16\sin 12^\circ}=\frac{\sin 12^\circ}{16\sin 12^\circ}=\frac{1}{16}.$$
$$A_2=\frac{\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin 72^\circ\cdot\cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ}=\frac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{1}{4}.$$

Окончательно, $A=\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{128}$.

Если аргументы, стоящие под знаком косинусов, не образуют геометрическую прогрессию, то следует разложить произведение тригонометрических функций в сумму, заменяя при этом известные значения функций числами. Иногда это приводит к цели.

Пример 4. Вычислить без таблиц

$$A = \cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ.$$

Решение. Последовательно применяем формулу перехода от произведения к сумме:

$$A = (\cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ) \cdot \cos 65^\circ = \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 50^\circ)\cos 65^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 65^\circ + \frac{1}{2}\cos 50^\circ \cdot \cos 65^\circ = \frac{1}{4}\cos 65^\circ + \frac{1}{4}(\cos 115^\circ + \cos 15^\circ) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 65^\circ - \frac{1}{4}\cos 65^\circ + \frac{1}{4}\cos 15^\circ = \frac{1}{4}\cos 15^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}.$$

Чтобы вычислить значение суммы синусов или косинусов от аргументов, образующих арифметическую прогрессию с разностью d, полезно каждое слагаемое этой суммы умножить и разделить на $2\sin\frac{d}{2}$ и затем получившиеся произведения преобразовать в сумму.

Пример 5. Вычислить без таблиц

$$A = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}.$$

Решение. Аргументы образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = \frac{2\pi}{11}$. Согласно указанию, имеем

$$2A\sin\frac{\pi}{11} = 2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{3\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\times$$

$$\times\cos\frac{5\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{7\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{9\pi}{11} = \sin\frac{2\pi}{11} +$$

$$+\left(\sin\frac{4\pi}{11} - \sin\frac{2\pi}{11}\right) + \left(\sin\frac{6\pi}{11} - \sin\frac{4\pi}{11}\right) + \left(\sin\frac{8\pi}{11} - \sin\frac{6\pi}{11}\right) +$$

$$+\left(\sin\frac{10\pi}{11} - \sin\frac{8\pi}{11}\right).$$

После приведения подобных членов получаем

$$2A\cdot\sin\frac{\pi}{11} = \sin\frac{10\pi}{11}, \text{ или } 2A\sin\frac{\pi}{11} = \sin\frac{\pi}{11}, \text{ т. е. } A = \frac{1}{2}.$$

Если в заданное выражение входят тригонометрические функции углов $\frac{\pi}{10}(18^\circ)$, $\frac{\pi}{5}(36^\circ)$, $\frac{3\pi}{10}(54^\circ)$, $\frac{2\pi}{5}(72^\circ)$, то тогда удается путем различных преобразований свести эту задачу к вычислению выражения $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$, которое равно $\frac{1}{4}$ (см. пример 3).

Пример 6. Вычислить без таблиц выражение

$$\operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ.$$

Решение. Имеем

$$\operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ = \frac{\sin^2 36^\circ \cdot \sin^2 72^\circ}{\cos^2 36^\circ \cdot \cos^2 72^\circ} =$$

$$= \frac{(\sin^2 36^\circ \cdot \sin^2 72^\circ - \cos^2 36^\circ \cdot \cos^2 72^\circ) + \cos^2 36^\circ \cdot \cos^2 72^\circ}{\cos^2 36^\circ \cdot \cos^2 72^\circ} =$$

$$= \frac{(\sin 36^\circ \cdot \sin 72^\circ - \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ)(\sin 36^\circ \cdot \sin 72^\circ + \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ)}{\cos^2 36^\circ \cdot \cos^2 72^\circ} +$$

$$+ 1 = \frac{-\cos(72^\circ + 36^\circ) \cdot \cos(72^\circ - 36^\circ)}{\cos^2 36^\circ \cdot \cos^2 72^\circ} + 1 = 1 + \frac{-\cos 108^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\cos^2 36^\circ \cdot \cos^2 72^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\cos^2 72^\circ \cdot \cos^2 36^\circ} + 1 = \frac{1}{\cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ} + 1 = 4 + 1 = 5.$$

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ДРУГИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Эта задача состоит в том, чтобы вычислить значение заданного выражения, если известны значения одного или нескольких других выражений. С подобной задачей мы уже встречались в главе IX, когда по известному значению некоторой тригонометрической функции аргумента α определяли значения всех остальных тригонометрических функций этого аргумента.

Один из приемов решения таких задач состоит в том, что все величины, входящие в выражение, значение которого нужно определить, мы выражаем через ту величину, значение которой задано.

Пример 1. Вычислить

$$A = \frac{\sin^5 x + \cos^5 x + \sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}, \text{ если } \operatorname{tg} x = 2.$$

Решение. Мы не можем вычислить непосредственно $\sin x$ и $\cos x$ по известному значению тангенса этого угла, так как не знаем, в какой четверти лежит угол x, и поэтому не сумеем выбрать знаки у функций синус и косинус. Этой неопределенности можно избежать, если сообразить, что числитель и знаменатель можно сделать однородными выражениями одного и того же измерения относительно $\sin x$ и $\cos x$ (см. гл. XIII). В самом деле,

$$\frac{\sin^5 x + \cos^5 x + \sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{\sin^5 x + \cos^5 x + \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{(\sin^3 x + \cos^3 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}.$$

Теперь, разделив числитель и знаменатель на $\cos^5 x$ и заметив, что $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = 2$, получаем

$$A = \frac{\operatorname{tg}^5 x + 1 + \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2}{(\operatorname{tg}^3 x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + 1)} = \frac{2^5 + 1 + 2(4+1)^2}{(2^3+1)(2^2+1)} = \frac{83}{45}.$$

Пример 2. Найти $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = \frac{a-b}{a+b}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Выразим $\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ через $\sin\alpha$. Имеем

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=$$
$$=-\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1+\sin\alpha}.$$

(Перед радикалом взят знак «—», так как α — угол II четверти.) Замечая, что $1+\sin\alpha>0$, находим

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}}=-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=$$
$$=-\sqrt{\frac{1-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a-b}{a+b}}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Исследуем, при каких значениях параметров a и b задача имеет решение. Так как α — угол II четверти, то $0<\frac{a-b}{a+b}<1$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}0<a-b<a+b,\\ a+b>0\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}0>a-b>a+b,\\ a+b<0.\end{cases}$$

Из первой системы следует, что $a>b>0$, а из второй $a<b<0$. Итак, данная задача имеет решение для всех тех значений a и b, которые удовлетворяют одному из условий:

$$a>b>0 \text{ или } a<b<0.$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y$, если

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=b.\end{cases}$$

Решение. Выразим $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y$ через $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y$ и $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$, значения которых заданы. Имеем

$$\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+\frac{2\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}^2y}=\frac{2(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)-2\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)}{(1-\operatorname{tg}^2x)(1-\operatorname{tg}^2y)}=$$
$$=\frac{2(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)(1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y)}{1+\operatorname{tg}^2x\cdot\operatorname{tg}^2y-(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)^2+2\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}=\frac{2a(1-b)}{(1+b+a)(1+b-a)}.$$

Задача имеет решение для всех значений a и b, не обращающих в нуль знаменатель полученной дроби, т. е. при условии, что $1+b\neq\pm a$.

В других случаях удобнее преобразовать то выражение, значение которого известно.

Пример 4. Вычислить

$$A=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma,$$

если

$$2\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\gamma\cdot\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta=1.$$

Решение. Введем обозначения: $\sin^2\alpha=a$, $\sin^2\beta=b$, $\sin^2\gamma=c$. Тогда $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{a}{1-a}$, $\operatorname{tg}^2\beta=\frac{b}{1-b}$, $\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{c}{1-c}$, и задача сводится к определению величины $A=a+b+c$, если

$$\frac{2abc}{(1-a)(1-b)(1-c)}+\frac{bc}{(1-b)(1-c)}+\frac{ac}{(1-c)(1-a)}+\\+\frac{ab}{(1-a)(1-b)}=1. \qquad (*)$$

После приведения равенства (*) к общему знаменателю и очевидных преобразований получаем

$$a+b+c=1.$$

Итак, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

В некоторых случаях рассматриваемые примеры решаются комбинированным методом: из данных задачи находят численное значение некоторых вспомогательных выражений, через которые в свою очередь выражают искомую величину.

Пример 5. Найти значение выражения

$$a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta),$$

если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Решение. Считаем, что $a\neq 0$, так как в противном случае уравнение $ax^2+bx+c=0$ не было бы квадратным.

По теореме Виета

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\frac{b}{a},\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{c}{a},$$

откуда следует, что для $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{b}{c-a}.$$

(Из последнего равенства вытекает, что требование $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ равносильно требованию $c-a\neq 0$.)

Теперь преобразуем искомое выражение. Обозначая его через A, имеем

$$A=\cos^2(\alpha+\beta)\left[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c\right]=\\=\frac{a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{ab^2}{(c-a)^2}+\frac{b^2}{c-a}+c}{1+\frac{b^2}{(c-a)^2}}=\\=\frac{c\left[b^2+(c-a)^2\right]}{b^2+(c-a)^2}=c.$$

Мы получили, что $A=c$, при условии, что $a\neq c$. Если $a=c\neq 0$, т. е. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\pi n$, то $\cos(\alpha+\beta)=0$, $\sin^2(\alpha+\beta)=1$ и в этом случае также $A=c$. При $a=0$ задача не имеет смысла.

Пример 6. Найти $\sin(\alpha+\beta)$, если

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\beta+b\sin\beta.$$

Решение. Преобразуя заданное равенство, имеем

$$a(\cos\alpha-\cos\beta)=b(\sin\beta-\sin\alpha);$$

$$2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=2b\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (*)$$

Исследуем равенство (*).

1. Пусть $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0$, т. е. $\beta-\alpha=2\pi n$. При этом условии равенство (*) является тождеством и, следовательно, $\sin(\alpha+\beta)$ может принимать любое значение в пределах от -1 до 1. Задача становится неопределенной.

2. Пусть $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\neq 0$, т. е. $\beta-\alpha\neq 2\pi n$. Сокращая обе части равенства (*) на $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, имеем равенство

$$a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (**)$$

Коэффициенты a и b не могут обращаться в нуль одновременно (задача становится неопределенной). Поэтому допустим, что $a\neq 0$. Из этого вытекает, что $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ также не нуль.

В самом деле, если допустить, что $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, то из равенства (**) следовало бы, что и $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$ ($a\neq 0$!), что невозможно $\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1\right)$.

Тогда, разделив все члены равенства (**) на $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a}$ и

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}. \qquad (***)$$

Если $a=0$, то $b\neq 0$. Тогда из равенства (**) следует, что $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, и поэтому

$$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0.$$

Заметим, что этот результат содержится в равенстве (***), если положить в нем $b=0$.

Итак, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$ при условии, что $\beta-\alpha\neq 2\pi n$.

Иногда к данным равенствам удобно присоединить некоторые основные тождества, содержащие те же функции, что и заданные равенства.

Пример 7. Вычислить $\sin x$ и $\cos x$, если

$$a\sin x+b\cos x=c.$$

Решение. Задача имеет смысл, если $|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$. Присоединяя к данному равенству тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получаем систему двух уравнений относительно функций $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 x=1,\\ a\sin x+b\cos x=c.\end{cases}$$

Решая ее, находим

$$\text{либо}\ \begin{cases}\sin x=\dfrac{ac+b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\\ \cos x=\dfrac{bc-a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\end{cases}\qquad \text{либо}\ \begin{cases}\sin x=\dfrac{ac-b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\\ \cos x=\dfrac{bc+a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.\end{cases}$$

В некоторых случаях проще вычислить квадрат искомого значения. Тогда при переходе к самому значению, т. е. при извлечении корня, могут появиться лишние решения. Поэтому при таком методе решения необходимо провести исследование знака искомого значения.

Пример 8. Вычислить значение $A=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\sin 2\alpha=m$, $-1<m<0$, $\frac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi$.

Решение. Вычислим сначала A^2. Имеем

$$A^2=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\frac{1+m}{1-m}.$$

Проведем исследование знака A. Так как $\frac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi$, то $\frac{3}{4}\pi<$ $<\alpha<\pi$. Если α лежит в этих пределах, то $|\sin\alpha|<|\cos\alpha|$, причем $\sin\alpha>0$, а $\cos\alpha<0$. Поэтому $\sin\alpha+\cos\alpha<0$, $\sin\alpha-\cos\alpha>0$ и $A<0$. Поэтому $A=-\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}$.

Исследование знака искомого числового значения иногда бывает столь затруднительно, что проще вычислить значение A непосредственно. Даже в этом примере, где исследование проводится довольно просто, удобнее вычислять значение A сразу.

В самом деле,

$$A=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}=-\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}$$

($\cos 2\alpha=+\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$, так как 2α оканчивается в IV четверти).

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Для того чтобы при вычислении числовых значений выражений можно было бы пользоваться таблицей логарифмов, нужно это выражение представить в виде произведений. Это особенно важно при решении вычислительных задач по геометрии.

Пример 1. Преобразовать в произведение следующие выражения:

$$1)\ A=1+\operatorname{tg}67^\circ+\operatorname{tg}68^\circ;\ 2)\ B=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos 2\beta}-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Решение. 1. Используя формулу

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

находим

$$\operatorname{tg}67^\circ+\operatorname{tg}68^\circ=(1-\operatorname{tg}67^\circ\cdot\operatorname{tg}68^\circ)\cdot\operatorname{tg}(67^\circ+68^\circ)=-1+\operatorname{tg}67^\circ\cdot\operatorname{tg}68^\circ.$$

Следовательно, $A=\operatorname{tg}67^\circ\cdot\operatorname{tg}68^\circ$.

2. Приведем выражение к общему знаменателю и каждое из слагаемых числителя представим в виде суммы:

$$B=\frac{\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos\beta-\cos 2\beta\cdot\cos\alpha}{\cos 2\beta\cdot\cos\beta}=$$

$$=\frac{[\cos\alpha+\cos(a-2\beta)]-[\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha-2\beta)]}{2\cos 2\beta\cdot\cos\beta}=\frac{\cos\alpha-\cos(\alpha+2\beta)}{2\cos 2\beta\cdot\cos\beta}.$$

Теперь числитель представим в виде произведения и окончательно получим

$$B=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}{\cos 2\beta\cdot\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\beta},\quad\text{где}\quad\beta\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\quad\text{и}\quad\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n.$$

В ряде случаев при преобразовании в произведение целесообразно вводить вспомогательный аргумент. Для выражений вида $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ подобный метод подробно изложен в главе X.

При этом полезно помнить, что:

$$1=\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{3},$$

$$\sqrt{2}=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=2\sin\frac{\pi}{3}=\cdot 2\cos\frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение следующие выражения:

1) $A=2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$;

2) $B=\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}+\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha.$

Решение. 1. Понижая степень первого слагаемого, имеем

$$A=1-\cos 2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1=$$

$$=\sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2\alpha-2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2\alpha=$$

$$=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

2. Предварительно упрощаем данное выражение. Обозначая первое слагаемое через B_1, имеем

$$B_1=\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1$$

($\cos 2\alpha\neq 0$, так как в противном случае B_1, а следовательно, и B не имеет смысла).

Тогда

$$B=B_1+\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha=1+\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}+(\cos\alpha+\sin\alpha)=(\cos\alpha+\sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+\sin\alpha)(1+\cos\alpha).$$

Но

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),\quad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

поэтому

$$B=\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

($\cos\alpha\neq 0$, так как в противном случае $\operatorname{tg}\alpha$, а следовательно, и B не имеет смысла).

Вспомогательный аргумент может быть любым острым углом. Его всегда можно найти по таблицам тригонометрических функций.

Пример 3. Введением вспомогательного угла преобразовать в произведение выражения:

$$1)\ A=\sqrt{2+3\sin\alpha};\quad 2)\ B=\sqrt{2+3\sin^2\alpha}.$$

Решение. 1. Замечая, что $2+3\sin\alpha=3\left(\frac{2}{3}+\sin\alpha\right)$, подберем острый угол φ такой, что $\sin\varphi=\frac{2}{3}$. Тогда $A=\sqrt{3(\sin\varphi+\sin\alpha)}=$ $=\sqrt{6\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\varphi}{2}}$ для всех α, для которых $\sin\alpha\geqslant-\frac{2}{3}$.

2. Если слепо следовать методу решения предыдущего примера, то ничего не получится. Поэтому поступим иным образом. Представляя B в виде $B=\sqrt{2\left(1+\frac{3}{2}\sin^2\alpha\right)}$, подберем острый угол φ такой, что $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{3}{2}}|\sin\alpha|$. Тогда

$$B=\sqrt{2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}=\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}.$$

Пример 4. Преобразовать в произведение выражение

$$A=\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}.$$

Решение. Множество допустимых значений данного выражения состоит из тех значений a и b, для которых

$$\begin{cases} a+b\geqslant 0, \\ a-b\geqslant 0. \end{cases}$$

Решая это неравенство, находим, что $a\geqslant|b|$. При $a=0$ также $b=0$ и, следовательно, $A=0$. Пусть $a>0$. Тогда

$$A=\sqrt{a}\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}}+\sqrt{1-\frac{b}{a}}\right),$$

где $\left|\frac{b}{a}\right|\leqslant 1$.

Полагаем $\frac{b}{a}=\cos\varphi$. При такой замене

$$A=\sqrt{a}\left(\sqrt{1+\cos\varphi}+\sqrt{1-\cos\varphi}\right)=\sqrt{a}\left(\sqrt{2}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|+\right.$$
$$\left.+\sqrt{2}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right)=2\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right).$$

Если $b>0$, то угол φ берем в I четверти и тогда

$$\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\cos\frac{\varphi}{2},\quad\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|=\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Если $b<0$, то угол φ берем во II четверти: $\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$. При этом $\frac{\pi}{4}<\frac{\varphi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$ и снова

$$\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\cos\frac{\varphi}{2}\text{ и }\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|=\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Итак, при любом $|b| \leqslant a \neq 0$

$$A = 2\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sqrt{a}\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

где $\varphi = \arccos\frac{b}{a}$ (см. гл. XII).

Замечание. Очевидно, что вспомогательный аргумент можно вводить разными способами. При этом полученные результаты могут иметь самые различные виды.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ

Рассмотрим ряд задач на доказательство наперед заданных тождеств и равенств и укажем некоторые приемы, полезные при этих доказательствах. Заметим, что и здесь каждый раз необходимо указать множество допустимых значений углов и параметров, входящих в данные выражения. В противном случае решение неполноценно.

Часто при доказательстве тождества преобразуют одну более сложную часть к другой более простой, которая в данном случае является, так сказать, «неподвижной». При этом преобразовании нужно выбирать такие формулы, которые приводили бы к функциям и аргументам, стоящим в «неподвижной части».

Пример 1. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1} = \operatorname{tg}^4\alpha$; 2) $1 + \sec 20^\circ = \sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg} 40^\circ$.

Решение. 1. Преобразуем левую часть данного выражения. Выражая $\cos^2 2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, имеем

$$\frac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1} = \frac{\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2 - \dfrac{4^1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + 3}{\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2 + \dfrac{4}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - 1} = \operatorname{tg}^4\alpha.$$

Анализируя решение, замечаем, что это тождество справедливо для всех $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

2. Преобразуем левую часть данного выражения так, чтобы получить угол 40°, стоящий в «неподвижной части»:

$$1 + \sec 20^\circ = \frac{\cos 20^\circ + 1}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ(\cos 20^\circ + 1)}{2\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ + 2\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ) + \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \cos 70^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2\cos 40^\circ\cdot\cos 30^\circ}{\sin 40^\circ} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg} 40^\circ.$$

Если не удается преобразовать одну часть тождества или равенства к другой части или это очень сложно, то надо попробовать преобразовать обе части к одному и тому же выражению.

Пример 2. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)=\frac{2(\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta)}{(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)^2}.$$

Решение. Обозначая левую часть через A, а правую через B, имеем

$$A=\frac{1-\cos(2\alpha+2\beta)}{1+\cos(2\alpha+2\beta)}+\frac{1-\cos(2\alpha-2\beta)}{1+\cos(2\alpha-2\beta)}=$$

$$=\frac{2-2\cos(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha-2\beta)}{[1+\cos(2\alpha+2\beta)]\,[1+\cos(2\alpha-2\beta)]},\ \alpha+\beta \text{ и } \alpha-\beta \text{ не равны } \frac{\pi}{2}+\pi n;$$

$$B=\frac{1-\cos 4\alpha+1-\cos 4\beta}{4\cos^2(\alpha+\beta)\cdot\cos^2(\alpha-\beta)}=\frac{2-2\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\alpha-2\beta)}{[1+\cos(2\alpha+2\beta)]\,[1+\cos(2\alpha-2\beta)]}$$

при тех же ограничениях на углы. Таким образом, $A=B$ при условии, что $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$ не равны $\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Пример 3. Доказать тождество

$$1+\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(25^\circ-\alpha)=\frac{2\cos(10^\circ+2\alpha)-1}{2\cos(10^\circ+2\alpha)+1}+\sin 2\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha).$$

Решение. Множество допустимых значений произведений тангенсов состоит из всех углов α, для которых $35^\circ+\alpha$ и $25^\circ-\alpha$ не равны $90^\circ+180^\circ\cdot n$. Преобразуя произведение тангенсов, которое мы обозначим через A, имеем

$$A=\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(25^\circ-\alpha)=\frac{\sin(35^\circ+\alpha)\cdot\sin(25^\circ-\alpha)}{\cos(35^\circ+\alpha)\cdot\cos(25^\circ-\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos(10^\circ+2\alpha)-\cos 60^\circ}{\cos(10^\circ+2\alpha)+\cos 60^\circ}=\frac{2\cos(10^\circ+2\alpha)-1}{2\cos(10^\circ+2\alpha)+1}.$$

Таким образом, A равно первому слагаемому правой части и нам остается доказать, что второе слагаемое правой части (обозначим его через B) равно 1. В самом деле,

$$B=\sin 2\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha)=\sin 2\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha+\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos\alpha}=1,$$

причем $\alpha\neq 90^\circ k$.

Иногда путем равносильных преобразований удается свести доказываемое тождество к очевидному или уже известному.

Пример 4. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Решение. Доказываемое тождество равносильно следующему:

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha.$$

Обозначая левую часть через A и используя тождество $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$ (см. гл. X), имеем

$$A=(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=2(\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha)-$$
$$-4\operatorname{tg}4\alpha=4(\operatorname{ctg}4\alpha-\operatorname{tg}4\alpha)=8\operatorname{ctg}8\alpha\left(8\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right).$$

Иногда при доказательстве тождеств удобно исходить из уже известных тождеств (основных).

Пример 5. Доказать тождества

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\right)$$

и

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right),$$

если $90^\circ\leqslant\alpha\leqslant270^\circ$.

Решение. Возьмем два основных тождества

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1,$$

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha.$$

Складывая их и вычитая, получаем два новых тождества

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\sin\alpha,$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha.$$

Так как $45^\circ\leqslant\frac{\alpha}{2}\leqslant135^\circ$, то $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant0$ и $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant0$. Поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1+\sin\alpha},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Складывая и вычитая полученные тождества, получаем требуемое.

§ 6. УСЛОВНЫЕ РАВЕНСТВА

Равенства, справедливые при всех допустимых значениях аргументов, удовлетворяющих заданным дополнительным условиям (условиям связи), называются *условными*. Например, равенство

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta \qquad (*)$$

справедливо не при всех допустимых значениях аргумента α и β, а лишь при некоторых дополнительных условиях, например, когда $\alpha+\beta=2\pi k$.

В отличие от условных, равенства, рассмотренные в § 5, называются *безусловными*.

Рассмотрим условные равенства следующих видов.

1. Требуется доказать некоторое соотношение между тригонометрическими функциями, если задано соотношение (одно или несколько) между аргументами.

Пример 1. Доказать, что

$$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-1=(-1)^n 2\cos x\cos y\cdot\cos z,$$

если $x+y+z=\pi n$.

Решение. Так как $x+y=\pi n-z$, то

$$A=\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-1=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 2y}{2}-1+\cos^2 z=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2y)+\cos^2 z=\cos(\pi n-z)\cos(x-y)+\cos^2 z.$$

Замечая, что $\cos(\pi n-z)=\cos z$ при n четном и $\cos(\pi n-z)=-\cos z$ при n нечетном, мы можем записать, что $\cos(\pi n-z)=(-1)^n\cos z$. Тогда

$$A=(-1)^n\cos z\cdot\cos(x-y)+\cos^2 z=[(-1)^n\cos(x-y)+\cos z]\cos z.$$

С другой стороны, правая часть доказываемого равенства при заданном условии приводится к тому же виду:

$$(-1)^n 2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=(-1)^n[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\cos z=$$
$$=(-1)^n[\cos(\pi n-z)+\cos(x-y)]\cos z=$$
$$=(-1)^n[\cos z\cdot(-1)^n+\cos(x-y)]\cos z=$$
$$=[(-1)^n\cos(x-y)+\cos z]\cos z.$$

2. Требуется доказать некоторое соотношение между тригонометрическими функциями, если даны другие соотношения (одно или несколько) также между тригонометрическими функциями тех же аргументов. При решении этих задач можно непосредственно доказывать требуемое, используя при этом заданное условие.

Пример 2. Доказать, что

$$\frac{1+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{m-n},\ \text{если}\ \frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{n}{m}.$$

Решение. Множество допустимых значений состоит из всех аргументов α, не равных $\frac{\pi}{2}\cdot k$, и β, не равных $\frac{\pi}{2}+\pi k$. Кроме того, $2\alpha+\beta\neq\pi k$, где k—целое число, и $m(m-n)(m+n)\neq 0$.

Доказываемое равенство равносильно равенству

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)}=\frac{m+n}{m-n},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{m+n}{m-n}.$$

Применяя к последнему производную пропорцию, получаем

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{m+n-m+n}{m-n+m+n},$$

или

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{n}{m}.$$

Итак, дополнительное условие есть равенство, равносильное доказываемому, следовательно, последнее справедливо.

В других случаях выгоднее преобразовать заданное дополнительное условие так, чтобы получить из него равенство, которое требуется доказать.

Пример 3. Доказать, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$, если $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$.

Решение. Множество допустимых значений состоит из всех аргументов α и β, сумма которых не равна $\frac{\pi}{2}+k\pi$. Кроме того, $\cos\beta\neq A$.

Преобразуем заданное соотношение. Так как доказываемое равенство не содержит аргумента α, а содержит $\alpha+\beta$, то представим его в виде $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$. Тогда, заменяя α в заданном равенстве, получаем

$$\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=A\sin(\alpha+\beta),$$
$$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=A\sin(\alpha+\beta),$$

или

$$\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta-A)=\cos(\alpha+\beta)\sin\beta.$$

Деля полученное равенство на произведение $\cos(\alpha+\beta)(\cos\beta-A)$ $\left(\alpha+\beta\neq\pi k+\frac{\pi}{2},\ \cos\beta-A\neq 0!\right)$, получаем $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

если

$$\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2\beta\cdot\cos\alpha}.$$

Решение. Множество допустимых значений аргументов состоит из всех $\frac{x}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, α, не равных $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq n\pi$ и таких, что $\cos x\neq\cos\beta$. Полагая (для удобства выкладок) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=a$ и $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=b$, преобразуем дополнительное условие.

Так как $\cos\gamma=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$, а $\sin\gamma=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$, то имеем

$$\frac{\frac{1-y^2}{1+y^2}-\frac{1-a^2}{1+a^2}}{\frac{1-y^2}{1+y^2}-\frac{1-b^2}{1+b^2}}=\frac{\frac{4a^2}{(1+a^2)^2}\cdot\frac{1-b^2}{1+b^2}}{\frac{4b^2}{(1+b^2)^2}\cdot\frac{1-a^2}{1+a^2}},$$

что после упрощения приводится к виду

$$\frac{a^2-y^2}{b^2-y^2}=\frac{a^2(1-b^2)}{b^2(1-a^2)},\text{ или }(a^2-b^2)\,y^2=a^2b^2\,(a^2-b^2).$$

Если $a^2-b^2\neq 0$, то $y^2=a^2b^2$ и $y=\pm ab$, что в наших обозначениях означает $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, если $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\neq 0$.

Если $a^2-b^2=0$, то равенство $\frac{a^2-y^2}{b^2-y^2}=\frac{a^2(1-b^2)}{b^2(1-a^2)}$ справедливо для любых допустимых y, в частности, для $y=\pm ab$, т. е. и в этом случае $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$

Заметим, что в некоторых случаях выгодно перейти от заданного дополнительного соотношения между аргументами к соотношению между тригонометрическими функциями этих аргументов.

Пример 5. Доказать, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma$, если $\alpha=\beta+\gamma$.

Решение. Множество допустимых значений состоит из всех $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\beta\neq\pi n$, $\gamma\neq\pi m$. Требуемое получим из дополнительного условия (т. е. из равенства $\alpha=\beta+\gamma$). Так как $\alpha=\beta+\gamma$, то равны соответствующие тригонометрические функции этих аргументов. В данном случае выгодно рассматривать равенство тангенсов.

Итак, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta+\gamma)$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}.$$

Переходя в правой части к котангенсам, находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}}{1-\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}},\text{ т. е. }\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma-1}.$$

После приведения последнего тождества к общему знаменателю получаем требуемое.

3. Дополнительные условия задаются в виде нескольких равенств, из которых некоторые связывают аргументы, а другие — тригонометрические функции этих аргументов.

Пример 6. Доказать, что

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

если

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \text{ и } A+B+C=\pi.$$

Р е ш е н и е. Считаем, что $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\neq 0$. Обозначая равные отношения через t, имеем

$$a=t\cdot\sin A,\ b=t\cdot\sin B,\ c=t\cdot\sin C.$$

Тогда

$$b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=t^2\left[\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A\right]=$$
$$=t^2\left\{\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}-\left[\cos(B-C)-\cos(B+C)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\cos\left[\pi-(B+C)\right]\right\}=t^2\left\{1-(\cos 2B+\cos 2C)\cdot\frac{1}{2}+\right.$$
$$\left.+\cos(B+C)\left[\cos(B-C)-\cos(B+C)\right]\right\}=$$
$$=t^2\{1-\cos(B+C)\cdot\cos(B-C)+\cos(B+C)\cos(B-C)-$$
$$-\cos^2(B+C)\}=t^2\cdot\sin^2(B+C)=t^2\cdot\sin^2 A=a^2,$$

что и требовалось доказать.

4. Требуется доказать соотношение между аргументами, если задаются соотношения между тригонометрическими функциями этих аргументов.

Пример 7. Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\pi$, если

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1. \qquad (*)$$

Р е ш е н и е. Сгруппируем два первых члена равенства (*), а в третьем слагаемом перейдем к функциям синус и косинус.

Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}-1=0,$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}-\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}=0,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)-\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=0.$$

После изменения знака в обеих частях последнего равенства получаем

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=0.$$

Из последнего следует, что $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, или $\alpha+\beta+\gamma=$ $=\pi+2\pi k$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Исключить x из системы равенств

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = m, \\ \sin 2x = n. \end{cases}$$

Решение. Задачу надо понимать следующим образом: считая данные равенства справедливыми и используя свойства равенств, получить как следствие такое равенство, которое бы не содержало x.

Если рассматривать эти два равенства как уравнения относительно x, то, исключив x, мы найдем необходимое условие, которому должны удовлетворять параметры m и n, чтобы эта система была совместной (см. гл. III); однако эти условия могут быть недостаточными, поэтому вполне допустимыми являются такие преобразования, которые могут дать посторонние корни (например, возведение обеих частей уравнения в квадрат и т. д.). Общий метод исключения параметров из системы двух уравнений состоит в том, что решают одно из уравнений относительно параметра и найденное для него значение подставляют в другое. Однако некоторые искусственные приемы позволяют получать нужный результат значительно быстрее.

В данном случае, возводя первое равенство в квадрат, находим

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = m^2, \text{ или } 1 - \sin 2x = m^2.$$

Затем, используя второе равенство, получаем $1 - n = m^2$. Этот результат надо понимать так: если m и n не удовлетворяют найденному условию, то заведомо не существует такого x, чтобы оба равенства были одновременно справедливы. Но надо помнить, что найденное условие не является, вообще говоря, достаточным условием совместности системы, т. е. если m и n удовлетворяют найденному условию, то это еще не значит, что существует такое x, которому удовлетворяют оба уравнения одновременно. Например, при $n = -2$, $m = \sqrt{3}$ оба уравнения не имеют смысла.

Пример 2. Исключить углы из следующих систем равенств:

$$1) \begin{cases} \cos(x-y) = c, \\ \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} p\cos^2\theta + q\cos^2\varphi = 1, \\ p\operatorname{ctg}^2\theta + q\operatorname{ctg}^2\varphi = 1, \\ p\sin\theta = q\sin\varphi; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x\sin\alpha - y\cos\alpha = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \dfrac{\sin^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\cos^2\alpha}{b^2} = \dfrac{1}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Решение. 1. Возводя второе и третье равенства в квадрат и складывая их, имеем $(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2(\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y) + (\sin^2 y + \cos^2 y) = a^2 + b^2$, т. е. $2 + 2\cos(x-y) = a^2 + b^2$. Используя первое равенство, окончательно получаем $2 + 2c = a^2 + b^2$.

Хотя числа $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$ удовлетворяют полученному соотношению, но при $c = 3$ первое уравнение теряет смысл.

2. Область допустимых значений данных выражений состоит из всех $\varphi \neq \pi n$ и $\theta \neq \pi k$ (n и k — целые). Следовательно, $\sin\varphi \neq 0$ и $\sin\theta \neq 0$. Отсюда следует, что $p \neq 0$ и $q \neq 0$. В самом деле, если $p = 0$, то из третьего уравнения следует, что и $q = 0$. Но в этом случае первые два уравнения системы теряют смысл.

Переходим к решению задачи. Запишем первое равенство системы в виде

$$p(1-\sin^2\theta)+q(1-\sin^2\varphi)=1, \text{ или } p\sin^2\theta+q\sin^2\varphi=p+q-1.$$

Возведя третье равенство в квадрат, имеем $p^2\sin^2\theta = q^2\sin^2\varphi$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} p\sin^2\theta+q\sin^2\varphi=p+q-1, \\ p^2\sin^2\theta-q^2\sin^2\varphi=0 \end{cases}$$

двух уравнений относительно величин $\sin^2\theta$ и $\sin^2\varphi$. Исключая из нее сначала $\sin^2\theta$, затем $\sin^2\varphi$, получаем

$$\begin{cases} q(p+q)\sin^2\varphi = p(p+q-1), \\ p(p+q)\sin^2\theta = q(p+q-1). \end{cases}$$

Так как $p \neq 0$, $q \neq 0$, $\sin\varphi \neq 0$ и $\sin\theta \neq 0$, то из этой системы следует, что и $p+q \neq 0$ (в противном случае $p+q=1$, что несовместно с условием $p+q=0$). Поэтому

$$\sin^2\varphi = \frac{p(p+q-1)}{q(p+q)}; \quad \sin^2\theta = \frac{q(p+q-1)}{p(p+q)}.$$

Переписав теперь второе равенство заданной системы в виде

$$\frac{p(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}+\frac{q(1-\sin^2\varphi)}{\sin^2\varphi}=1$$

и подставляя найденные значения $\sin^2\varphi$ и $\sin^2\theta$, после упрощения получаем $(p^2-q^2)^2 = -pq$.

3. Возведя первое равенство в квадрат, получаем последовательно:

$$x^2\sin^2\alpha+y^2\cos^2\alpha-2xy\sin\alpha\cos\alpha=x^2+y^2,$$
$$x^2(1-\sin^2\alpha)+y^2(1-\cos^2\alpha)+2xy\sin\alpha\cos\alpha=0,$$
$$x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha+2xy\sin\alpha\cos\alpha=0,$$
$$(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2=0,$$

т. е.

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=0.$$

Отсюда $x^2\cos^2\alpha = y^2\sin^2\alpha$. Таким образом, с одной стороны, $x^2\cos^2\alpha = y^2(1-\cos^2\alpha)$, т. е.

$$\cos^2\alpha = \frac{y^2}{x^2+y^2},$$

с другой стороны, $x^2(1-\sin^2\alpha) = y^2\sin^2\alpha$, т. е.

$$\sin^2\alpha = \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Подставляя $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ во второе равенство, получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

При решении задач на исключение углов, в зависимости от выбранного способа решения, могут получаться различные результаты.

Пример 3. Исключить β, если

$$\begin{cases}\cos(\beta+\alpha)=m,\\ \cos(\beta-\alpha)=n.\end{cases}$$

Решение. I способ. Складывая и вычитая данные равенства, получаем:

$$\begin{cases}2\cos\beta\cdot\cos\alpha=m+n,\\ -2\sin\beta\cdot\sin\alpha=m-n,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}4\cos^2\beta\cdot\cos^2\alpha=(m+n)^2,\\ 4\sin^2\beta\cdot\sin^2\alpha=(m-n)^2.\end{cases}$$

Отсюда, умножая первое равенство полученной системы на $\sin^2\alpha$, а второе — на $\cos^2\alpha$ и складывая, имеем

$$4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=(m+n)^2\sin^2\alpha+(m-n)^2\cos^2\alpha,$$

т. е.

$$\sin^2 2\alpha=(m+n)^2\sin^2\alpha+(m-n)^2\cos^2\alpha.$$

II способ. Замечая, что $\beta+\alpha=(\beta-\alpha)+2\alpha$, имеем

$$m=\cos[(\beta-\alpha)+2\alpha]=\cos(\beta-\alpha)\cdot\cos 2\alpha-\sin(\beta-\alpha)\cdot\sin 2\alpha.$$

Используя второе равенство и учитывая, что $\sin(\beta-\alpha)=\pm\sqrt{1-\cos^2(\beta-\alpha)}$, получаем $m=n\cos 2\alpha\pm\sqrt{1-n^2}\sin 2\alpha$, или $\pm\sqrt{1-n^2}\sin 2\alpha=n\cos 2\alpha-m$, т. е.

$$(1-n^2)\sin^2 2\alpha=(n\cos 2\alpha-m)^2.$$

§ 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

При доказательстве тригонометрических неравенств используются те же приемы, что и при доказательстве неравенств, рассмотренных в курсе алгебры (см. гл. II, § 8).

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих различные методы доказательства.

В некоторых случаях тригонометрическое неравенство можно свести к алгебраическому.

Пример 1. Доказать неравенство

$$4\sin 3\alpha+5\geqslant 4\cos 2\alpha+5\sin\alpha.$$

Решение. Обозначая $\sin\alpha = a$ и используя тождества $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, мы можем данное условие переписать в виде $4(3a - 4a^3) + 5 \geqslant 4(1 - 2a^2) + 5a$, где $|a| \leqslant 1$. После соответствующих преобразований получаем

$$16a^3 - 8a^2 - 7a - 1 \leqslant 0, \text{ или } (a-1)(4a+1)^2 \leqslant 0.$$

Последнее очевидно, так как $a - 1 \leqslant 0$.

Заметим, что знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $\sin\alpha = 1$ и $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$.

Пример 2. Доказать, что $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant 1$, если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Область допустимых значений состоит из всех α, β и γ, не равных $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Из условия $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1$ (предлагаем читателю доказать это). Если положить $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b$, $\operatorname{tg}\gamma = c$, то доказательство данного неравенства сводится к доказательству алгебраического неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ при условии $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Это неравенство мы доказали (см. гл. II, § 8).

При доказательствах некоторых неравенств полезно использовать уже известные неравенства $\sin\alpha < \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$, справедливые для $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. Доказать, что $\alpha - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \operatorname{tg}\beta$, если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Имеем $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = (1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$. Так как $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\beta > 0$, $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) > \beta - \alpha$, то $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \alpha$, откуда следует, что $\alpha - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \operatorname{tg}\beta$.

Пример 4. Доказать, что $\cos\alpha + \alpha\sin\alpha > 1$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Так как $\sin\alpha < \alpha$ и $\cos\alpha < 1$, то $\sin^2\alpha < \alpha\sin\alpha$ и $\cos^2\alpha < \cos\alpha$. Складывая эти неравенства, получаем

$$\cos\alpha + \alpha\sin\alpha > 1.$$

В некоторых случаях полезно найти области изменения правой и левой частей заданного неравенства.

Пример 5. Доказать, что $|\sin\alpha + \cos\alpha| < |\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha|$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \cdot k$.

Решение. Так как $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, то $|\sin\alpha + \cos\alpha| \leqslant \sqrt{2}$. С другой стороны, $|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| = \frac{2}{|\sin 2\alpha|} \geqslant 2$. Отсюда следует, что

$$|\sin\alpha + \cos\alpha| < |\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha|.$$

При доказательстве некоторых неравенств можно использовать метод математической индукции.

Пример 6. Доказать, что $\operatorname{tg} n\alpha > n \operatorname{tg} \alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$, где $n = 2, 3, \ldots$.

Решение. При $n = 2$ имеем $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \operatorname{tg} \alpha < 1$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, поэтому $\operatorname{tg} 2\alpha > 2 \operatorname{tg} \alpha$.

Допустив теперь, что $\operatorname{tg} n\alpha > n \operatorname{tg} \alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$, докажем, что $\operatorname{tg}(n+1)\alpha > (n+1) \operatorname{tg} \alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4n}$. Имеем $(n+1) \operatorname{tg} \alpha = n \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha$. Согласно нашему допущению отсюда следует, что

$$(n+1) \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} \alpha.$$

Но $\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} \alpha = (1 - \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg}(n+1)\alpha$. Поэтому

$$(n+1) \operatorname{tg} \alpha < (1 - \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg}(n+1)\alpha. \qquad (*)$$

Оценим множитель $1 - \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Так как $0 < n\alpha < \frac{\pi}{4}$, то $0 < \operatorname{tg} n\alpha < 1$. Поэтому $0 < \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha < 1$ и $0 < 1 - \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha < 1$. Учитывая последнее неравенство, из неравенства (*) получаем, что $(n+1) \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg}(n+1)\alpha$, что и требовалось доказать.

§ 9. СУММИРОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Задачи на суммирование тригонометрических выражений требуют большой изобретательности.

Во многих случаях представляют члены последовательности в виде разностей определенных функций так, чтобы получить подобные члены разных знаков, или применяют метод индукции (обычно, когда предлагается доказать формулу суммы) и т. д.

Проиллюстрируем сказанное на следующих примерах.

Пример 1. Найти сумму

$$S_n = \sin x \cdot \sin 3x + \sin 2x \cdot \sin 6x + \ldots + \sin 2^{n-1}x \cdot \sin 3 \cdot 2^{n-1}x.$$

Решение. Каждое произведение правой части представим в виде разности:

$$a_k = \sin 2^{k-1}x \sin 3 \cdot 2^{k-1}x = \frac{1}{2}(\cos 2^k x - \cos 2^{k+1}x).$$

Тогда

$$S_n = \frac{1}{2}\{[\cos 2x - \cos 2^2 x] + [\cos 2^2 x - \cos 3^2 x] + \ldots + [\cos 2^{n-1}x - \cos 2^n x] + [\cos 2^n x - \cos 2^{n+1}x]\},$$

откуда после приведения подобных получим

$$S_n = \frac{\cos 2x - \cos 2^{n+1}x}{2}.$$

Иногда можно перейти от заданной последовательности к другой, методы суммирования которой известны.

Пример 2. Найти сумму

$$S_n=\sin x\cdot\sin 2x+\sin 2x\cdot\sin 3x+\ldots+\sin nx\cdot\sin(n+1)x.$$

Решение. Вновь представляем каждое произведение левой части в виде разности:

$$a_k=\sin kx\cdot\sin(k+1)x=\frac{1}{2}[\cos x-\cos(2k+1)x].$$

Тогда

$$S_n=\frac{1}{2}\{(\cos x-\cos 3x)+(\cos x-\cos 5x)+\ldots+$$

$$+[\cos x-\cos(2n+1)x]\}=\frac{1}{2}n\cos x-\frac{1}{2}S_1,$$

где

$$S_1=\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n+1)x \qquad (*)$$

есть сумма косинусов, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию с разностью $d=2x$ (см. гл. XI, § 1). Для нахождения S_1 умножаем обе части равенства (*) на $2\sin x$ и используем формулу $2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$. Получим

$$2S_1\sin x=(\sin 4x-\sin 2x)+(\sin 6x-\sin 4x)+\ldots+$$
$$+[\sin 2(n+1)x-\sin 2nx]=\sin 2(n+1)x-\sin x.$$

Отсюда при $\sin x\neq 0$ находим $S_1=\dfrac{\sin 2(n+1)x-\sin 2x}{2\sin x}$ и, следовательно,

$$S_n=\frac{n\cos x}{2}-\frac{\sin 2(n+1)x-\sin 2x}{4\sin x}=\frac{(n+1)\sin 2x-\sin 2(n+1)x}{4\sin x}.$$

Если $\sin x=0$, т. е. $x=\pi k$, то $S_n=0$.

При суммировании синусов или косинусов кратных аргументов (kx, $k=1, 2, \ldots$) с коэффициентами, образующими геометрическую прогрессию, целесообразно использовать формулу Муавра $(\cos x+\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$ (см. гл. I).

Пример 3. Найти суммы

$$S_n=\cos x+2\cos 2x+4\cos 3x+\ldots+2^{n-1}\cos nx$$

и

$$\sigma_n=\sin x+2\sin 2x+4\sin 3x+\ldots+2^{n-1}\sin nx,$$

где $x=\dfrac{2\pi}{n}$.

Решение. Вычислим сумму $S_n+i\sigma_n$:

$$S_n+i\sigma_n=(\cos x+i\sin x)+2(\cos 2x+i\sin 2x)+\ldots+$$
$$+2^{n-1}(\cos nx+i\sin nx)=(\cos x+i\sin x)+2(\cos x+i\sin x)^2+\ldots+$$
$$+2^{n-1}(\cos x+i\sin x)^n.$$

Справа стоит сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=2(\cos x+i\sin x)$ и первым членом $a=\cos x+i\sin x$. Поэтому

$$S_n+i\sigma_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{(\cos x+i\sin x)[1-2^n(\cos x+i\sin x)^n]}{1-2(\cos x+i\sin x)}=$$
$$=\frac{(\cos x+i\sin x)(1-2^n\cos nx-i2^n\sin nx)}{(1-2\cos x)-2i\sin x}.$$

Замечая, что

$$\frac{\cos x+i\sin x}{1-2\cos x-2i\sin x}=\frac{(\cos x+i\sin x)(1-2\cos x+2i\sin x)}{(1-2\cos x)^2+4\sin^2 x}=\frac{\cos x-2+i\sin x}{5-4\cos x}$$

и $x=\frac{2\pi}{n}$, получим

$$S_n+i\sigma_n=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n}-2+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)(1-2^n\cdot\cos 2\pi-i\cdot 2^n\cdot\sin 2\pi)}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n}-2+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)(1-2^n)}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}}=\frac{(1-2^n)\left(\cos\frac{2\pi}{n}-2\right)}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}}+i\,\frac{(1-2^n)\sin\frac{2\pi}{n}}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}}.$$

Из равенства двух комплексных чисел следует равенство их действительных и мнимых частей, поэтому

$$S_n=\frac{(2^n-1)\left(2-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}};\quad \sigma_n=\frac{(1-2^n)\sin\frac{2\pi}{n}}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}}.$$

В следующем примере используем метод математической индукции.

Пример 4. Доказать, что

$$1+\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}+\frac{\cos 3x}{\cos^3 x}+\ldots+\frac{\cos nx}{\cos^n x}=\frac{\sin(n+1)}{\cos^n x\cdot\sin x}. \qquad (*)$$

Решение. При $n=1$ равенство очевидно ($2=2$). Допуская это равенство справедливым для некоторого $n>1$, докажем справедливость его для $n+1$. Очевидно, что

$$S_{n+1}=S_n+\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x\cdot\sin x}+\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=$$

$$=\frac{\sin(n+1)x\cdot\cos x+\cos(n+1)x\cdot\sin x}{\cos^{n+1}x\cdot\sin x}=\frac{\sin(n+2)x}{\cos^{n+1}x\cdot\sin x},$$

т. е. равенство (*) справедливо и для $n+1$.

К задачам на суммирование тесно примыкают задачи на вычисление произведений. Эти задачи также требуют большой изобретательности и иногда решаются умножением и делением произведения на некоторую тригонометрическую функцию.

Пример 5. Вычислить

$$P_n=(1+\sec 2x)(1+\sec 4x)\ldots(1+\sec 2^n x).$$

Решение. Очевидно,

$$P_n=\frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1+\cos 4x}{\cos 4x}\cdots\frac{1+\cos 2^n x}{\cos 2^n x}=$$

$$=\frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}\cdot\frac{2\cos^2 2x}{\cos 4x}\cdots\frac{2\cos 2^{n-1}x}{\cos 2^n x}=$$

$$=\frac{2^n\cos x}{\cos 2^n x}\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 2^2x\ldots\cos 2^{n-1}x.$$

Мы получили произведение косинусов, аргументы которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=2$. Поэтому умножим и разделим это произведение на $\sin x\neq 0$ (см. § 2, пример 3). Применяя затем последовательно формулу $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, получаем

$$P_n=\frac{2^n\cos x}{\cos 2^n x}\cdot\frac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}=\frac{\operatorname{tg}2^n x}{\operatorname{tg}x}.$$

Если $\sin x=0$, т. е. $x=\pi k$, то $P_n=2^n$.

Пример 6. Вычислить

$$P_n=\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)\ldots\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}+\sin\frac{\beta}{2^n}\right).$$

Решение. Умножим и разделим произведение на

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}\right)\neq 0.$$

Замечая, что

$$(\cos x-\cos y)(\cos x+\cos y)=\cos^2 x-\cos^2 y=\frac{\cos 2x-\cos 2y}{2},$$

имеем:

$$P_n=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)\ldots\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}\right)\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}+\cos\frac{\beta}{2^n}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}\right)}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)\ldots\times$$

$$\times\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}\right)\right]=\ldots=$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{2^n\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}\right)}.$$

Если $\cos\frac{\alpha}{2^n}=\cos\frac{\beta}{2^n}$, т. е. $\beta=2^n 2k\pi\pm\alpha$, то $P_n=2^n\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}$

Умножив и разделив правую часть на $\sin\frac{\alpha}{2^n}\neq 0$ и применяя затем последовательно формулу $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, получим

$$P_n=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Если, наконец, и $\sin\frac{\alpha}{2^n}=0$, т. е. $\alpha=2^n m\pi$, то

$$P_n=(-1)^m 2^n.$$

ГЛАВА XII

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Все тригонометрические функции, будучи периодическими, не являются монотонными во всей области своего существования. Отсюда следует (см. гл. VII, § 7), что функции, обратные тригонометрическим, рассматриваемым во всей области их существования, многозначны. Чтобы получить однозначные ветви этих многозначных функций, нужно взять промежутки монотонности, на которых тригонометрическая функция либо возрастает, либо убывает, принимая при этом все возможные для нее значения.

Рассмотрим обратные функции для каждой из тригонометрических функций в отдельности.

§ 1. АРКСИНУС

Как известно, функция $y=\sin x$ монотонна на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right]$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$. Возьмем промежуток $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. На нем $y=\sin x$ возрастает, принимая все свои значения от -1 до 1. Согласно общей теории (см. гл. VII, § 7) существует обратная однозначная функция, определенная на отрезке $-1\leqslant y\leqslant 1$ и монотонно возрастающая на нем от значения $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Эта обратная функция обозначается символом

$$x=\arcsin y \tag{1}$$

(читается: «x равен арксинусу y».

Следуя нашей привычке обозначать аргумент через x, поменяем местами x и y в равенстве (1) и будем писать

$$y=\arcsin x.$$

Таким образом, *функцией* $y=\arcsin x$ *называется переменная величина* y, *лежащая на отрезке* $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, *синус которой равен* x. Это значение y может рассматриваться как радианная мера угла (дуги).

Взаимная обратность функций $\sin x$ и $\arcsin x$ хорошо видна из следующей записи:

$$\sin(\arcsin x)=x,\ \text{если}\ |x|\leqslant 1, \tag{2}$$

т. е. знаки операций взятия «arcsin», а затем «sin», уничтожаются, если они следуют одна за другой. Обратный порядок этих операций дает тот же результат в том случае, когда $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, т. е. $\arcsin(\sin x)=x$, если $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

График функции $y=\arcsin x$ можно получить из части графика $y=\sin x$, $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$ зеркальным отражением последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 69). На этом графике наглядно отражены все свойства функции $y=\arcsin x$. Перечислим их еще раз.

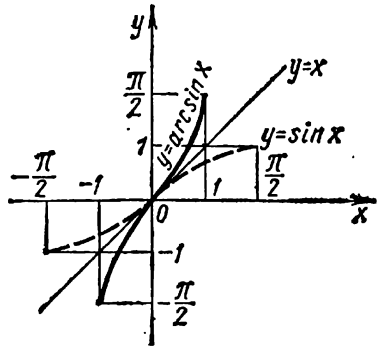


Рис. 69

Функция $y=\arcsin x$:

1) определена и однозначна на отрезке $[-1, 1]$;

2) монотонновозрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, принимая при этом все промежуточные значения $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

3) является нечетной функцией, т. е. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

Многозначная функция, обратная тригонометрической функции $y=\sin x$ во всей области ее существования, обозначается символом $Y=\operatorname{Arcsin} x$.

Таким образом, $Y=\operatorname{Arcsin} x$ есть множество всех чисел, синус которых равен x.

Найти все значения $Y=\operatorname{Arcsin} x$ — это значит найти все числа (или углы, или дуги) Y, синус которых равен x, т. е.

$$\sin Y=x, \tag{3}$$

где x — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $|x|\leqslant 1$.

Пусть y_0 — число, взятое из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, такое что $y_0=\arcsin x$, или

$$\sin y_0=x. \tag{4}$$

Сравнивая равенства (3) и (4), имеем

$$\sin Y=\sin y_0, \tag{5}$$

и наша задача свелась к отысканию всех чисел Y (или углов, или дуг), удовлетворяющих условию (5). Последнее справедливо для всех Y и y_0, связанных равенствами $Y-y_0=2\pi n$ и $Y+y_0=\pi+2\pi n$ (см. гл. X, § 8). Отсюда следует, что $Y=y_0+2\pi n$ и $Y=-y_0+\pi(2n+1)$. Итак, все значения $Y=\operatorname{Arcsin} x$, т. е. все числа, синус которых равен x, заключены в формулах

$$\operatorname{Arcsin} x=\begin{cases}\arcsin x+2\pi n,\\ -\arcsin x+\pi(2n+1),\end{cases} \tag{6}$$

которые можно объединить в одну:

$$\operatorname{Arcsin} x=(-1)^k\cdot\arcsin x+\pi k. \tag{7}$$

В самом деле, если k четно, т. е. $k=2n$, то из равенства (7) следует верхняя формула (6); если $k=2n+1$, то из равенства (7) получаем нижнюю часть формулы (6).

Замечание. При $x=\pm 1$ формула (7) упрощается:

$$\operatorname{Arcsin} 1=(-1)^n \arcsin 1+\pi n=\begin{cases} \frac{\pi}{2}+2\pi k, & \text{если } n=2k; \\ -\frac{\pi}{2}+\pi+2\pi k, & \text{если } n=2k+1, \end{cases}$$

т. е. $\operatorname{Arcsin} 1=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ при любом k;

$$\operatorname{Arcsin}(-1)=(-1)^n \arcsin(-1)+\pi n=\begin{cases} -\frac{\pi}{2}+2\pi k, & \text{если } n=2k; \\ \frac{\pi}{2}-\pi+2\pi k, & \text{если } n=2k-1, \end{cases}$$

т. е. $\operatorname{Arcsin}(-1)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ при любом k.

§ 2. АРККОСИНУС

Эту функцию строят по той же схеме, что и арксинус.

На промежутке $[0, \pi]$ функция $y=\cos x$ монотонно убывает от 1 до -1 и принимает при этом все промежуточные значения. Следовательно, существует обратная однозначная функция, определенная на отрезке $-1 \leqslant y \leqslant 1$ и монотонно убывающая на нем от π до 0. Это обратная функция обозначается символом

$$x=\arccos y$$

(читается: «x равен арккосинусу y»), или, если независимую переменную обозначать через x,

$$y=\arccos x.$$

Таким образом, *функцией* $y=\arccos x$ *называется переменная величина* y, *лежащая на отрезке* $[0, \pi]$, *косинус которой равен* x. Из этого определения следует, что

$$\cos(\arccos x)=x, \tag{8}$$

если $|x| \leqslant 1$ [$\arccos(\cos x)=x$ в том случае, когда $0 \leqslant x \leqslant \pi$; см. § 1].

График функции $y=\arccos x$ можно получить из графика функции $y=\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ зеркальным отражением последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 70).

Итак, функция $y=\arccos x$:

1) определена и однозначна на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

2) монотонно убывает от π до 0, принимая при этом все промежуточные значения $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Заметим, что функция $y=\arccos x$ не является ни четной, ни нечетной. Так, например,

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\quad\left(\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right),$$

а

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi\quad\left(\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\right).$$

Многозначная функция, обратная функции $y=\cos x$ во всей области ее существования, обозначается символом $Y=\operatorname{Arccos} x$.

Таким образом, $Y=\operatorname{Arccos} x$ есть множество всех чисел Y, косинус которых равен x.

Найти все значения $Y=\operatorname{Arccos} x$ — это значит найти все числа (или углы, или дуги), косинус которых равен x, т. е.

$$\cos Y=x, \tag{9}$$

где $|x|\leqslant 1$ — некоторое фиксированное число. Возьмем в промежутке $[0,\ \pi]$ число $y_0=\arccos x$. Для него также

$$\cos y_0=x. \tag{10}$$

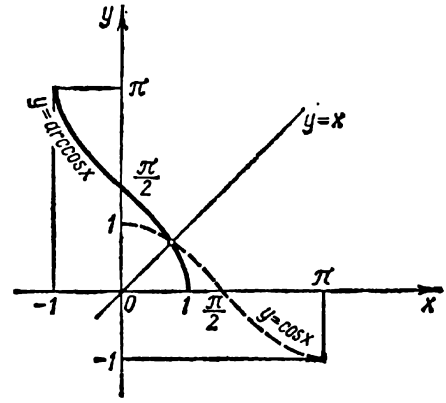


Рис. 70

Сравнивая равенства (9) и (10), имеем

$$\cos Y=\cos y_0, \tag{11}$$

и наша задача свелась к отысканию всех чисел (или углов, или дуг), удовлетворяющих условию (11). Последнее справедливо для всех Y и y_0, связанных равенствами $Y\pm y_0=2\pi n$, где n — любое целое число (см. гл. X, § 8).

Итак, все значения $Y=\operatorname{Arccos} x$, т. е. все числа, косинус которых равен x, заключены в формуле

$$\operatorname{Arccos} x=\pm\arccos x+2\pi n. \tag{12}$$

Замечание. При $x=0$ формула (12) упрощается:

$$\operatorname{Arccos} 0=\pm\arccos 0+2\pi n=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n=\dfrac{\pi}{2}+\pi(2n-1),\end{cases}$$

т. е. $\operatorname{Arccos} 0=\frac{\pi}{2}+\pi k$, где k — любое целое число.

§ 3. АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y=\operatorname{tg} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞ и принимает при этом все действительные значения.

Следовательно, существует обратная ей однозначная функция, определенная на всей числовой оси и монотонно возрастающая от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Эта обратная функция обозначается символом $x=\operatorname{arctg} y$ («x равен арктангенсу y») или

$$y=\operatorname{arctg} x, \tag{13}$$

если аргумент обозначать через x.

Таким образом, *функцией* $y=\operatorname{arctg} x$ *называется переменная величина* y, *лежащая в интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *тангенс которой равен* x.

Из этого определения следует, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$ для любого действительного x $\left[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x\right.$ в том случае, когда $\left.|x|<\frac{\pi}{2}\right]$. График этой функции может быть получен зеркальным отображением относительно биссектрисы I и III координатных углов ветви тангенсоиды, соответствующей интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 71).

Итак, функция $y=\operatorname{arctg} x$;

1) определена и однозначна на всей числовой прямой;

2) монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, принимая при этом все промежуточные значения:

3) является нечетной функцией, т. е. $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$.

Многозначная функция, обратная функция $y=\operatorname{tg} x$, рассматриваемой во всей области ее существования, обозначается символом

$$Y=\operatorname{Arctg} x.$$

Таким образом, $Y=\operatorname{Arctg} x$ есть множество всех чисел Y, тангенс которых равен x, т. е.

$$\operatorname{tg} Y=x. \tag{14}$$

Найдем все эти значения Y. С этой целью возьмем $y_0=\operatorname{arctg} x$. Сравнивая равенство $\operatorname{tg} y_0=x$ с равенством (14), имеем

$$\operatorname{tg} y_0=\operatorname{tg} Y,$$

откуда следует, что $Y=y_0+\pi n$.

Итак, все значения $Y=\operatorname{Arctg} x$, т. е. все числа, тангенс которых равен x, заключены в формуле

$$\operatorname{Arctg} x=\operatorname{arctg} x+\pi n. \tag{15}$$

На интервале $(0, \pi)$ функция $y=\operatorname{ctg} x$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$ и принимает все действительные значения. Следовательно, существует обратная ей однозначная функция, определенная на всей числовой оси и монотонно убывающая от π до 0.

Эта функция обозначается символом $x = \operatorname{arcctg} y$, или

$$y = \operatorname{arcctg} x,$$

если аргумент обозначать через x.

Таким образом, *функцией* $y = \operatorname{arcctg} x$ *называется переменная величина* y, *лежащая в интервале* $(0, \pi)$, *котангенс которой равен* x.

Из этого определения вытекает, что $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ для любого действительного x [$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ в том случае, когда $0 < x < \pi$].

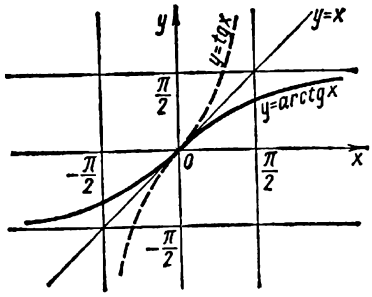


Рис. 71

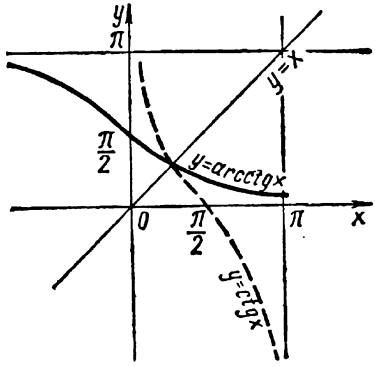


Рис. 72

График этой функции дан на рис. 72. Мы видим, что функция $y = \operatorname{arcctg} x$:

1) определена и однозначна на всей числовой прямой;

2) монотонно убывает от π до 0, принимая при этом все промежуточные значения;

3) так же, как и арккосинус, $\operatorname{arcctg} x$ не является ни четной, ни нечетной функцией. Так, например, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1\right)$, а $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi\left(\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi = -1\right)$.

Все значения Y, котангенс которых равен x, записываются символом $Y = \operatorname{Arcctg} x$ и заключены в формуле

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n \qquad (16)$$

(доказательство предоставляется читателю).

Вместо промежутков $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ для синуса и тангенса, $[0, \pi]$ и $(0, \pi)$—для косинуса и котангенса можно рассматривать другие промежутки монотонности этих функций. Каждому такому промежутку будет соответствовать обратная однозначная функция. Таким образом, каждая многозначная функция $y = \operatorname{Arcsin} x$, $y = \operatorname{Arccos} x$, $y = \operatorname{Arctg} x$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$ имеет бесконечное число однозначных ветвей, среди которых находятся функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$. Последние называются главными однозначными ветвями обратных тригонометрических функций, или, проще, их главными значениями.

§ 4. ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

I. При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества

$$\operatorname{acrsin} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

Докажем одно из них, например (18).

Переписав его в виде $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$, вычислим тангенс числа $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$.

По формулам приведения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Так как $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, то $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, два числа $\operatorname{arctg} x$ и $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$, заключенные в одном интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, имеют равные значения тангенса:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right).$$

Отсюда следует равенство этих аргументов, т. е.

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x,$$

или

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично доказывается тождество (17).

Отметим еще одну пару тождеств.

II. При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \tag{19}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \tag{20}$$

Докажем одно из них, например (19).

Имеем

$$\cos[\arccos(-x)] = -x$$

и

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x,$$

т. е.

$$\cos[\arccos(-x)] = \cos(\pi - \arccos x).$$

Так как $0 \leqslant \arccos\alpha \leqslant \pi$ для любого $|\alpha| \leqslant 1$, то $0 \leqslant \arccos(-x) \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \pi - \arccos x \leqslant \pi$. Таким образом, числа $\arccos(-x)$ и $\pi - \arccos x$, заключенные в одном промежутке $[0, \pi]$, имеют равные значения косинуса. Следовательно, эти числа равны, т. е.

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Второе тождество доказывается аналогично.

§ 5. ЗАДАЧИ

Пример 1. Найти область определения следующих функций:

$$1)\ y = \arcsin\frac{2x}{x-1}; \quad 2)\ y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}.$$

Решение 1. Арксинус определен для всех значений аргумента, не превосходящих по абсолютной величине единицы. Следовательно, область определения данной функции состоит из всех значений x, удовлетворяющих неравенству

$$-1 \leqslant \frac{2x}{x-1} \leqslant 1.$$

Решая его, находим

$$-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}.$$

Итак, область определения функции $y = \arcsin\frac{2x}{x-1}$ есть отрезок $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$.

2. Область определения этой функции состоит из всех значений x, для которых $-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$ и $\pi - 4\arccos\frac{x}{2} \geqslant 0$, или $|x| \leqslant 2$ и $\arccos\frac{x}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}$. Учитывая, что $\frac{\pi}{4} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$\arccos\frac{x}{2} \leqslant \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{21}$$

Так как арккосинус монотонно убывает в области своего определения, то из неравенства (21) следует, что

$$1 \geqslant \frac{x}{2} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т. е. } \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2,$$

причем этот отрезок содержится в отрезке $[-2, 2]$.

Итак, область определения функции $y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}$ есть отрезок $[\sqrt{2}, 2]$.

Пример 2. Вычислить $\arcsin(\sin 257°)$.

Решение. 1. Так как $\arcsin(\sin x)=x$ лишь в том случае, когда $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$ (см. § 1), то $\sin 257^\circ$ нужно с помощью формул приведения свести к синусу угла, заключенного в указанных пределах. Имеем

$$\sin 257^\circ=\sin(180^\circ+77^\circ)=-\sin 77^\circ=\sin\left(-\frac{77}{180}\pi\right),$$

причем $\left|-\frac{77}{180}\pi\right|<\frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$\arcsin(\sin 257^\circ)=\arcsin\left[\sin\left(-\frac{77}{180}\pi\right)\right]=-\frac{77}{180}\pi$$

(напомним, что $\arcsin x$ выражается только в радианах).

Пример 3. Вычислить $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right]$.

Решение. Заметим, что $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)=x$ лишь в том случае, когда $0<x<\pi$. Так как π—период котангенса, то

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}+\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{11}$$

и

$$\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right]=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{11}\right)=\frac{10\pi}{11}.$$

Пример 4. Вычислить $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6)$.

Решение. Имеем $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=x$, если $|x|<\frac{\pi}{2}$. В силу периодичности тангенса

$$\operatorname{tg}6=\operatorname{tg}(6-2\pi),$$

причем $-\frac{\pi}{2}<6-2\pi<0$. Поэтому

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6)=\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(6-2\pi)]=6-2\pi.$$

Пример 5. Вычислить $\arccos[\sin(-3)]$.

Решение. Прежде всего переходим от $\sin(-3)$ к косинусу дополнительного аргумента:

$$\sin(-3)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\right).$$

Но $\arccos(\cos x)=x$ в том случае, когда $0\leqslant x\leqslant\pi$, а $\frac{\pi}{2}+3>\pi$. Поэтому, используя формулу $\cos\alpha=-\cos(\alpha-\pi)$, получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3-\pi\right)=-\cos\left(3-\frac{\pi}{2}\right),$$

причем $0 < 3 - \frac{\pi}{2} < \pi$. Тогда согласно тождествам (19) и (8)

$$\arccos[\sin(-3)] = \arccos\left[-\cos\left(3-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \pi - \arccos\left[\cos\left(3-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi - \left(3-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 3.$$

Пример 6. Определить знак выражения

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Решение. Укажем границы, в которых лежат значения выражений, стоящих в скобках, и определим знак каждого сомножителя:

а) из неравенства $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ и возрастания арктангенса следует, что $\operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$. Учитывая, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, получаем

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{6} \text{ и } 0 < 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{3}.$$

Так как $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, то $0 < 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0;$$

б) из неравенства $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и убывания арккосинуса следует, что

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} > \arccos\frac{\sqrt{5}}{3} > \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая, что $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, получаем

$$\frac{\pi}{6} < \arccos\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{\pi}{4}$$

и

$$\frac{\pi}{2} < 3\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3\pi}{4}. \qquad (22)$$

Далее из неравенства $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и возрастания арксинуса следует, что

$$\arcsin\frac{1}{2} < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} < \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Учитывая, что $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, получаем

$$\frac{\pi}{6}<\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}<\frac{\pi}{4}. \tag{23}$$

Таким образом, из неравенств (22) и (23) вытекает, что

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}<3\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}+\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}<\pi.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}+\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)<0.$

Итак, данное выражение как произведение двух чисел различных знаков отрицательно.

При решении многих задач, связанных с обратными тригонометрическими функциями, удобно выражать одну из аркфункций * через другие. При этом можно учитывать следующие их свойства:

1. Если аргумент данной аркфункции положителен, то ее значение лежит в промежутках $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ или $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и эта аркфункция может быть выражена через любую из остальных. В этом случае можно рассматривать данную аркфункцию как радианную меру острого угла в прямоугольном треугольнике (см. гл. IX и пример 7 этого параграфа).

2. Если аргумент данной аркфункции отрицателен, то ее значение лежит либо в промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ или $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (арксинус и арктангенс), либо в промежутках $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ или $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (арккосинус и арккотангенс). Чтобы перейти от отрицательных аргументов к положительным, следует использовать тождества

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,\ \operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$$

и

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,\ \operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x.$$

Пример 7. Выразить $\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$ через все остальные аркфункции.

Решение. I способ. Обозначая $\alpha=\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$, имеем $\sin\alpha=\frac{7}{\sqrt{50}}$, причем $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найдем остальные тригонометри-

---

* Для сокращения будем называть все обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ аркфункциями.

ческие функции угла α:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{50}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=7,\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{7}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}=\operatorname{arctg}7=\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}.$$

II способ. Так как $0<\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}<\frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$ можно рассматривать как радианную меру острого угла в прямоугольном треугольнике, в котором противолежащий ему катет $a=7$, гипотенуза $c=\sqrt{50}$. По теореме Пифагора находим другой катет b: $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{50-49}=1$. Теперь в треугольнике нам известны все три стороны. Поэтому тот же угол α можно рассматривать как арккосинус или арктангенс, или арккотангенс соответствующих чисел. Именно:

$$\alpha=\arccos\frac{b}{c}=\arccos\frac{1}{\sqrt{50}},$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}=\operatorname{arctg}7\ \text{ и }\ \alpha=\operatorname{arcctg}\frac{b}{a}=\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}.$$

Пример 8. Выразить $\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}$ через все остальные аркфункции.

Решение. Данная аркфункция определена для всех действительных значений x, удовлетворяющих неравенствам $\left|\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}\right|\leqslant 1$, $|x|\leqslant 1$. Отсюда находим, что $|x|\leqslant 1$.

Так как $\frac{\pi}{2}<\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}<\pi$, то данный арккосинус непосредственно выражается только через арккотангенс. Чтобы его выразить через остальные аркфункции, воспользуемся тождеством

$$\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}=\pi-\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{1{,}5-x},\qquad (24)$$

где

$$0<\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{1{,}5-x}<\frac{\pi}{2}.$$

Теперь $\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{1{,}5-x}$ можно рассматривать как радианную меру угла α в прямоугольном треугольнике, в котором прилежащий к этому углу катет $b=\sqrt{1-x^2}$, $|x|<1$, гипотенуза $c=1{,}5-x$, противолежащий катет $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{2x^2-3x+1{,}25}$. Поэтому,

зная $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, можем записать

$$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{1{,}5-x}=\arcsin\frac{\sqrt{2x^2-3x+1{,}25}}{1{,}5-x}=$$

$$=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x^2-3x+1{,}25}{1-x^2}}=\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2-3x+1{,}25}}.$$

(Если $|x|=1$, то $\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}=\frac{\pi}{2}$, и мы имеем $\arccos 0=$ $=\arcsin 1=\operatorname{arcctg} 0$.)

Возвращаясь к равенству (24), окончательно получаем

$$\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2x^2-3x+1{,}25}}{1{,}5-x}=$$

$$=\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x^2-3x+1{,}25}{1-x^2}}=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2-3x+1{,}25}},\quad |x|<1,$$

причем

$$\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2-3x+1{,}25}}=\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2-3x+1{,}25}}\right).$$

При вычислении тригонометрических функций от аркфункций и их комбинаций используют основные тождества, выведенные в гл. IX и X, и тождества (2), (8), (13), (17)—(20) этой главы.

Пример 9. Вычислить $\cos(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. Обозначая $\alpha=\operatorname{arctg} x$, имеем $\operatorname{tg}\alpha=x$, причем $-\frac{\pi}{2}<$ $<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Таким образом, наша задача сводится к уже известной: найти $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=x$ и $|\alpha|<\frac{\pi}{2}$. Согласно тождеству $1+\operatorname{tg}^2\alpha=$ $=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, имеем

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(перед радикалом берется знак «+», так как в указанных пределах $\cos\alpha>0$).

Пример 10. Вычислить $\operatorname{tg}\left[2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

Решение. Обозначая $\alpha=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, имеем $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, где $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Таким образом, наша задача сводится к отысканию $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. Решая эту, уже знакомую нам задачу, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{5}{4}}=4\sqrt{5}$$

$\left(\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=-\frac{\sqrt{5}}{2}\right.$, перед радикалом берется знак «—», так как в указанных пределах $\left.\operatorname{tg}\alpha<0\right)$.

Пример 11. Вычислить $\cos(\arcsin x+2\arccos x)$.

Решение. Обозначая $\alpha=\arcsin x$ и $\beta=\arccos x$, имеем $\sin\alpha=x$, $\cos\beta=y$, где $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Таким образом, задача сводится к отысканию $\cos(\alpha+2\beta)$ по известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\beta$. Раскрывая косинус суммы, находим

$$\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cdot\cos 2\beta-\sin\alpha\cdot\sin 2\beta=$$
$$=\cos\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta,$$

где $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$, а $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-y^2}$ (оба радикала берутся со знаком «+», так как $\cos\alpha\geqslant 0$ и $\sin\beta\geqslant 0$). Поэтому получаем

$$\cos(a+2\beta)=\sqrt{1-x^2}(y^2-1+y^2)-2xy\sqrt{1-y^2}=$$
$$=\sqrt{1-x^2}(2y^2-1)-2xy\sqrt{1-y^2}.$$

Пример 12. Вычислить $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3$.

Решение. Обозначая искомую величину через A: $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=A$, вычислим $\operatorname{tg}A$.

Имеем

$$\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}=\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1.$$

Теперь остается найти A по заданному значению тангенса этого аргумента. Для того чтобы эта задача была однозначной, нужно указать пределы изменения A. Так как $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3<\pi$, т. е. аргумент A оканчивается во II четверти. Следовательно, $A=\frac{3\pi}{4}$.

Пример 13. Вычислить $A=\arcsin a+\arccos b$, где $0<a<1$ и $0<b<1$.

Решение. Так как $0<\arcsin a<\frac{\pi}{2}$ и $0<\arccos b<\frac{\pi}{2}$, то $0<\arccos b+\arcsin a<\pi$. На интервале $(0,\pi)$ функция синус не монотонна и A по найденному значению $\sin A$ определяется неоднозначно. На этом же интервале косинус монотонно убывает, следовательно, по найденному значению $\cos A$ значение A определяется однозначно. Поэтому будем вычислять $\cos A$:

$$\cos(\arcsin a+\arccos b)=\cos(\arcsin a)\cdot\cos(\arccos b)-$$
$$-\sin(\arcsin a)\cdot\sin(\arccos b)=b\sqrt{1-a^2}-a\sqrt{1-b^2}.$$

Итак, $\cos A=b\sqrt{1-a^2}-a\sqrt{1-b^2}$. Поэтому

$$A=\arccos(b\sqrt{1-a^2}-a\sqrt{1-b^2}).$$

При решении уравнений, связанных с аркфункциями, используется свойство однозначности тригонометрических функций, заключающееся в том, что равным аргументам соответствуют равные значения одноименных тригонометрических функций, если они имеют смысл для этих аргументов.

Вычисляя эти функции от аргументов, заданных в виде аркфункций, получаем более простое уравнение (например, алгебраическое). Проверка корней необходима, так как из условия равенства одноименных тригонометрических функций не всегда следует равенство их аргументов.

Пример 14. Решить уравнение $\arcsin\frac{3}{5}x+\arcsin\frac{4}{5}x=\arcsin x$.

Решение. Область допустимых значений $|x|\leqslant 1$. Приравнивая синусы правой и левой части заданного уравнения и учитывая, что $\sin(\arcsin\alpha)=\alpha$ и $\cos(\arcsin\alpha)=\sqrt{1-\alpha^2}$ при любом $-1\leqslant\alpha\leqslant 1$, получаем

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}x+\arcsin\frac{4}{5}x\right)=\sin(\arcsin x),$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}x\right)+$$

$$+\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}x\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)=\sin(\arcsin x).$$

Таким образом, имеем

$$\frac{3}{5}x\sqrt{1-\frac{16}{25}x^2}+\frac{4}{5}x\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}=x.$$

Выделяя корень $x=0$, после необходимых преобразований находим

$$25-9x^2=16,\quad x=\pm 1.$$

Итак, мы получили три корня $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 1$. Непосредственной подстановкой их в исходное уравнение убеждаемся, что все они годятся. Например, для $x=1$:

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{3}{5}=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 15. Решить уравнение $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x^2}{7}=0$.

Решение. Как легко заметить, $x>0$ не может быть корнем уравнения $\left(\text{при } x>0, \text{ очевидно, } \operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x^2}{7}>0\right)$. Переписав данное уравнение в виде

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{x^2}{7},$$

перейдем к равенству тангенсов левой и правой его части:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2}{7}\right),$$

откуда следует, что

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\cdot\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)}=-\frac{x^2}{7},$$

т. е.

$$\frac{x+\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^2}{7}.$$

Выделяя корень $x=0$, после необходимых преобразований получаем

$$(x-3)(x^2+3x+7)=0,$$

откуда находим $x=3$ (второе уравнение не имеет действительных корней). Однако это число положительно и не удовлетворяет заданному уравнению. Итак, $x=0$ — единственный корень уравнения ($\operatorname{arctg} 0+\operatorname{arctg} 0+\operatorname{arctg} 0=0=\operatorname{arctg} 0$).

Пример 16. Решить уравнение $2\arcsin x+\arccos(1-x)=0$.

Решение. Область допустимых значений — множество всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x|\leqslant 1$ и $|1-x|\leqslant 1$; отсюда следует, что $0\leqslant x\leqslant 1$.

Приглядимся к уравнению повнимательней.

Так как $0\leqslant x\leqslant 1$, то $0\leqslant 2\arcsin x\leqslant\pi$ и $0\leqslant\arccos(1-x)\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Поэтому сумма этих выражений равна нулю в том и только в том случае, когда оба слагаемые обращаются в нуль одновременно, т. е.

$$2\arcsin x=0 \text{ и } \arccos(1-x)=0.$$

Последнее выполняется только при $x=0$. Итак, $x=0$ — единственный корень этого уравнения.

Пример 17. Решить уравнение $(\arcsin x)^3+(\arccos x)^3=\pi^3$.

Решение. Используя тождество $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ и учитывая, что $a+b=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, имеем

$$\pi^3=\left(\frac{\pi}{2}\right)^3-3\frac{\pi}{2}\cdot\arcsin x\cdot\arccos x,$$

или

$$\arcsin x\cdot\arccos x=-\frac{7}{12}\pi^2. \tag{25}$$

Полагая $y=\arcsin x\left(|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ и тем самым $\arccos x=\frac{\pi}{2}-y$ [см. формулу (17)] получаем квадратное уравнение

$$y^2-\frac{\pi}{2}y-\frac{7\pi^2}{12}=0,$$

корни которого по абсолютной величине больше $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, данное уравнение не имеет решений. Заметим, что в этом можно убедиться непосредственным анализом данного уравнения.

Пример 18. Решить систему

$$\begin{cases} \arcsin x \cdot \arcsin y = \frac{\pi^2}{12}, \\ \arccos x \cdot \arccos y = \frac{\pi^2}{24}. \end{cases}$$

Решение. Выразим все аркфункции через одну, например арккосинус через арксинус. Имеем

$$\begin{cases} \arcsin x \cdot \arcsin y = \frac{\pi^2}{12}, \\ \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = \frac{\pi^2}{24}. \end{cases}$$

После упрощения второго уравнения получаем

$$\begin{cases} \arcsin x \cdot \arcsin y = \frac{\pi^2}{12}, \\ \arcsin x + \arcsin y = \frac{7\pi}{12}. \end{cases}$$

Таким образом, $\arcsin x$ и $\arccos y$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - \frac{7\pi}{12} z + \frac{\pi^2}{12} = 0.$$

Решая его, находим $z_1 = \frac{\pi}{3}$, $z_2 = \frac{\pi}{4}$.

Возвращаясь к неизвестным x и y, имеем:

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$, $\arcsin y = \frac{\pi}{4}$, откуда $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin y = \frac{\pi}{2}$; тогда $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Итак, данная система имеет два решения.

Доказательство тождеств. Пусть требуется доказать тождество $A = B$, где A и B — обратные тригонометрические функции или их комбинация.

Непосредственно (прикидкой) выделяем промежуток, в котором лежат значения A и B, а затем берем ту тригонометрическую функцию, которая монотонна на этом промежутке. Тогда из равенства значений этой функции от аргументов A и B будет следовать искомое равенство $A = B$. Например, если A и B лежат в промежутке $(0, \pi)$, то берем функцию косинус (или котангенс). Тогда из равенства $\cos A = \cos B$ (или $\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} B$) следует, что $A = B$.

Из нескольких функций, монотонных на указанном промежутке, целесообразно выбрать ту, при которой доказываемое тождество сводится к более простому.

Поясним сказанное следующими примерами.

Пример 19. Доказать тождество

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$$

Решение. Заменим данное выражение равносильным:

$$\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5},$$

или

$$\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\arccos\frac{4}{5}.$$

Оценим величину аргумента $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}$. Так как $\frac{5}{13}<\frac{1}{2}$ и $\frac{16}{65}<\frac{1}{2}$, то

$$0<\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}<\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}.$$

Итак, числа $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}$ и $\arccos\frac{4}{5}$ лежат в промежутке $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, на котором косинус изменяется монотонно.

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}\right)=\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right). \qquad (26)$$

Раскрывая косинус суммы, имеем

$$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{16}{65}\right)-\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\frac{16}{65}\right)=\frac{4}{5},$$

или

$$\sqrt{\left(1-\frac{25}{169}\right)\left(1-\frac{16^2}{65^2}\right)}-\frac{5\cdot16}{13\cdot65}=\frac{4}{5}.$$

После упрощения левой части получаем тождество $\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$. Отсюда следует, что тождество (26) также справедливо.

Пример 20. Доказать, что

$$\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}}+\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}=\frac{\pi}{2}.$$

Решение. Множество допустимых значений данного выражения состоит из всех действительных значений x, для которых

$$0\leqslant\frac{2x+1}{2}\leqslant1 \text{ и } \frac{1+2x}{1-2x}\geqslant0, \text{ т. е. } -\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}.$$

Вместо данного будем доказывать равносильное ему равенство

$$\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}},$$

или

$$\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}.$$

Оба числа $\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}}$ и $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ лежат в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, на котором тангенс изменяется монотонно. Поэтому нам достаточно доказать, что

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}}\right)=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\right).$$

Последнее вытекает из равенства $\operatorname{tg}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

Пример 21. Доказать, что $\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}-\operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}=\varphi$, где $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Оценим выражение $A=\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}-\operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}$. Так как $\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}>0$, то $0<\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}<\frac{\pi}{2}$ и $0<$ $<\operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}<\frac{\pi}{2}$. Поэтому $|A|<\frac{\pi}{2}$. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg}\alpha$ монотонно возрастает, поэтому достаточно доказать, что

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}-\operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]=\operatorname{tg}\varphi. \qquad (27)$$

Раскрывая тангенс разности двух аргументов, получаем

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\right)-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)}=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}-\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right].$$

Упрощая правую часть последнего равенства, убедимся, что она равна $\operatorname{tg}\varphi$. Итак, равенство (27) справедливо.

ГЛАВА XIII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$1)\ \sin x = a;\ 2)\ \cos x = b;\ 3)\ \operatorname{tg} x = c;\ 4)\ \operatorname{ctg} x = d.$$

Их решения легко находятся по формулам, полученным в главе XII. В самом деле, решить уравнение $\sin x = a$ это значит найти все числа x (или углы, или дуги), синус которых равен a. Все эти числа заключены в формуле

$$x = \operatorname{Arcsin} a = (-1)^n \arcsin a + \pi n.$$

Таким образом, при $|a| \leqslant 1$ уравнение имеет бесчисленное множество решений и не имеет ни одного решения при $|a| > 1$. Аналогично для уравнения $\cos x = b$ все решения заключены в формуле

$$x = \operatorname{Arccos} b = \pm \arccos b + 2\pi n, \text{ где } |b| \leqslant 1.$$

Уравнения $\operatorname{tg} x = c$ и $\operatorname{ctg} x = d$ имеют решения при любых действительных c и d. Все эти решения заключены в формулах

$$x = \operatorname{Arctg} c = \operatorname{arctg} c + \pi n$$

и

$$x = \operatorname{Arcctg} d = \operatorname{arcctg} d + \pi n$$

соответственно. Рекомендуется помнить все эти формулы и их частные случаи, когда $a = \pm 1$ и $b = 0$:

$$\text{если } \sin x = 1, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\text{если } \sin x = -1, \text{ то } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\text{если } \cos x = 0, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

К простейшим уравнениям примыкают уравнения вида

$$\sin \alpha_1 = \sin \beta_1;\quad \cos \alpha_2 = \cos \beta_2;\quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \operatorname{tg} \beta_3;\quad \operatorname{ctg} \alpha_4 = \operatorname{ctg} \beta_4,$$

где некоторые или все α_i и β_i содержат неизвестное. Из условия равенства одноименных тригонометрических функций вытекают определенные соотношения между их аргументами (см. гл. X, § 8). Так, из первого уравнения $\sin \alpha_1 = \sin \beta_1$ получаем $\alpha_1 + \beta_1 = 2\pi k + \pi$, $\alpha_1 - \beta_1 = 2\pi k$. Из второго уравнения $\cos \alpha_2 = \cos \beta_2$ вытекает, что $\alpha_2 \pm \beta_2 = 2\pi k$, и т. д.

Пример 1. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 7x$.

Решение. Из условия равенства тангенсов находим

$$7x - 3x = \pi n, \text{ т. е. } x = \frac{\pi n}{4}.$$

Из этой совокупности нужно отбросить те значения x, которые не принадлежат множеству допустимых значений данного уравнения, т. е. те, для которых $3x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ и $7x=\frac{\pi}{2}+m\pi$. Проверяя первое условие, мы видим, что нужно отбросить те значения n, для которых равенство $\frac{3\pi n}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ выполняется при целых k, или (что то же самое), те значения n, для которых $k=\frac{3n-2}{4}$ — целое число. Чтобы выделить эти значения, представим n в виде $n=4s+l$, где l принимает значения 0, 1, 2, 3. Очевидно, что всякое целое число можно представить в таком виде (см. гл. I). Тогда $k=\frac{3(4s+l)-2}{4}=3s+\frac{3l-2}{4}$ будет целым в том и только в том случае, когда $l=2$. Таким образом, при $n=4s+2$ значения $x=\frac{\pi n}{4}$ не входят в множество допустимых значений и, следовательно, не являются корнями данного уравнения.

Проверяя второе условие, мы видим, что нужно отбросить те значения n, для которых $\frac{7\pi n}{4}=\frac{\pi}{2}+m\pi$ при целом m, или $m=\frac{7n-2}{4}$ есть целое число. Представляя n в виде $n=4s+l$ ($l=0, 1, 2, 3$) находим, что m будет целым в том единственном случае, когда $l=2$, т. е. $n=4s+2$.

Итак, все решения данного уравнения содержатся в формуле $x=\frac{\pi n}{4}$, где $n\neq 4s+2$ ($s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Пример 2. Решить уравнение $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)=\frac{1}{2}$.

Решение. Сразу находим, что $\frac{5\pi}{3}\cos\pi x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, откуда $\cos\pi x=\frac{3}{5}\left((-1)^n\frac{1}{6}+n\right)$. Последнее уравнение имеет решения для тех значений n, при которых $\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{6}+n\right|\leqslant\frac{5}{3}$, т. е. при $n=0$ и $n=\pm 1$. При этих значениях n мы имеем три простейших уравнения:

1) $\cos\pi x=\frac{1}{10}$, $\pi x_1=\pm\arccos\frac{1}{10}+2\pi k$ и $x_1=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10}+2k$,

2) $\cos\pi x=\frac{1}{2}$, $\pi x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ и $x_2=\pm\frac{1}{3}+2k$,

3) $\cos\pi x=-\frac{7}{10}$, $\pi x_3=\pm\arccos\left(-\frac{7}{10}\right)+2\pi k$ и $x_3=\pm$ $\pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{10}\right)+2k$.

Отметим также тригонометрические уравнения вида $\sin^2 x=a^2$, $\cos^2 x=b^2$, $\operatorname{tg}^2 x=c^2$, $\operatorname{ctg}^2 x=d^2$, каждое из которых равносильно двум простейшим. Решая, например, уравнение $\sin^2 x=a^2$, получаем

$\sin x = a$ и $\sin x = -a$. Отсюда находим, что $x_1 = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ и $x_2 = -(-1)^n \arcsin a + \pi n$. Очевидно, обе эти формулы можно объединить в одну:

$$x = \pm \arcsin a + \pi n.$$

Итак, все решения уравнения $\sin^2 x = a^2$ содержатся в формуле $x = \pm \arcsin a + \pi n$.

Для уравнения $\cos^2 x = b^2$ получаем $\cos x = b$ и $\cos x = -b$. Отсюда находим $x_1 = \pm \arccos b + 2\pi n$ и $x_2 = \pm \arccos(-b) + 2\pi n$. Учитывая что $\arccos(-b) = \pi - \arccos b$, получим $x_2 = \pm \arccos b + \pi(2n+1)$. Сравнивая формулы для x_1 и x_2, мы видим, что их можно объединить в одну:

$$x = \pm \arccos b + \pi k,$$

где k — любое целое число. При $k = 2n$ получаем x_1, при $k = 2n+1$ получаем x_2.

Итак, все решения уравнения $\cos^2 x = b^2$ содержатся в формуле $x = \pm \arccos b + \pi k$.

Аналогично получаем, что все решения уравнения $\operatorname{tg}^2 x = c^2$ содержатся в формуле $x = \pm \operatorname{arctg} c + \pi k$, а решения уравнения $\operatorname{ctg}^2 x = d^2$ — в формуле $x = \pm \operatorname{arcctg} d + \pi k$.

Если уравнение не является простейшим, то с помощью тождественных преобразований его нужно свести к одному или нескольким простейшим. При этом (еще раз предостерегаем читателя!) по возможности нужно избегать тех преобразований, которые нарушают равносильность. В случае неизбежности таких преобразований необходимо провести соответствующие исследования (см. гл. III, § 1 и 2).

§ 2. СВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ К ПРОСТЕЙШИМ С ПОМОЩЬЮ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В этом параграфе приведен ряд тригонометрических уравнений, решение которых основано на известных уже тождественных преобразованиях (см. гл. XI).

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0.$$

Решение. Сгруппируем первый член с третьим, второй с четвертым и каждую группу свернем в произведение. Имеем

$$(\cos 10x - \cos 6x) + (1 - \cos 8x) = 0,$$
$$-2 \sin 8x \cdot \sin 2x + 2 \sin^2 4x = 0.$$

Чтобы получить общий множитель, развернем $\sin 8x$ по формуле двойного аргумента:

$$-4 \sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \sin 2x + 2 \sin^2 4x = 0.$$

Один из множителей второго слагаемого ($\sin 4x$) также развернем по

формуле двойного аргумента:

$$-4\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot\sin 2x+4\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\sin 4x=0,$$
$$\sin 4x\cdot\sin 2x(\cos 4x-\cos 2x)=0.$$

Последнее уравнение распадается на три уравнения:

$$\sin 4x=0,\ \sin 2x=0,\ \cos 4x=\cos 2x.$$

Решая каждое из них, находим

$$4x_1=\pi n \text{ и } x_1=\frac{\pi n}{4};\ 2x_2=\pi n \text{ и } x_2=\frac{\pi n}{2};$$

$$4x_3+2x_3=2\pi n \text{ и } x_3=\frac{\pi n}{3};\ 4x_4-2x_4=2\pi n \text{ и } x_4=\pi n.$$

Если решение тригонометрического уравнения получено в виде нескольких формул, то необходимо проверить, не повторяют ли эти формулы одни и те же значения x. Так в нашем случае $x_2=\frac{\pi n}{2}$ содержатся в формуле $x_1=\frac{\pi n}{4}$, а $x_4=\pi n$ содержатся в формуле $x_3=\frac{\pi n}{3}$ или в x_1. Значит формулы $x_2=\frac{\pi n}{2}$ и $x_4=\pi n$ не дают ничего нового по сравнению с x_3 и x_4 (они входят в них). Поэтому лишние формулы нужно отбросить, и мы окончательно получаем $x_1=\frac{\pi n}{4}$, $x_2=\frac{\pi n}{3}$. Заметим при этом, что некоторые решения входят как в первую, так и во вторую формулу и можно было бы продолжать «изъятие» повторяющихся решений. Однако это уже не столь важно и можно эти «изъятия» не проделывать.

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x).$$

Решение. Переходя от аргумента $2x$ к аргументу x и вынося за скобки общий множитель $\cos x+\sin x$, имеем

$$(\sin x+\cos x)\left(\cos x-\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Данное уравнение распадается на два уравнения

$$\sin x+\cos x=0,\ \text{т. е. } \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$$

(см. гл. X, § 7), и

$$\cos x-\sin x=\frac{\sqrt{3}+1}{2},\ \text{т. е. } \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$$

$\left(\text{так как } \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\right)$.

Из уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$ находим $\frac{\pi}{4}+x_1=\pi n$ и $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n$.

Из уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\frac{\pi}{12}$ следует, что

$$\frac{\pi}{4}+x_2+\frac{\pi}{12}=2\pi n \text{ и } \frac{\pi}{4}+x_3-\frac{\pi}{12}=2\pi n,$$

откуда $x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$ и $x_3=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$.

Итак, все решения данного уравнения содержатся в формулах

$$x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad x_3=-\frac{\pi}{6}+2\pi n.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x.$$

Решение. Преобразуя сумму тангенсов в произведение и перенося $\operatorname{tg}3x$ в левую часть уравнения, имеем

$$\frac{\sin 3x}{\cos x\cdot\cos 2x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0.$$

После приведения к общему знаменателю и отбрасывания последнего получаем уравнение

$$\sin 3x\cdot\cos 3x-\sin 3x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=0, \qquad (*)$$

равносильное данному при условии, что

$$\cos x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0 \text{ и } \cos 3x\neq 0.$$

Уравнение (*) равносильно, в свою очередь, совокупности двух уравнений

$$\sin 3x=0 \text{ и } \cos 3x-\cos x\cdot\cos 2x=0.$$

Решая первое из них, получаем $3x_1=\pi n$ и $x_1=\frac{\pi n}{3}$. Во втором уравнении произведение $\cos x\cdot\cos 2x$ преобразуем в сумму. Получаем

$$\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)-\cos 3x=0, \text{ или } \cos 3x=\cos x.$$

Отсюда следует, что $3x\pm x=2\pi n$, т. е. $x_2=\pi n$ и $x_3=\frac{\pi n}{2}$. Анализируя полученные формулы для x_1, x_2 и x_3, замечаем, что x_1 и x_2 входят во множество допустимых значений данного уравнения при всех целых значениях n, а из x_3 нужно исключить углы $x_3'=\frac{\pi(2k+1)}{2}=\pi k+\frac{\pi}{2}$, для которых $\cos x_3'=0$ $(n=2k+1)$.

Если же $n=2k$, то углы $\frac{\pi\cdot 2k}{2}=\pi k$ входят в формулу для x_2. Таким образом, все решения данного уравнения содержатся в формуле $x_1=\frac{\pi n}{3}$.

В следующих уравнениях при преобразовании к произведению целесообразно ввести вспомогательный аргумент.

Пример 4. Решить уравнение

$$a\sin x+b\cos x=c,\ a>0,\ b\neq 0.$$

Решение. Представляя левую часть уравнения в виде $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, где $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (см. гл. X, § 7), имеем

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Это простейшее уравнение имеет решение, если $|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$, т. е. $c^2\leqslant a^2+b^2$. При этом условии

$$x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n$$

и $x=-\varphi+(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n$. Так как $\cos\varphi>0$, то аргумент φ можно брать в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда решение уравнения $a\sin x+b\cos x=c$ запишется формулой

$$x=-\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n.$$

Замечание. Ограничение $a>0$ несущественно, так как заменой знаков членов уравнения всегда можно сделать коэффициент при $\sin x$ положительным.

Пример 5. Решить уравнение

$$4\sin(2x+20^\circ)-\cos(2x+200^\circ)=3.$$

Решение. Замечая, что $\cos(2x+200^\circ)=-\cos(2x+20^\circ)$, имеем

$$4\sin(2x+20^\circ)+\cos(2x+20^\circ)=3,$$

$$\sqrt{17}\sin(2x+20^\circ+\varphi)=3,\ \text{где}\ \varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Итак, мы получили простейшее уравнение

$$\sin(2x+20^\circ+\varphi)=\frac{3}{\sqrt{17}},$$

откуда находим, что

$$2x+20^\circ+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}+\pi n,$$

$$x=-\frac{\pi}{18}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}+\frac{\pi}{2}n.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+5\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Решение. Учитывая, что $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6}\right)=$ $=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, перепишем уравнение, сгруппировав при этом первые два члена:

$$\left[3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]+5\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Преобразуя содержимое квадратной скобки в произведение, получаем

$$5\sin\left(x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)+5\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0,$$

где $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$. Отсюда следует, что

$$\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x-\varphi\right),$$

т. е.

$$5x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x-\varphi=\pi+2\pi n$$

и

$$5x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+x+\varphi=2\pi n.$$

Решая эти уравнения относительно x, находим

$$x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi n}{2}$$

и

$$x_2=\frac{\pi}{36}-\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{36}-\frac{1}{6}\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi n}{3}.$$

В следующих уравнениях перед преобразованием суммы в произведение полезно понизить показатели степени функции синус и косинус.

Пример 7. Решить уравнение

$$2\cos^2(80^\circ-x)+\cos 2x=1+\sin 20^\circ.$$

Решение. Понижая вторую степень косинуса, имеем

$$1+\cos(160^\circ-2x)+\cos 2x=1+\sin 20^\circ.$$

Свертывая сумму косинусов в произведение, получаем

$$2\cos 80^\circ\cdot\cos(80^\circ-2x)=\sin 20^\circ,$$

или

$$2\sin 10^\circ\cdot\cos(80^\circ-2x)=2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ.$$

Отсюда следует, что $\cos(80^\circ-2x)=\cos 10^\circ$, т. е. $80^\circ-2x\pm 10^\circ=$ $=360^\circ\cdot n$.

Итак, $x_1=45^\circ+180^\circ\cdot n$, $x_2=35^\circ+180^\circ\cdot n$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\cos\frac{4}{3}x+\sin^2\frac{3}{2}x+2\sin^2\frac{5}{6}x=\cos^2\frac{3}{2}x.$$

Решение. Понижая вторые степени и приводя подобные члены, имеем

$$\cos\frac{4}{3}x-\cos 3x-\cos\frac{5}{3}x+1=0.$$

Группируем первый член с третьим, второй с четвертым и каждую группу преобразуем в произведение. Получаем

$$2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{6}-2\sin^2\frac{3x}{2}=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\sin\frac{3}{2}x=0 \text{ и } \sin\frac{x}{6}=\sin\frac{3}{2}x.$$

Решая первое, находим

$$\frac{3}{2}x=\pi n,\quad x_1=\frac{2\pi n}{3}.$$

Из второго следует, что

$$\frac{x}{6}+\frac{3x}{2}=\pi+2\pi n$$

и

$$\frac{x}{6}-\frac{3x}{2}=2\pi n,$$

т. е.

$$x_2=\frac{3\pi}{5}+\frac{6\pi n}{5},\quad x_3=\frac{3\pi n}{2}.$$

В следующих уравнениях выделяем тригонометрическую единицу $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^k$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3-\cos 6x}{4}.$$

Решение. Выделяя в левой части полный квадрат, имеем

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3-\cos 6x}{4},$$

или

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3-\cos 6x}{4}.$$

Понижаем степень синуса и после очевидных преобразований получаем уравнение $\cos 6x=-\cos 4x$, или $\cos 6x=\cos(\pi-4x)$, откуда находим, что $6x\pm(\pi-4x)=2\pi n$. В первом случае имеем $2x_1=$

$= -\pi + 2\pi n$ и $x_1 = -\frac{\pi}{2} + \pi n$. Во втором случае: $10x_2 = \pi + 2\pi n$ и $x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x - 2\sin 4x + \frac{3}{4}\sin^2 4x = 0.$$

Решение. Дополняя $\sin^4 2x + \cos^4 2x$ до полного квадрата, получаем

$$(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cdot \cos^2 2x - 2\sin 4x + \frac{3}{4}\sin^2 4x = 0,$$

или

$$1 + \frac{1}{4}\sin^2 4x - 2\sin 4x = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $\sin 4x$. Решая его, находим $\sin 4x = 4 - 2\sqrt{3}$ (корень $4 + 2\sqrt{3} > 1$ — не годится). Следовательно, $4x = (-1)^n \arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \pi n$ и

$$x = \frac{(-1)^n}{4}\arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \frac{\pi n}{4}.$$

Пример 11. Решить уравнение

$$\sin^6 \frac{2x-3}{2} + \cos^6 \frac{2x-3}{2} = \frac{7}{16}.$$

Решение. Используя тождество $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, где $a = \sin^2 \frac{2x-3}{2}$, $b = \cos^2 \frac{2x-3}{2}$, и учитывая, что $a + b = 1$, имеем

$$1 - 3\sin^2 \frac{2x-3}{2}\cos^2 \frac{2x-3}{2} = \frac{7}{16}, \text{ или } \sin^2(2x-3) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Решая последнее уравнение (см. § 1), находим

$$2x - 3 = \pm \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \text{ и } x = \frac{3}{2} \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}.$$

Если уравнение содержит произведение тригонометрических функций, то иногда целесообразно это произведение преобразовать в сумму.

Пример 12. Решить уравнение

$$\cos 7\pi x \cdot \sin 6\pi x = \cos 5\pi x \cdot \sin 8\pi x.$$

Решение. Раскладывая каждое произведение в алгебраическую сумму, получаем

$$\frac{1}{2}(\sin 13\pi x - \sin \pi x) = \frac{1}{2}(\sin 13\pi x + \sin 3\pi x),$$

или

$$\sin 3\pi x = \sin(-\pi x).$$

Из последнего уравнения следует, что $3\pi x - \pi x = \pi + 2\pi n$ и $3\pi x + \pi x = 2\pi n$. Таким образом $x_1 = \frac{1}{2} + n$ и $x_2 = \frac{n}{2}$. Легко заметить, что первая формула получается из второй, если в последней n — нечетное. Поэтому окончательно можно записать $x = \frac{n}{2}$.

Пример 13. Решить уравнение

$$\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} - \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Записав уравнение в виде

$$\cos x \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2}\right) - \sin x \left(\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

преобразуем содержимое каждой скобки в алгебраическую сумму. Тогда

$$\frac{1}{2} \cos x (\cos 2x + \cos x) - \frac{1}{2} \sin x (\cos x - \cos 2x) = \frac{1}{2},$$

или

$$\cos 2x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x = 1.$$

Если каждое произведение вновь преобразовать в сумму, то полученный результат не будет содержать подобных членов и уравнение усложнится. Лучше заменить $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$ и сгруппировать полученные члены:

$$(\cos 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x) - \sin x (\cos x + \sin x) = 0,$$

что дает

$$(\cos 2x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0.$$

Итак, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 2x - \sin x = 0 \text{ и } \cos x + \sin x = 0.$$

Решая первое, находим $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и $2x \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\pi n$, откуда получаем, что $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$.

Из второго уравнения находим, что $x_3 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

Пример 14. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(40^\circ + x) \cdot \operatorname{ctg}(5^\circ - x) = \frac{2}{3}.$$

Решение. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых $\sin(5^\circ - x) \neq 0$ и $\cos(40^\circ + x) \neq 0$. Переходя в левой части уравнения к функциям синус и косинус и преобразуя числитель и зна-

менатель в сумму, получаем уравнение

$$3\,[\sin 45^\circ + \sin(35^\circ + 2x)] = 2\,[\sin 45^\circ - \sin(35^\circ + 2x)],$$

равносильное данному на его множестве допустимых значений.

Последнее уравнение сводится к простейшему $\sin(35^\circ + 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, откуда находим, что

$$x = -\frac{7\pi}{72} - \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) + \frac{\pi}{2}\cdot n.$$

Пример 15. Решить уравнение

$$4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5x + \frac{1+\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x} = \cos 6x + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x.$$

Решение. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x \neq 0$.

Прежде чем переходить к решению уравнения, упростим выражение

$$A = \frac{1+\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x}.$$

Имеем

$$1 + \operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg} x = \frac{\cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x}{\cos 2x\cdot\cos x} = \frac{\cos x}{\cos 2x\cdot\cos x} = \frac{1}{\cos 2x},$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Поэтому $A = \frac{\sin 2x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$.

Заменяя A полученным значением, после приведения подобных членов имеем

$$4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5x = \cos 6x.$$

Переходя в левой части от произведения к сумме, находим

$$2\cos 2x\,(\cos 6x + \cos 4x) = \cos 6x,$$

$$2\cos 2x\cdot\cos 6x + 2\cos 2x\cdot\cos 4x = \cos 6x.$$

Второе слагаемое преобразуем в сумму:

$$2\cos 2x\cos 6x + \cos 6x + \cos 2x = \cos 6x,$$

откуда

$$2\cos 6x\cdot\cos 2x + \cos 2x = 0.$$

Это уравнение распадается на два простейших: $\cos 2x = 0$ и $\cos 6x = -\frac{1}{2}$. Однако решения первого уравнения не входят во множество допустимых значений данного уравнения и их надо отбросить. Остается лишь второе уравнение $\cos 6x = -\frac{1}{2}$, корни которого

содержатся в формуле

$$x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

При решении уравнения нужно знать его множество допустимых значений, чтобы не получить лишних корней, как это могло случиться в предыдущем примере.

Рассмотрим еще одно уравнение, при решении которого неопытный учащийся может допустить подобную ошибку.

Пример 16. Решить уравнение

$$2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$$

Решение. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых $\sin 2x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$ и $\cos 2x \neq 0$. Переписав уравнение в виде

$$2 (\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x,$$

переходим к синусам и косинусам в его левой и правой частях. Получаем уравнение

$$\frac{\sin x}{\sin 2x \cdot \sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin 3x \cdot \cos 2x},$$

которое равносильно уравнению

$$\sin x \cdot \cos 2x = \cos x \cdot \sin 2x, \text{ или } \sin x = 0$$

при указанных ограничениях.

Однако корни уравнения $\sin x = 0$ не входят в множество допустимых значений данного уравнения и, следовательно, не являются его решениями.

Итак, данное уравнение не имеет решений.

В заключение этого параграфа приведем следующие полезные примеры.

Пример 17. Решить уравнение

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \cos 2x = 1.$$

Решение. Так как $\left|\sin \frac{x}{2}\right| \leqslant 1$ и $|\cos 2x| \leqslant 1$, то левая часть уравнения равна единице тогда и только тогда, когда одновременно

$$\text{либо (а)} \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 1, \\ \cos 2x = 1, \end{cases} \quad \text{либо (б)} \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = -1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$$

В случае (а) из первого уравнения находим, что $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, т. е. $x = \pi + 4\pi n$. Из этих значений x нужно выбрать такие, которые одновременно удовлетворяют и второму уравнению. Подставляя эти значения x в левую часть второго уравнения, получаем $\cos 2(\pi + 4\pi n) = \cos 2\pi = 1$.

Таким образом, значения $x=\pi+4\pi n$ являются решением нашего уравнения.

В случае (б) из первого уравнения находим, что $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, откуда $x=-\pi+4\pi n$. Подставляя эти значения в левую часть второго уравнения, имеем

$$\cos 2(-\pi+4\pi n)=\cos 2\pi=1.$$

Последнее означает, что $x=-\pi+4\pi n$ не является решением системы (б), следовательно, и данного уравнения.

Пример 18. Решить уравнение

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=n.$$

Решение. Так как $|\sin kx|\leqslant 1$ при любом k, а число слагаемых равно n, то левая часть данного уравнения равна n в том единственном случае, когда каждое слагаемое равно 1, т. е. $\sin x=1$, $\sin 2x=1$, $\sin 3x=1$, ..., $\sin nx=1$. Решая первое уравнение, находим, что $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Однако эти значения не обращают в единицу уже второе слагаемое $\sin 2x$, так как $\sin 2\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]=0$ при любом k. Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Пример 19. Решить уравнение

$$\sin^9 x+\cos^9 x=1.$$

Решение. Левая часть уравнения может быть равна единице в том единственном случае, когда

$$\text{либо (а)}\ \begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=1,\end{cases}\quad \text{либо (б)}\ \begin{cases}\sin x=1,\\ \cos x=0.\end{cases}$$

В самом деле, складывая очевидные неравенства $\sin^9 x\leqslant\sin^2 x$, $\cos^9 x\leqslant\cos^2 x$, получаем $\sin^9 x+\cos^9 x\leqslant 1$. В последнем неравенстве равенство достигается для тех значений x, для которых оно достигается одновременно в исходных неравенствах, т. е. когда $\sin x=0$ и $\cos x=1$ или $\sin x=1$, а $\cos x=0$. Таким образом, наше уравнение равносильно двум системам (а) и (б), каждая из которых содержит одно неизвестное.

Решая систему (а), находим, что $x=2\pi n$. Решая систему (б), находим, что $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$. Итак, все решения данного уравнения содержатся в формулах $x_1=2\pi n$ и $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

Пример 20. Решить уравнение

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin 3x+5.$$

Решение. Преобразуя левую часть уравнения в произведение, имеем

$$4\sin^2 x\cdot\sin^2 3x=\sin 3x+5. \qquad (*)$$

Так как при любых x справедливы неравенства $4\sin^2 x\cdot\sin^2 3x\leqslant 4$ и $\sin 3x+5\geqslant 4$, то равенство (*) возможно лишь для тех значений x, для которых одновременно

$$4\sin^2 x\cdot\sin^2 3x=4 \text{ и } \sin 3x+5=4.$$

Итак, наше уравнение равносильно системе двух уравнений с одним неизвестным

$$\begin{cases}\sin^2 x=1,\\ \sin 3x=-1.\end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Подставляя эти значения в левую часть второго уравнения, получаем

$$\sin 3x=\sin\left(3\frac{\pi}{2}+3\pi n\right)=\begin{cases}-1, & \text{если } n=2k,\\ 1, & \text{если } n=2k+1.\end{cases}$$

Отсюда мы видим, что решения первого уравнения $\sin^2 x=1$ удовлетворяют второму лишь при $n=2k$. Итак, все решения данного уравнения заключены в формуле $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

§ 3. СВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К РАЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Пусть тригонометрическое уравнение приведено к одному аргументу, т. е. все тригонометрические функции, входящие в уравнение, содержат один и тот же аргумент α. Тогда все тригонометрические функции могут быть выражены через какую-либо одну, и мы получаем уравнение с одним неизвестным. Такой метод решения целесообразен в том случае, когда в результате всех преобразований получается рациональное уравнение невысокой степени, равносильное данному (или мы можем указать условия, при которых полученное уравнение равносильно данному).

Пример 1. Решить уравнение

$$(2\sin^2 x+5\sin x+1)\operatorname{ctg} x=4\sec x(1+\sin x).$$

Решение. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых $\sin x\neq 0$ и $\cos x\neq 0$. Поэтому, переходя к функциям $\sin x$ и $\cos x$, после приведения к общему знаменателю получаем уравнение

$$(2\sin^2 x+5\sin x+1)\cos^2 x=4\sin x(1+\sin x),$$

равносильное данному на его множестве допустимых значений. Перейдем к одной функции. Для этого $\cos^2 x$ заменяем на $1-\sin^2 x$ и получаем

$$(2\sin^2 x+5\sin x+1)(1-\sin^2 x)=4\sin x(1+\sin x),$$

или

$$(1+\sin x)(2\sin^3 x+3\sin^2 x-1)=0. \qquad (*)$$

Так как $\cos x\neq 0$, то $1+\sin x\neq 0$ и уравнение (*) равносильно уравнению $2\sin^3 x+3\sin^2 x-1=0$. Левая часть последнего уравнения раскладывается на множители:

$$(1+\sin x)(2\sin^2 x+\sin x-1)=0,$$

и мы получаем еще более простое уравнение $2\sin^2 x+\sin x-1=0$, равносильное данному при указанных ограничениях.

Итак, мы пришли к квадратному уравнению относительно функции $\sin x$. Решая его, находим $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$ и $\sin x=-1$. Корни последнего уравнения не входят во множество допустимых значений данного уравнения.

Укажем несколько приемов, сводящих тригонометрическое уравнение к рациональному.

I. **Общий метод рационализации.** Всякое тригонометрическое уравнение, рациональное* относительно всех входящих в него тригонометрических функций одного и того же допустимого аргумента α, приводится к рациональному уравнению с одним неизвестным.

В самом деле, все тригонометрические функции аргумента α рационально выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha\neq\pi+2\pi k$ (см. гл. X, § 5):

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Производя в данном уравнении эту замену, мы получаем рациональное уравнение отнюсительно неизвестного $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Дальнейшее решение полученного уравнения подробно рассмотрено в курсе алгебры (см. гл. III, § 4). Однако, решая уравнение таким методом, мы можем потерять корни вида $\alpha=\pi+2\pi k$, для которых вышеуказанная замена не имеет смысла. Поэтому, при решении уравнения этим методом, необходимо проверить, являются ли числа $\pi+2\pi k$ корнями данного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$3\sin x-2\cos x=2.$$

---

* Это означает, что тригонометрические функции аргумента α, входящие в уравнение, связаны операциями сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Решение. Это уравнение можно решить методом введения вспомогательного угла (см. пример 4, § 2).

Укажем другой путь его решения.

Предполагая, что $x \neq \pi + 2\pi n$, выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Получим уравнение

$$3 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2,$$

которое после приведения к общему знаменателю и дальнейших упрощений примет вид

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда находим, что $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n$. Остается проверить, будут ли числа $x = \pi + 2\pi n$ удовлетворять исходному уравнению. Подставляя их в левую часть этого уравнения:

$$3 \sin (\pi + 2\pi n) - 2 \cos (\pi + 2\pi n) = -2 \cos \pi = 2,$$

убеждаемся, что они также ему удовлетворяют.

Итак, все корни данного уравнения заключены в формулах

$$x_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n \text{ и } x_2 = \pi + 2\pi n.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin 4x + \operatorname{tg} 2x = 2.$$

Решение. Выражая $\sin 4x$ через $\operatorname{tg} 2x$, получаем уравнение

$$\frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} + \operatorname{tg} 2x = 2,$$

равносильное данному, которое после очевидных упрощений приводится к кубическому уравнению относительно $\operatorname{tg} 2x$:

$$\operatorname{tg}^3 2x - 2 \operatorname{tg}^2 2x + 3 \operatorname{tg} 2x - 2 = 0.$$

Левая часть этого уравнения раскладывается на множители:

$$(\operatorname{tg} 2x - 1)(\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x + 2) = 0.$$

Решая уравнение $\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$, находим $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. Второе уравнение $\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x + 2 = 0$ не имеет действительных корней.

Заметим, что общий метод рационализации не всегда является приемлемым. Часто он приводит к рациональным уравнениям высоких степеней. Так, решая этим методом уравнение $2 \sin 2x =$

$= 3(\sin x + \cos x)$, получаем уравнение $3z^4 + 10z^3 - 2z - 3 = 0$ $\left(z = \right.$ $\left. = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, которое не имеет рациональных корней (см. гл. III, § 10). Решение этого уравнения другим методом будет приведено в п. III этого параграфа.

II. **Однородные тригонометрические уравнения и приводящиеся к ним.** Тригонометрическое уравнение вида

$$A_0 \cos^n x + A_1 \cos^{n-1} x \cdot \sin x + A_2 \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x + \ldots + A_n \sin^n x = 0 \quad (2)$$

называется *однородным* уравнением относительно функций $\sin x$ и $\cos x$. Степень его однородности равна n.

Будем в дальнейшем это уравнение называть просто однородным. Так, например, уравнение $\sin x + 3\cos x = 0$ является однородным (1-й степени однородности), а уравнение $\sin 2x + \cos x = 0$ неоднородно, что ясно после приведения к одному аргументу x:

$$2 \sin x \cdot \cos x + \cos x = 0.$$

Предположим, что коэффициенты $A_0 \neq 0$ и $A_n \neq 0$. В этом случае решениями уравнения (2) не могут быть те значения x, для которых $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$.

Допустим противное. Пусть $\sin x = 0$. При этом $\cos x = \pm 1$. Тогда из уравнения (2) получаем, что $A_0 \cos^n x = 0$ и так как $A_0 \neq 0$, то $\cos x = 0$. Получилось противоречие. Аналогично доказывается, что $\cos x \neq 0$. А если это так, то, разделив уравнение (2) на $\cos^n x$ или $\sin^n x$, мы получаем уравнения

$$A_0 \operatorname{tg}^n x + A_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + A_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + A_n = 0 \quad (3)$$

или

$$A_0 + A_1 \operatorname{ctg} x + A_2 \operatorname{ctg}^2 x + \ldots + A_n \operatorname{ctg}^n x = 0, \quad (4)$$

равносильные данному. Уравнения (3) и (4) являются р а ц и о н а л ь н ы м и относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$ соответственно.

В том случае, когда коэффициенты A_0 или A_n обращаются в нуль, левая часть уравнения (2) раскладывается на множители. Приравнивая нулю каждый из них, получаем два уравнения, из которых одно простейшее $\cos x = 0$ (или $\sin x = 0$), а другое однородное, сводящееся к уравнениям (3) или (4).

Умножением на тригонометрическую единицу $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$ можно привести к однородному некоторые уравнения, не являющиеся однородными. Например, неоднородное уравнение $\sin x \cos x + \sin^2 x - 3\cos^2 x = 5$ приводится к однородному

$$\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x - 3\cos^2 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

или

$$\sin x \cdot \cos x - 4\sin^2 x - 8\cos^2 x = 0.$$

Уравнение $\sin x + \cos 2x \cdot \cos x = 0$, не являющееся однородным, приводится к однородному уравнению

$$\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x = 0$$

и т. д.

Пример 4. Решить уравнение

$$a(\sin x+\cos x)=b(\cos x-\sin x).$$

Решение. Уравнение является однородным. Разделив все его члены на $\cos x$, получаем равносильное данному простейшее уравнение

$$(a+b)\operatorname{tg} x=b-a.$$

Пусть $a+b\neq 0$. Тогда $\operatorname{tg} x=\frac{b-a}{b+a}$ и $x=\operatorname{arctg}\frac{b-a}{b+a}+\pi k$. Если $a+b=0$, то данное уравнение является также простейшим: $\cos x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sin^3 2x+\cos 2x\cos 4x=3\sin 2x\cdot\cos^2 2x-\cos 2x.$$

Решение. Переходя к одному аргументу $2x$, имеем уравнение

$$\sin^3 2x+\cos 2x=3\sin 2x\cdot\cos^2 2x(1+\cos 4x),$$

или

$$2\cos^3 2x-3\sin 2x\cdot\cos^2 2x+\sin^3 2x=0,$$

которое равносильно уравнению $\operatorname{tg}^3 2x-3\operatorname{tg} x+2=0$. Последнее распадается на два: $\operatorname{tg} 2x-1=0$ и $\operatorname{tg} 2x+2=0$. Решая их, находим

$$x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2} \text{ и } x_2=-\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}+\frac{\pi n}{2}.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin(x+5)+\cos(x-2)=\cos(x+7).$$

Решение. Уравнение имеет «страшный» вид. Однако это однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$. Раскрывая синус суммы и косинус суммы и разности и группируя члены, имеем

$$\sin x(\cos 5+\sin 2+\sin 7)+\cos x(\sin 5+\cos 2-\cos 7)=0.$$

Так как $\cos 5>0$, $\sin 2>0$ и $\sin 7>0$, то $\cos 5+\sin 2+\sin 7>0$ и последнее уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x=\frac{\cos 7-\sin 5-\cos 2}{\sin 2+\cos 5+\sin 7},$$

откуда получаем

$$x=\operatorname{arctg}\frac{\cos 7-\sin 5-\cos 2}{\sin 2+\cos 5+\sin 7}+\pi n.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$m^2(\cos x-\sin x)=\sqrt{1+2\sin x\cdot\cos x}.$$

Решение. Так как

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

а

$$1+2\sin x\cdot\cos x=(\sin x+\cos x)^2=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

то данное уравнение можно записать в виде

$$m^2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Последнее равносильно совокупности двух уравнений:

(а) $m^2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ при условии, что $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$

и

(б) $m^2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ при условии, что $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$,

причем оба уравнения однородные.

Решая уравнение (а), находим, что $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=m^2$, $x=-\frac{\pi}{4}+$ $+\operatorname{arctg}m^2+\pi n$. При $n=2k$ аргумент $x+\frac{\pi}{4}$ оканчивается в I четверти, где $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$. При $n=2k+1$ аргумент $x+\frac{\pi}{4}$ оканчивается в III четверти, где $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$. Следовательно, $n=2k+1$ не подходит, т. е. $x=-\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}m^2+2\pi k$. Решая уравнение (б), находим, что $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-m^2$, $x=-\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}m^2+\pi n$. При $n=2k$ аргумент $x+\frac{\pi}{4}$ оканчивается в IV четверти, где $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$. При $n=2k+1$ аргумент $x+\frac{\pi}{4}$ оканчивается во II четверти, где $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$. Следовательно, $n=2k+1$ не подходит, т. е. $x=-\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}m^2+2\pi k$.

Итак, все решения данного уравнения заключены в формулах:

$$x_1=-\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}m^2+2\pi n \quad\text{и}\quad x_2=-\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}m^2+2\pi n.$$

Очевидно, обе эти формулы можно объединить в одну:

$$x=-\frac{\pi}{4}\pm\operatorname{arctg}m^2+2\pi n.$$

III. **Уравнения, рациональные относительно выражений $\sin x+\cos x$ и $\sin x\cdot\cos x$.** Такие уравнения можно записать формулой $R(\sin x+\cos x,\ \sin x\cdot\cos x)=0$, где буква R обозначает, что над аргументами $\sin x+\cos x$ и $\sin x\cdot\cos x$ (рассмотренными как единые),

производятся лишь рациональные операции (см. гл. III, § 4). Обозначая $\sin x+\cos x=u$, из тождества $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cdot\cos x$ находим, что $\sin x\cdot\cos x=\frac{u^2-1}{2}$. Заменяя в уравнении $R(\sin x+\cos x, \sin x\cdot\cos x)=0$ величины $\sin x+\cos x$ и $\sin x\cdot\cos x$ их выражениями через u, получаем $R\left(u, \frac{u^2-1}{2}\right)=0$. Последнее уравнение является, очевидно, рациональным относительно u. Найдя из него u, решаем уравнение $\sin x+\cos x=u$, или $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{u}{\sqrt{2}}$, где u — известная величина.

Замечание. Если после нахождения u искать x из уравнения $\sin x\cdot\cos x=u$, то среди последних могут оказаться лишние корни, так как этому уравнению будут удовлетворять и все корни уравнения $\sin x+\cos x=-u$.

Аналогично решаются уравнения $R(\sin x-\cos x, \sin x\cdot\cos x)=0$. Обозначая $\sin x-\cos x=u$, находим, что $\sin x\cdot\cos x=\frac{1-u^2}{2}$, и т. д.

Пример 8. Решить уравнение

$$a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cdot\cos x=c.$$

Решение. Обозначая $\sin x+\cos x=u$, получаем $\sin x\cos x=\frac{u^2-1}{2}$, откуда

$$a\cdot u-\frac{b}{2}(1-u^2)=c,$$

или

$$bu^2+2au-(b+2c)=0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$u=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+b(b+2c)}}{b}$$

при условии, что $b\neq 0$ и $a^2+b^2+2bc\geqslant 0$. Очевидно, что данное уравнение имеет решение, если выполнены указанные условия и, кроме того, $|u|\leqslant\sqrt{2}$.

Рассматривая, в частности, уравнение $2\sin 2x=3(\sin x+\cos x)$, имеем: $3u-2(u^2-1)=0$, $u_1=-\frac{1}{2}$, $u_2=2$ (не подходит). Следовательно, $\sin x+\cos x=-\frac{1}{2}$, или $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Отсюда находим, что $x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+2\pi n$ и

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+2\pi n.$$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sec x+\operatorname{cosec} x+\sec x\cdot\operatorname{cosec} x=5.$$

Р е ш е н и е. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. При этих условиях данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x + \cos x - 5 \sin x \cdot \cos x + 1 = 0.$$

Заменой $\sin x + \cos x = u$ сводим это уравнение к квадратному $5u^2 - 2u - 7 = 0$, корни которого равны -1 и $\frac{7}{5}$. Итак, наше уравнение свелось к двум уравнениям: $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$ и $\sin x + \cos x = -1$. Решая первое, находим

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{5\sqrt{2}} \text{ и } x_1 = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{7}{5\sqrt{2}} + 2\pi n.$$

Решая второе, находим

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$

Однако значения x_2 не являются решениями данного уравнения.

Пример 10. Решить уравнение

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x + \cos x - 2} = \frac{4(\sin x + \cos x)}{9 - 3\sin 2x}.$$

Р е ш е н и е. Заменой $\sin x + \cos x = u$ сводим данное уравнение к рациональному

$$\frac{u-1}{u-2} = \frac{4u}{9 + 3(1 - u^2)}.$$

Решая последнее, находим: $u_1 = \frac{2}{3}$ и $u_2 = -3$ (не подходит). Итак, данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x + \cos x = \frac{2}{3}, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3\sqrt{2}},$$

откуда находим, что

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{2}{3\sqrt{2}} + 2\pi n.$$

В некоторых случаях выгодно производить замену аргумента. Покажем это на следующем примере.

Пример 11. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Р е ш е н и е. Обозначая $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = y$, перепишем уравнение в виде: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) = \operatorname{tg}^3 y$, или $\operatorname{ctg} 2y = \operatorname{tg}^3 y$ $(2y \neq \pi n)$.

Переходя к функции $\operatorname{tg} y$, получаем биквадратное уравнение

$$2\operatorname{tg}^4 y + \operatorname{tg}^2 y - 1 = 0,$$

решая которое, находим: $\operatorname{tg} y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{3,4}$—мнимые. Следовательно, $y=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n$. Возвращаясь к x, получаем

$$x=\frac{\pi}{2}-2y=\frac{\pi}{2}\mp 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n.$$

§ 4. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении систем тригонометрических уравнений, последние сводят либо к одному уравнению с одним неизвестным, либо к алгебраической системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов. Все эти приемы проиллюстрируем на следующей системе двух уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Множество допустимых значений этой системы—все действительные числа, кроме $\frac{\pi}{2}+\pi n$.

I способ. Сведем данную систему к одному уравнению. Согласно второму уравнению имеем: $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{3}$. Это уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x\cdot\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}=\frac{1}{3},\ \text{или}\ (\sqrt{3}\operatorname{tg} x-1)^2=0,$$

так как $1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x\neq 0$*. Отсюда получаем $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ и $y=\frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{6}-\pi n$.

II способ. Переходя во втором уравнении от произведения к сумме и используя первое уравнение, получаем

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=\frac{1}{3},\ \text{или}\ \frac{\cos(x-y)-\frac{1}{2}}{\cos(x-y)+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Из последнего уравнения находим, что $\cos(x-y)=1$, т. е. $x-y=2\pi n$. Комбинируя это уравнение с первым уравнением данной системы, имеем $x+y=\frac{\pi}{3}$ и $x-y=2\pi n$. Отсюда следует, что $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $y=\frac{\pi}{6}-\pi n$.

---

* Если $1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x=0$ то $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$. Тогда $y=\frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ не входит в множество допустимых значений данной системы.

III способ. Из первого уравнения следует, что $\operatorname{tg}(x+y)=\sqrt{3}$ (при этом мы получаем лишние корни, так как из равенства одноименных функций не вытекает равенство аргументов). Раскрывая тангенс суммы и используя второе уравнение, имеем $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Комбинируя это уравнение со вторым, получаем алгебраическую систему относительно $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}y$:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=\frac{1}{3}\end{cases}$$

(заметим, что эта система не равносильна данной). Поскольку $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}y$ являются корнями уравнения $z^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}z+\frac{1}{3}=0$, решая его, находим $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $x_1=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $y_1=\frac{\pi}{3}-$ $-x=\frac{\pi}{6}-\pi n$.

Замечание. Если искать y из уравнения $\operatorname{tg}y=\frac{\sqrt{3}}{3}$, то $y=$ $=\frac{\pi}{6}+\pi k$. Совокупность $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ и $y=\frac{\pi}{6}+\pi k$, где n и k меняются независимо, содержит лишние решения данной системы — те значения, которые не удовлетворяют уравнению $x+y=\frac{\pi}{3}$. Поэтому из всей совокупности $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ и $y=\frac{\pi}{6}+\pi k$ нужно выбрать те, которые удовлетворяют условию $x+y=\frac{\pi}{3}$, т. е. $\frac{\pi}{6}+$ $+\frac{\pi}{6}+\pi(n+k)=\frac{\pi}{3}$. Отсюда следует, что $k=-n$, и мы приходим к уже полученным решениям $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ и $y=\frac{\pi}{6}-\pi n$.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{4},\\ 3\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y.\end{cases}$$

Решение. Множество допустимых значений — все действительные числа, не равные $\frac{\pi}{2}+\pi n$. Переходя во втором уравнении к синусу и косинусу и используя первое уравнение, имеем

$$\sin y\cdot\cos x=\frac{3}{4}.$$

Комбинируя это уравнение с первым, получим систему

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

равносильную данной при условии, что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Перейдем в каждом уравнении от произведения к сумме:

$$\begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) = \frac{1}{2}, \\ \sin(x+y) - \sin(x-y) = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\sin(x+y) = 1$ и $\sin(x-y) = -\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{6}(-1)^n + \pi n. \end{cases}$$

Итак,

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}(-1)^n + \pi\left(k + \frac{n}{2}\right), \quad y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}(-1)^n\left(k - \frac{n}{2}\right),$$

причем k и n меняются независимо друг от друга (ср. с предыдущей системой).

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x + y + z = \pi, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3, \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 6. \end{cases}$$

Решение. Выражая z через x и y из первого уравнения и исключая его из третьего уравнения, получаем

$$\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg}[\pi - (x+y)] = 6, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg}(x+y) = -6.$$

Раскроем тангенс суммы двух углов. Тогда учитывая второе уравнение, имеем

$$\operatorname{tg} y \cdot \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = -6, \quad \text{или} \quad \frac{3 + \operatorname{tg}^2 y}{1 - 3} = -6.$$

Мы получили уравнение $\operatorname{tg}^2 y = 9$, откуда находим, что

$$y = \pm \operatorname{arctg} 3 + \pi n.$$

Из третьего уравнения находим, что $\operatorname{tg} z = \frac{6}{\operatorname{tg} y} = \pm 2$ и $z = \pm \operatorname{arctg} 2 + \pi k$. Теперь из первого уравнения найдем x:

$$x = \pi - [\pm \operatorname{arctg} 2 \pm \operatorname{arctg} 3 + \pi(n+k)] =$$

$$= \pi \mp (\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)^* - \pi(n+k) = \pi \mp \left(\frac{3\pi}{4}\right) - \pi(n+k).$$

---

* $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = 3\frac{\pi}{4}$ (см. гл. XII, пример 12).

Итак, система имеет два решения:

$$x_1=\frac{\pi}{4}-\pi(n+k),\ y_1=\operatorname{arcctg}3+\pi n,\ z_1=\operatorname{arctg}2+\pi k,$$

$$x_2=\frac{7\pi}{4}-\pi(n+k),\ y_2=-\operatorname{arctg}3+\pi n,\ z_2=-\operatorname{arctg}2+\pi k,$$

где n и k принимают любые целые значения независимо друг от друга.

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$$a_1<\sin\alpha<b_1,\ a_2<\cos\alpha<b_2,\ a_3<\operatorname{tg}\alpha<b_3,\ a_4<\operatorname{ctg}\alpha<b_4,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 — заданные числа. При решении этих неравенств удобно в качестве вспомогательного средства пользоваться графиком соответствующей тригонометрической функции или тригонометрическим кругом.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{3}<\sin x<\frac{1}{2}.$$

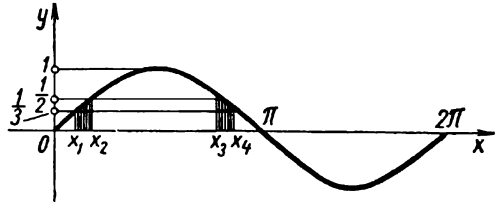


Рис. 73

Решение. Рассмотрим график функции $y=\sin x$ на отрезке $(0,\ 2\pi)$ (рис. 73) и отметим на нем значения $x_1=\arcsin\frac{1}{3}$, $x_4=\pi-\arcsin\frac{1}{3}$, синус которых равен $\frac{1}{3}$, а также значения $x_2=\frac{\pi}{6}$ и $x_3=\frac{5\pi}{6}$, синус которых равен $\frac{1}{2}$. Эти четыре точки разбивают весь промежуток $(0,\ 2\pi)$ на пять промежутков: $(0,\ x_1)$, $(x_1,\ x_2)$, $(x_2,\ x_3)$, $(x_3,\ x_4)$, $(x_4,\ 2\pi)$. Исследуя изменение $\sin x$ на каждом из этих промежутков, убеждаемся, что $\frac{1}{3}<\sin x<\frac{1}{2}$ на промежутках $(x_1,\ x_2)$ и $(x_3,\ x_4)$, т. е. на промежутках $\left(\arcsin\frac{1}{3},\ \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6},\ \pi-\arcsin\frac{1}{3}\right)$. Переходя от промежутка $(0,\ 2\pi)$ на всю числовую ось и учитывая периодичность синуса, окончательно получаем: $\frac{1}{3}<\sin x<\frac{1}{2}$ на всех промежутках

$$\left(\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\text{ и }\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right).$$

Пример 2. Решить неравенство

$$-1<\operatorname{ctg}x<2.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим график функции $y=\operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0,\ \pi)$ и отметим на нем числа $x_1=\operatorname{arcctg} 2$, котангенс которого равен 2, и $x_2=\frac{3\pi}{4}$, котангенс которого равен -1 (рис. 74).

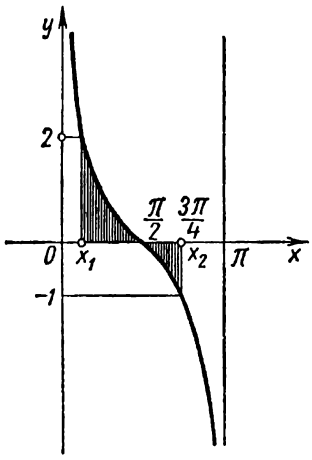


Рис. 74

Точки x_1 и x_2 разбивают весь промежуток $(0,\ \pi)$ на три промежутка: $(0,\ x_1)$, $(x_1,\ x_2)$ и (x_2,π), причем во втором из них $(x_1,\ x_2)$ функция $\operatorname{ctg} x$ убывает от 2 до -1. Переходя ко всей числовой оси, учитывая периодичность котангенса и заменяя x_1 и x_2 их значениями, получаем $-1<\operatorname{ctg} x<2$ на каждом из промежутков

$$\left(\operatorname{arcctg} 2+\pi n,\ \frac{3}{4}\pi+\pi n\right).$$

Неравенство, не являющееся простейшим, с помощью тождественных преобразований нужно свести к равносильному простейшему неравенству или к системе неравенств.

Пример 3. Решить неравенство

$$\cos^3 x\sin 3x+\sin^3 x\cos 3x<\frac{3}{8}.$$

Р е ш е н и е. Упрощая левую часть неравенства, получаем равносильное неравенство $\sin 4x<\frac{1}{2}$. Взяв вспомогательный тригонометрический круг (рис. 75), мы видим, что искомым значениям $4x$ соответствуют точки дуги $\overset{\frown}{MNP}$, т. е.

$$-\frac{7\pi}{6}+2\pi n<4x<\frac{\pi}{6}+2\pi n,$$

откуда следует, что

$$-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}.$$

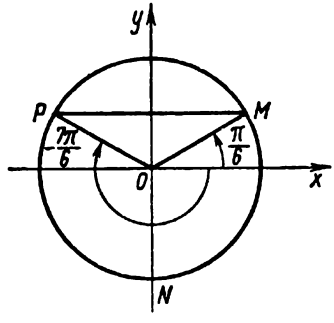


Рис. 75

Пример 4. Решить неравенство

$$2\sin^4 x-3\sin^2 x+1>0.$$

Р е ш е н и е. Переходя к аргументу $2x$, получаем равносильное неравенство $\cos^2 2x+\cos 2x>0$, которое равносильно, в свою очередь, совокупности двух систем:

$$\text{(а)}\ \begin{cases}\cos 2x+1>0,\\ \cos 2x>0\end{cases}\qquad\text{и}\qquad \text{(б)}\ \begin{cases}\cos 2x+1<0,\\ \cos 2x<0.\end{cases}$$

Первое неравенство системы (а) справедливо для всех x, кроме тех, при которых $\cos 2x=-1$, т. е. при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$. Из второго неравенства (а) следует, что $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, т. е. $-\frac{\pi}{4}+$

$+\pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, причем точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ не входят в эти промежутки ни при каком n. Итак, решением системы (а) являются промежутки $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$.

Система (б) несовместна, так как первое неравенство (б) не имеет решений. Следовательно, решения системы (а) являются решениями данного неравенства.

Пример 5. Решить неравенство

$$4 \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) < \sin 6x.$$

Решение. Перенося все члены неравенства в левую часть и затем преобразуя полученное выражение в произведение, имеем $\sin x \cdot \cos 5x > 0$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\text{(а)} \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos 5x > 0, \end{cases} \quad \text{(б)} \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos 5x < 0. \end{cases}$$

Из системы (а) следует, что $2\pi n < x < 2\pi n + \pi$ и $-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} < x < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$ одновременно. Но это означает, что k может принимать лишь такие целые значения, при которых интервалы $\left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right)$ попадают в I и II четверть. Давая k последовательно значения 0, 1, 2, 3, 4, получаем интервалы:

$$\left(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right) \text{ (соответствует } k = 0),$$

$$\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ (соответствует } k = 1),$$

$$\left(\frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}\right) \text{ (соответствует } k = 2).$$

При $k = 3$ и $k = 4$ соответствующие им интервалы не попадают в I и II четверть. При $k = 5$, очевидно, получается интервал $\left(-\frac{\pi}{10} + 2\pi, \frac{\pi}{10} + 2\pi\right)$. Вообще, представляя k в виде $k = 5m + l$, где $l = 0, 1, 2, 3, 4$, мы видим, что только при $l = 0, 1, 2$ соответствующие им интервалы (или части интервалов): 1) $\left(2\pi m, \frac{\pi}{10} + 2\pi m\right)$, 2) $\left(\frac{3\pi}{10} + 2\pi m, \frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)$ и 3) $\left(\frac{7\pi}{10} + 2\pi m, \frac{9\pi}{10} + 2\pi m\right)$ попадают в I и II четверть. Итак, системе (а) удовлетворяют все значения x, лежащие в указанных интервалах 1), 2) 3).

Из системы (б) следует, что $(2n + 1)\pi < x < (2n + 2)\pi$ и $\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} < x < \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right)$ одновременно. Из всех значений k

выбираем лишь те, при которых интервалы $\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}, \frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\right)$ попадают в III и IV четверть.

Проводя те же рассуждения, что и в случае (а), получаем, что этим свойством обладают указанные интервалы или их части при $l=2, 3, 4$.

Итак, данному неравенству удовлетворяют все значения x, лежащие в промежутках

$$\left(2\pi k, \frac{\pi}{10}+2\pi k\right), \left(\frac{3\pi}{10}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),$$
$$\left(\frac{7\pi}{10}+2\pi k, \frac{9\pi}{10}+2\pi k\right), \left(\pi+2\pi k, \frac{11\pi}{10}+2\pi k\right),$$
$$\left(\frac{13\pi}{10}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), \left(\frac{17\pi}{10}+2\pi k, \frac{19\pi}{10}+2\pi k\right).$$

Пример 6. Найти все значения x, лежащие в промежутке $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ и удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg}\frac{1}{x}\geqslant 1$.

Решение. Решением неравенства $\operatorname{tg}\frac{1}{x}\geqslant 1$ будут все значения x, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{4}+\pi n<\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}+\pi n$. Так как по условию $4<\frac{1}{x}<6$, то нужно выбрать такие значения n, при которых промежутки $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ попадают целиком или частично внутрь промежутка (4, 6). Очевидно, таким единственным значением будет $n=1$. Итак, $\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}+\pi$. Следовательно, $\frac{2}{3\pi}<x<\frac{1}{4}$.

Пример 7. Решить неравенство

$$5+2\cos 2x\leqslant 3\,|\,2\sin x-1\,|.$$

Решение. Данное неравенство отличается от рассмотренных выше тем, что здесь тригонометрическое выражение входит под знаком абсолютной величины.

Замечая, что $5+\cos 2x>0$ для всех x, перейдем от данного неравенства к равносильной совокупности двух неравенств (см. гл. IV, § 7):

$$6\sin x-3\geqslant 5+2\cos 2x \qquad \text{(а)}$$

и

$$6\sin x-3\leqslant -5-2\cos 2x. \qquad \text{(б)}$$

Так как $-6\leqslant 6\sin x\leqslant 6$, $6\leqslant 8+2\cos 2x\leqslant 10$, то в неравенстве (а) может иметь место лишь случай равенства, когда

$$6\sin x=8+2\cos x=6, \text{ т. е. } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Решим неравенство (б). Имеем

$$2\sin^2 x-3\sin x-2\geqslant 0.$$

Полагая $\sin x = y$, перейдем к алгебраическому неравенству $2y^2 - 3y - 2 \geqslant 0$, равносильному данному при условии $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Находим, что

$$\begin{cases} y \geqslant 2 \text{ и } y \leqslant -\frac{1}{2}, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$$

откуда следует $-1 \leqslant y \leqslant -\frac{1}{2}$, т. е. $-1 \leqslant \sin x \leqslant -\frac{1}{2}$ и $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$. Кроме того, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

§ 6. РЕШЕНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Тригонометрическое уравнение — пример трансцендентного уравнения. К этому же классу уравнений относятся логарифмические и показательные уравнения, уравнения, связанные с аркфункциями, и т. д.

В этом параграфе рассмотрим несколько уравнений «смешанного» типа.

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos(\pi \lg x) + \sin(\pi \lg x) = 1.$$

Решение. Преобразуя левую часть уравнения, получаем равносильное данному простейшее уравнение $\sin\left(\pi \lg x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда следует, что $\pi \lg x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(-1)^n + \pi n$, или $\lg x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + n$. Мы получили логарифмическое уравнение. Решая его, находим, что $x = 10^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + n}$. Если $n = 2k$, то $x = 10^{2k}$; если $n = 2k + 1$, то $x = 10^{\frac{1}{2} + 2k}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{1 + \lg \operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{1 - \lg \operatorname{tg} x} = 2.$$

Решение. Используя тождество $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, где $a = \sqrt[3]{1 + \lg \operatorname{tg} x}$, $b = \sqrt[3]{1 - \lg \operatorname{tg} x}$, $a^3 + b^3 = 2$, $a + b = 2$, получаем уравнение $2 + 3\sqrt[3]{1 - \lg^2 \operatorname{tg} x} \cdot 2 = 8$, или $\lg^2 \operatorname{tg} x = 0$, равносильное данному. Из последнего уравнения следует, что $\operatorname{tg} x = 1$ и $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Пример 3. Решить уравнение $\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \cos(\pi \operatorname{arctg} x)$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{arctg} x) = 1,$$

откуда следует, что $\pi \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где n—целые числа, для которых $\left|\frac{\pi}{4} + \pi n\right| < \frac{\pi^2}{2}$ или $\left|\frac{1}{4} + n\right| < \frac{\pi}{2}$. Решая это неравенство относительно n, находим, что $n = 0$, $n = -1$ и $n = 1$. Следовательно, мы имеем три уравнения

$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{4}$ $(n = 0)$, $\operatorname{arctg} x = \frac{5}{4}$ $(n = 1)$, $\operatorname{arctg} x = -\frac{3}{4}$ $(n = -1)$,

из которых получаем

$$x_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{4}, \quad x_2 = \operatorname{tg} \frac{5}{4}, \quad x_3 = -\operatorname{tg} \frac{3}{4}.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_2 (\operatorname{arctg} x) + \log_2 (\operatorname{arcctg} x) = a.$$

Решение. Потенцируя данное уравнение, получаем уравнение $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = 2^a$, равносильное данному, при условии, что $\operatorname{arctg} x > 0$ и $\operatorname{arcctg} x > 0$ (т. е. $x > 0$).

Преобразуя полученное уравнение к виду

$$\operatorname{arctg} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = 2^a,$$

решаем это квадратное уравнение. Имеем

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 2^{4+a}}}{4}.$$

Исследуя полученную формулу, видим, что она дает решение данного уравнения при условии, что $\pi^2 - 2^{4+a} \geqslant 0$ и $0 < \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 2^{4+a}}}{4} < \frac{\pi}{2}$. Первое и второе неравенства выполняются при $a \leqslant 2 \log_2 \pi - 4$. При этих условиях

$$x = \operatorname{tg} \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 2^{4+a}}}{4}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$\arcsin 2^{x+2} + \arcsin (4\sqrt{3} \cdot 2^x) = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Полагая $2^{x+2} = y$ $(y > 0)$, перепишем уравнение в виде $\arcsin y + \arcsin y\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$, или $\frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arcsin y\sqrt{3}$, множество допустимых значений которого состоит из всех значений y, заключенных в промежутке $0 < y\sqrt{3} \leqslant 1$. Приравнивая синусы обеих частей последнего уравнения (при этом мы можем получить лишние корни!), имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = y\sqrt{3}, \quad \cos(\arcsin y) = y\sqrt{3},$$

$$\sqrt{1 - y^2} = y\sqrt{3}, \quad 1 - y^2 = 3y^2; \quad y = \pm \frac{1}{2}.$$

Отрицательное значение y отбрасываем. Возвращаясь к аргументу x, получаем $2^{x+2}=\frac{1}{2}$, $x+2=-1$, $x=-3$. Проверка показывает, что $x=-3$ удовлетворяет данному уравнению.

Рассмотрим несколько неравенств «смешанного» типа.

Пример 6. Решить неравенство

$$4^{\sin^2 x}+3\cdot 4^{\cos^2 x}\leqslant 8.$$

Решение. Полагаем $4^{\sin^2 x}=y$ $(1\leqslant y\leqslant 4)$, тогда $4^{\cos^2 x}=4^{1-\sin^2 x}=\frac{4}{y}$ и данное неравенство равносильно системе алгебраических неравенств

$$\begin{cases} y^2+\frac{12}{y}-8\leqslant 0, \\ 1\leqslant y\leqslant 4, \end{cases}$$

решая которую, находим, что $2\leqslant y\leqslant 4$. Следовательно, $4^{\frac{1}{2}}\leqslant 4^{\sin^2 x}\leqslant 4$, откуда $\frac{1}{2}\leqslant \sin^2 x\leqslant 1$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant |\sin x|\leqslant 1$. Следовательно,

$$\frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant x\leqslant \frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\ .$$

Пример 7. Решить неравенство

$$(\log_{\operatorname{tg} x} 3)^2\leqslant \log_{\operatorname{tg} x}(3\operatorname{tg}^2 x).$$

Решение. Очевидно, $\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$ и $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$ ($\operatorname{tg} x>0$ и $\operatorname{tg} x\neq 1$). Логарифмируя правую часть неравенства и полагая $\log_{\operatorname{tg} x} 3=y$, получим алгебраическое неравенство $y^2-y-2\leqslant 0$, решением которого является отрезок $-1\leqslant y\leqslant 2$, откуда

$$-1\leqslant \log_{\operatorname{tg} x} 3\leqslant 2. \qquad (*)$$

Для решения неравенства (*) рассмотрим два случая.

1) $0<\operatorname{tg} x<1$. Тогда $\log_{\operatorname{tg} x} 3<0$ и тем более $\log_{\operatorname{tg} x} 3\leqslant 2$. Поэтому система (*) сводится к одному неравенству

$$\log_{\operatorname{tg} x} 3\geqslant -1, \text{ т. е. } \frac{1}{\operatorname{tg} x}\geqslant 3.$$

Отсюда находим, что $0<\operatorname{tg} x\leqslant\frac{1}{3}$ и

$$\pi k<x\leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k;$$

2) $\operatorname{tg} x>1$. Тогда $\log_{\operatorname{tg} x} 3>0$ и тем более $\log_{\operatorname{tg} x} 3\geqslant -1$. Следовательно, двойное неравенство (*) сводится к неравенству $\log_{\operatorname{tg} x} 3\leqslant 2$, откуда $\operatorname{tg} x\geqslant\sqrt{3}$ $(\operatorname{tg} x>0)$ и $\frac{\pi}{3}+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Окончательное решение состоит из промежутков

$$\pi k < x \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Пример 8. Найти все значения x, лежащие в промежутке $1 < x < 10$ и удовлетворяющие неравенству

$$\sin \pi (2 + \log_4 x) - \cos \pi \left[\frac{3^{\frac{1}{\log_2 \sqrt{3}}}}{\log_{4x} 4} + \log_4^2 x \right]^{\frac{1}{2}} + 1 \leqslant 0.$$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$A = 3^{\log_{\sqrt{3}} 2} \cdot \log_4 4x + \log_4^2 x = 4 \log_4 4x + \log_4^2 x =$$
$$= 4 + 4\log_4 x + \log_4^2 x = (2 + \log_4 x)^2.$$

После этого данное неравенство примет вид

$$\sin \pi (2 + \log_4 x) - \cos \pi (2 + \log_4 x) \leqslant -1$$

(так как при $1 < x < 10$ выражение $2 + \log_4 x > 0$). Полагая, далее, $y = \pi (2 + \log_4 x)$, свернем левую часть неравенства:

$$\sin y - \cos y \leqslant -1,$$

откуда

$$\sqrt{2} \sin \left(y - \frac{\pi}{4} \right) \leqslant -1, \text{ т. е. } \sin \left(y - \frac{\pi}{4} \right) \leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leqslant y - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$, т. е. $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leqslant y \leqslant 2\pi + 2k\pi$. Заменим y его значением: $\frac{3}{2} + 2k \leqslant 2 + \log_4 x \leqslant 2 + 2k$, откуда

$$-\frac{1}{2} + 2k \leqslant \log_4 x \leqslant 2k,$$

т. е.

$$\frac{4^{2k}}{2} \leqslant x \leqslant 4^{2k}. \qquad (*)$$

Остается выбрать те значения k, при которых отрезки (*) или их части попадают внутрь интервала (1, 10). Очевидно, это имеет место лишь при $k = 1$, для которого $8 \leqslant x \leqslant 16$. Следовательно, искомые значения x лежат в промежутке $8 \leqslant x < 10$.

ГЛАВА XIV

ГРАФИКИ

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В предыдущих главах были построены графики функций:

$$y=kx+b,\ y=\frac{ax+b}{cx+d},\ y=ax^2+bx+c,\ y=x^n,\ y=\sqrt[n]{x},$$
$$y=a^x,\ y=\log_a x,\ y=A\sin(\omega x+\varphi),\ y=A\cos(\omega x+\varphi),$$
$$y=\operatorname{arcsin}x,\ y=\arccos x,\ y=\operatorname{arctg}x,\ y=\operatorname{arcctg}x.$$

В § 8 гл. VII были рассмотрены некоторые простейшие преобразования графиков и правила, по которым из графика функции $y=f(x)$ можно получить графики следующих функций:

I. $y=f(x+a)$ (переход от функции $y=f(x)$ к функции $y=f(x+a)$ условимся в дальнейшем обозначать символом $x\div x+a$)).

II. $y=f(x)+b$ или $y-b=f(x)$ (коротко: $y\div y-b$).

III. $y=f(x+a)+b$ или $y-b=f(x+a)$ (коротко: $x\div x+a$, $y\div y-b$).

IV. $y=f(ax)$, где $a>0$ (коротко: $x\div ax$).

V. $y=bf(x)$, или $\frac{y}{b}=f(x)$ $\left(\text{коротко: } y\div\frac{y}{b}\right)$.

VI. $y=f(-x)$ (коротко: $x\div -x$).

VII. $y=-f(x)$ или $-y=f(x)$ (коротко: $y\div -y$).

К этим правилам добавим еще два.

VIII. Правило получения графика функции $y=f(|x|)$ по графику функции $y=f(x)$ (коротко: $x\div|x|$).

Запись $f(|x|)$ означает, что в выражении $f(x)$ буква x, в него входящая, заменяется на $|x|$.

Например, если $f(x)=\sin(2x+1)$, то $f(|x|)=\sin(2|x|+1)$.

Так как $f(|-x|)=f(|x|)$, то, следовательно, функция $y=f(|x|)$ — четная и поэтому достаточно построить ее график для $x\geqslant 0$ (см. гл. VII). Но для $x\geqslant 0$ имеем $|x|=x$ и поэтому $f(|x|)=f(x)$, т. е. график функции $y=f(|x|)$ для $x\geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$. Таким образом, мы получили следующее правило.

Правило VIII. *График функции $y=f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$ в правой полуплоскости ($x\geqslant 0$), а в левой полуплоскости ($x<0$) симметричен этой части графика относительно оси Oy* (рис. 76).

IX. Правило получения графика функции $y=|f(x)|$ по графику функции $y=f(x)$ (коротко: $f(x)\div|f(x)|$).

Согласно определению абсолютной величины действительного числа имеем

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0;\\ -f(x), & \text{если } f(x)<0.\end{cases}$$

Так как график функции $y=-f(x)$ согласно правилу VII симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси Ox, то, следовательно, имеет место следующее правило.

Правило IX. *График функции* $y=|f(x)|$ *совпадает с графиком функции* $y=f(x)$ *для тех участков оси* Ox, *где* $f(x)\geqslant 0$, *и является симметричным отображением его относительно оси* Ox *для тех участков, где* $f(x)<0$ (рис. 77).

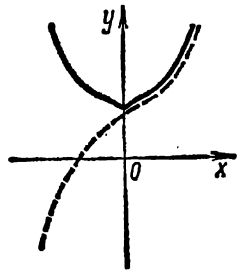


Рис. 76

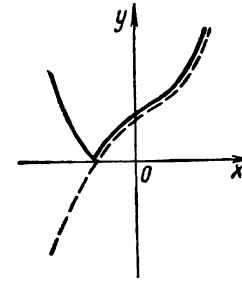


Рис. 77

Способ построения графика функции $y=f(x)$, использующий рассмотренные элементарные преобразования, заключается в следующем. Составляют так называемую «цепочку» функций:

$$y=f(x),\ y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ \ldots,\ y=f_n(x),$$

таким образом, чтобы две соседние функции $y=f_k(x)$ и $y=f_{k+1}(x)$ отличались друг от друга каким-нибудь из разобранных признаков, а график последней функции «цепочки» $y=f_n(x)$ был бы известен. Затем последовательно строят графики функций 1) $y=f_n(x)$, 2) $y=f_{n-1}(x)$, $\ldots$, $n+1)$ $y=f(x)$, получая каждый следующий график из предыдущего по известному правилу.

Такие построения в отдельных случаях во избежание нагромождения графиков удобнее производить на отдельных рисунках. «Цепочки» можно составлять по-разному, но лишь таким образом, чтобы переход от одной функции к другой каждый раз подчинялся какому-нибудь одному из рассмотренных правил.

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y=-\sqrt{x^2-4x+4}$.

Прежде всего замечаем, что $y=-\sqrt{x^2-4x+4}=-\sqrt{(x-2)^2}=$ $=-|x-2|$. Теперь составим «цепочку», например, таким образом:

$$y=-|x-2|\ (y\div -y), \qquad 3)$$
$$y=|x-2|\ (f(x)\div |f(x)|), \qquad 2)$$
$$y=x-2. \qquad 1)$$

Здесь и в дальнейшем в скобках указывается в сокращенных обозначениях то правило, по которому график этой функции получается из графика последующей функции.

Теперь согласно этим правилам строим последовательно графики 1), 2), 3) (рис. 78).

Если составим «цепочку» следующим образом:

$$y=-|x-2| \ (x \div x-2), \qquad 3)$$
$$y=-|x| \ (x \div |x|), \qquad 2)$$
$$y=-x \qquad 1)$$

и теперь последовательно построим графики функций 1), 2), 3) (рис. 79), то, как видим, результат получается тот же.

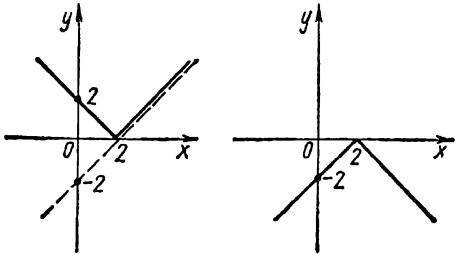


Рис. 78

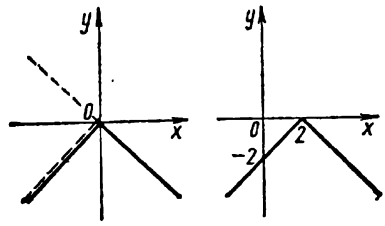


Рис. 79

2. $y=\sqrt{-x}-1$.

Составляем «цепочку»:

$$y=\sqrt{-x}-1 \ (y \div y+1), \qquad 3)$$
$$y=\sqrt{-x} \ (x \div -x), \qquad 2)$$
$$y=\sqrt{x}. \qquad 1)$$

Теперь строим последовательно графики 1) —3) (рис. 80.)

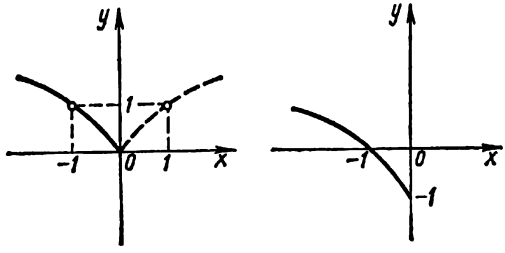


Рис. 80

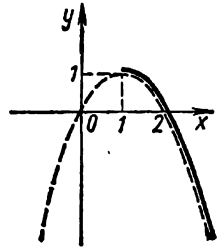


Рис. 81

3. $x=\sqrt{1-y}+1$.

В этом примере x является функцией y. Выразим из этого уравнения y как функцию x.

Имеем $x-1=\sqrt{1-y}$, откуда замечаем, что $x-1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 1$ (так как арифметический корень не может принимать отрицательных значений). Возведя в квадрат, получаем $(x-1)^2=1-y$ и окончательно $y=-(x-1)^2+1$. Графиком этой функции будет парабола, изображенная на рис. 81, а графиком искомой функции будет правая ветвь этой параболы, для которой $x \geqslant 1$. Очевидно, левая ветвь параболы будет графиком функции $x=-\sqrt{1-y}+1$.

Заметим, что можно и не разрешать данное уравнение относительно y, а рассматривать y как независимую переменную.

4. $y=(1-x)^3$.

Составим «цепочку», например, так:

$$y=(1-x)^3 \quad (x \div -x), \qquad 3)$$
$$y=(1+x)^3 \quad (x \div x+1), \qquad 2)$$
$$y=x^3. \qquad 1)$$

График изображен на рис. 82.

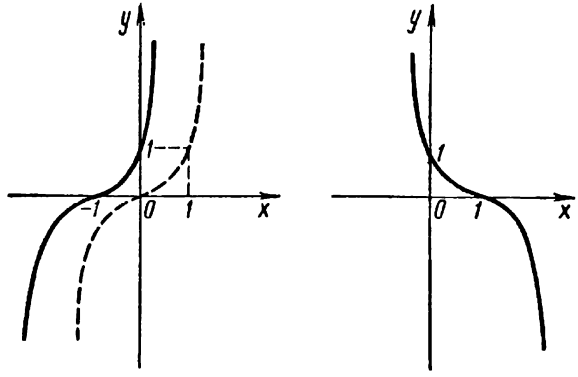


Рис. 82

5. $y=3^{|x+1|}-1$.

Составим «цепочку», например, так:

$$y=3^{|x+1|}-1 \quad (x \div x+1,\ y \div y+1), \qquad 3)$$
$$y=3^{|x|} \quad (x \div |x|), \qquad 2)$$
$$y=3^x. \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1) —3) (рис. 83).

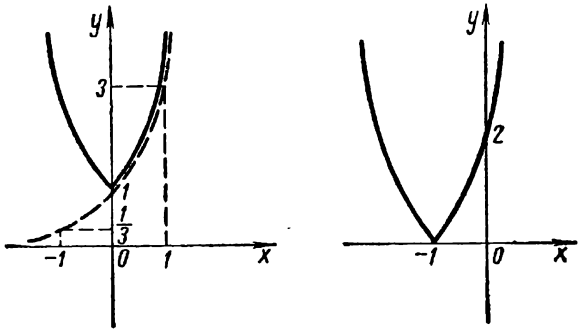


Рис. 83

6. $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2$.

Эту функцию можно задать как $y=2\log_{\frac{1}{3}}|x+1|$ (при вынесении

показателя степени за знак логарифма основание степени взято по абсолютной величине, так как $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2$ имеет смысл и при $x+1<0$ (см. гл. VIII, § 2).

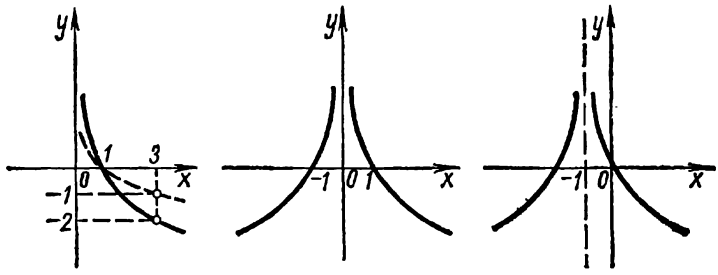


Рис. 84

Теперь составим «цепочку», например, так:

$$y=2\log_{\frac{1}{3}}|x+1|\ (x\div x+1), \qquad 4)$$

$$y=2\log_{\frac{1}{3}}|x|\ (x\div|x|), \qquad 3)$$

$$y=2\log_{\frac{1}{3}}x\left(y\div\rightarrow\frac{y}{2}\right) \qquad 2)$$

$$y=\log_{\frac{1}{3}}x. \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1)—4) (рис. 84).

7. $y=\log_2\frac{1}{3x-2}$.

Записав эту функцию в виде $y=-\log_2(3x-2)$, составляем «цепочку»:

$$y=-\log_2(3x-2)=$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}3\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x\div x-\frac{2}{3}\right) \quad 3)$$

$$y=\log_{\frac{1}{2}}3x\ (x\div 3x), \qquad 2)$$

$$y=\log_{\frac{1}{2}}x \qquad 1)$$

и строим последовательно графики 1)—3) (рис. 85).

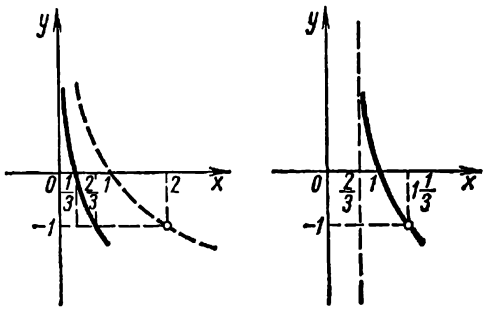


Рис. 85

8. $y=2\sin(1-2x)$.

Имеем

$$y=2\sin(1-2x)=-2\sin(2x-1)\ (y\div -y), \qquad 2)$$

$$y=2\sin(2x-1)=2\sin 2\left(x-\frac{1}{2}\right). \qquad 1)$$

Теперь строим последовательно графики функций 1), 2) (рис. 86). Для контроля находим, что при $x=0$ значение $y=2\sin 1 \approx$ $\approx 2\sin 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1{,}7$.

9. $y=|2\cos \pi x - 1|$.

Составляем «цепочку», например, так:

$$y=|2\cos \pi x - 1| \quad (f(x) \div |f(x)|), \qquad 3)$$

$$y=2\cos \pi x - 1 \quad (y \div y+1), \qquad 2)$$

$$y=2\cos \pi x. \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1) — 3) (рис. 87). Для контроля и большей точности построения найдем точки пересечения

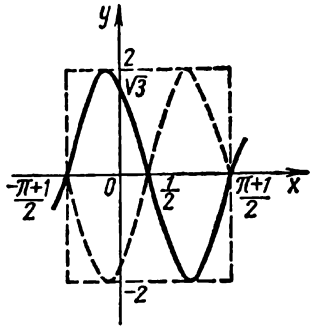


Рис. 86

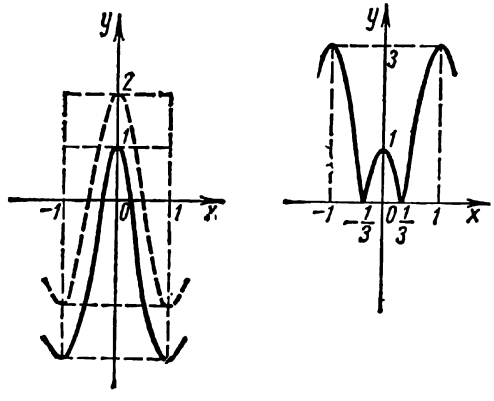


Рис. 87

искомого графика с осью абсцисс. Полагая $y=0$, получаем $|2\cos \pi x - 1| = 0$, или $2\cos \pi x - 1 = 0$, или $\cos \pi x = \frac{1}{2}$, откуда $\pi x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, т. е $x = 2k \pm \frac{1}{3}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

10. $y = \operatorname{tg} \frac{|x|-1}{2}$.

Составим «цепочку»:

$$y = \operatorname{tg} \frac{|x|-1}{2} \quad (x \div |x|), \qquad 4)$$

$$y = \operatorname{tg} \frac{x-1}{2} \quad (x \div x-1), \qquad 3)$$

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(x \div \frac{x}{2}\right), \qquad 2)$$

$$y = \operatorname{tg} x. \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1) — 4) (рис. 88). Для более точного построения графика 3) найдем точку пересечения с осью ординат; при $x=0$ получим $y = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} \approx -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \approx 0{,}6$.

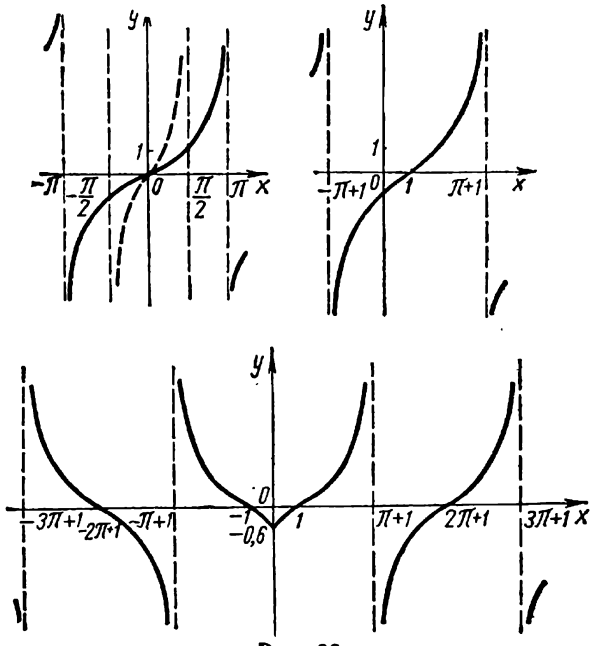

y
1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x
y
1
$-\pi+1$
0
1
$\pi+1$
x
y
0
$-3\pi+1$
$-2\pi+1$
$-\pi+1$
-1
$-0,6$
1
$\pi+1$
$2\pi+1$
$3\pi+1$
x

Рис. 88

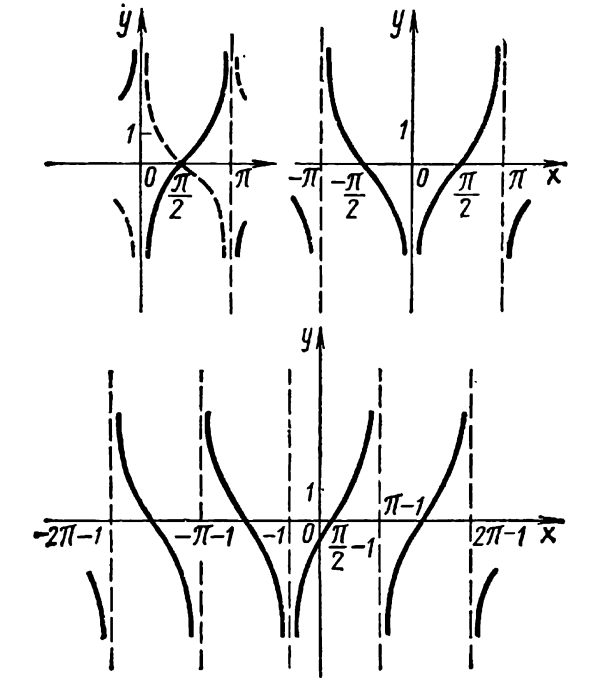

y
1
0
$\frac{\pi}{2}$
π
y
1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x
y
1
$-2\pi-1$
$-\pi-1$
-1
0
$\frac{\pi}{2}-1$
$\pi-1$
$2\pi-1$
x

Рис. 89

11. $y = -\operatorname{ctg}|x+1|$.

Составим «цепочку», например, так:

$$y = -\operatorname{ctg}|x+1| \;(x \div x+1), \qquad 4)$$
$$y = -\operatorname{ctg}|x| \;(x \div |x|), \qquad 3)$$
$$y = -\operatorname{ctg} x \;(y \div -y), \qquad 2)$$
$$y = \operatorname{ctg} x. \qquad 1)$$

Теперь строим последовательно графики функций 1)—4) (рис. 89).

12. $y = \arcsin(|x|-1)$.

Составляем «цепочку»:

$$y = \arcsin(|x|-1) \;(x \div |x|), \qquad 3)$$
$$y = \arcsin(x-1) \;(x \div x-1), \qquad 2)$$
$$y = \arcsin x. \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1)—3) (рис. 90.)

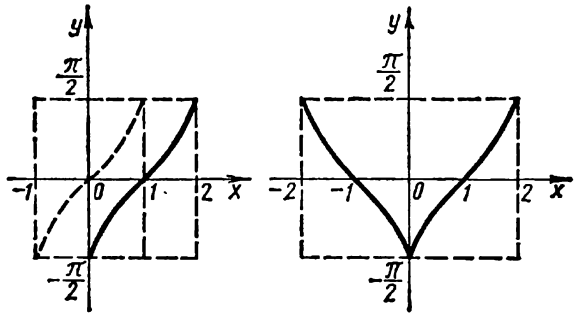
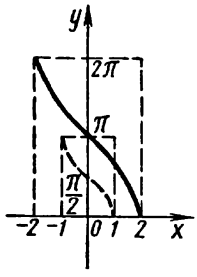


Рис. 90



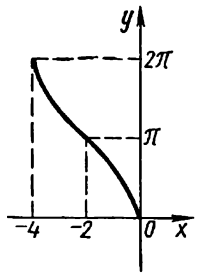
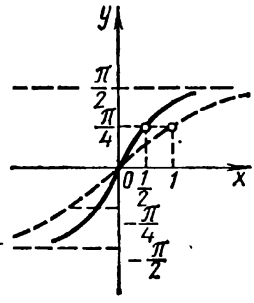


Рис. 91



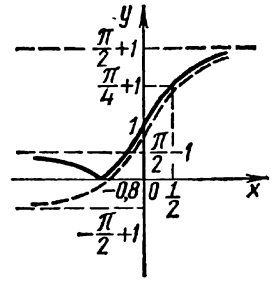


Рис. 92

13. $y = 2\arccos\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

Составляем «цепочку»:

$$y = 2\arccos\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2\arccos\frac{1}{2}(x+2) \;(x \div x+2), \qquad 3)$$
$$y = 2\arccos\frac{x}{2}\left(x \div \frac{x}{2},\; y \div \frac{y}{2}\right). \qquad 2)$$
$$y = \arccos x. \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1)—3) (рис. 91).

14. $y = |\operatorname{arctg} 2x + 1|$.

Составляем «цепочку»:

$$y = |\operatorname{arctg} 2x + 1| \ (f(x) \div |f(x)|), \quad 4)$$
$$y = \operatorname{arctg} 2x + 1 \ (y \div y - 1), \quad 3)$$
$$y = \operatorname{arctg} 2x \ (x \div 2x), \quad 2)$$
$$y = \operatorname{arctg} x. \quad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1)—4) (рис. 92).

График функции $y = \operatorname{arctg} 2x + 1$ пересекает ось абсцисс в точке, где $\operatorname{arctg} 2x + 1 = 0$, т. е. $2x = \operatorname{tg}(-1) \approx -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, т. е. $x \approx -0{,}8$.

15. $y = \operatorname{arcctg}|1 - x|$.

Составим «цепочку»:

$$y = \operatorname{arcctg}|1 - x| = \operatorname{arcctg}|x - 1| \ (x \div x - 1), \quad 3)$$
$$y = \operatorname{arcctg}|x| \ (x \div |x|), \quad 2)$$
$$y = \operatorname{arcctg} x. \quad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1)—3) (рис. 93). График заданной функции пересекает ось ординат в точке, где

$$y = \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx \frac{3}{4}.$$

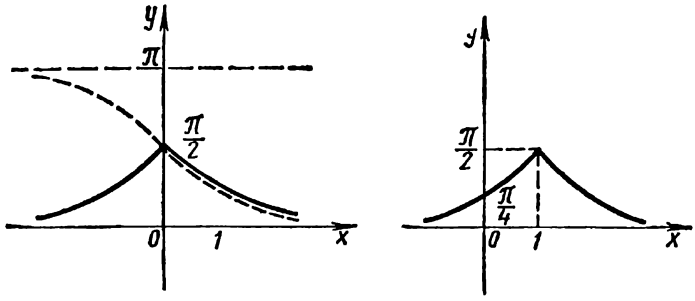


Рис. 93

Замечание. Не следует думать, что график любой функции может быть получен из графиков простейших функций путем элементарных преобразований. Например, график функции $y = \log_2(x^2 - 1)$ не может быть получен из графика функции $y = \log_2 x$ за счет рассмотренных геометрических преобразований (см. пример 4 § 7).

§ 2. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ РАЗНЫМИ ФОРМУЛАМИ НА РАЗЛИЧНЫХ ПРОМЕЖУТКАХ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом случае искомый график состоит из совокупности графиков, построенных на каждом из этих промежутков. Иногда, даже если функция задана одной формулой во всей области ее опре-

деления, выгодно перейти (если это возможно) к ее заданию разными формулами для различных промежутков этой области.

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y=\frac{|x|}{x}$.

Функция определена для всех x, кроме $x=0$.

Так как для $x>0$ $|x|=x$, а для $x<0$ $|x|=-x$, то нашу функцию можно задать в виде

$$y=\begin{cases} 1, & \text{если } x>0; \\ -1, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Теперь ясно, что график будет состоять из двух лучей (рис. 94) с «выколотыми» точками (0, 1) и (0, —1).

2. $y=x^2-|2x-1|$.

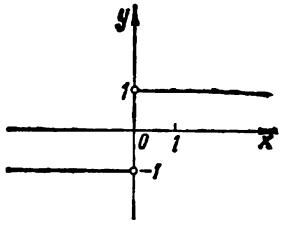


Рис. 94

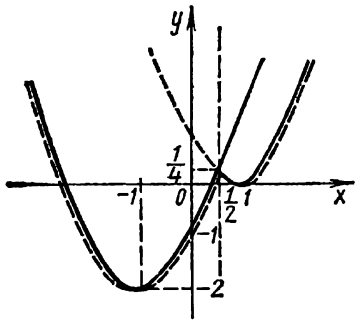


Рис. 95

Очевидно, данную функцию можно задать в виде

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x\geqslant\frac{1}{2}; \\ x^2+2x-1, & \text{если } x\leqslant\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Строим графики функций $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$ и $y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ (рис. 95—пунктирные линии).

При $x=\frac{1}{2}$ (линии раздела) обе функции принимают одно значение $y=\frac{1}{4}$.

Взяв от первого графика его часть, лежащую правее прямой $x=\frac{1}{2}$, а от второго—левее этой прямой, получаем график данной функции (рис. 95).

3. $y=\sin\pi x+|\sin\pi x|$.

Функцию, очевидно, можно задать в виде

$$y=\begin{cases} 2\sin\pi x, & \text{если } \sin\pi x\geqslant 0; \\ 0, & \text{если } \sin\pi x\leqslant 0. \end{cases}$$

Эта функция периодическая с основным периодом $T=2$.

Искомый график изображен на рис. 96 сплошной линией, а вспомогательный график функции $y=\sin \pi x$ — пунктирной линией.

4. $y=|4-2x|-\sqrt{x^2+2x+1}+x$.

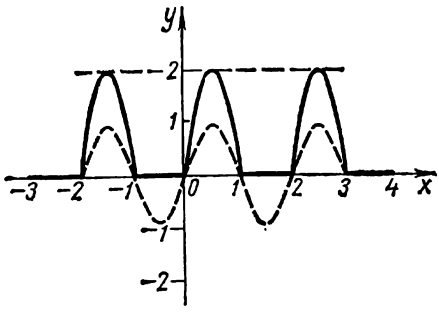


Рис. 96

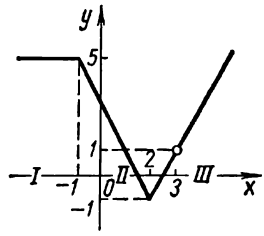


Рис. 97

Извлекая корень, получим $y=|4-2x|-|x+1|+x$, или $y=2|x-2|-|x-1|+x$. Точки $x=-1$ и $x=2$ разбивают ось Ox на три промежутка: I, II, III (рис. 97).

Рассмотрим функцию на каждом из промежутков.

I: для любого $x\leqslant -1$ имеем $x-2<0$ и $x+1=x-(-1)\leqslant 0$ и поэтому

$$y=-2(x-2)+(x+1)+x=5.$$

II: для любого $-1\leqslant x\leqslant 2$ имеем $x-2\leqslant 0$, $x+1\geqslant 0$ и поэтому

$$y=-2(x-2)-(x+1)+x=-2x+3.$$

III: для любого $x\geqslant 2$ имеем $x-2\geqslant 0$, $x+1>0$ и поэтому

$$y=2(x-2)-(x+1)+x=2x-5.$$

Следовательно, нашу функцию можно задать так:

$$y=\begin{cases}5, & \text{если } x\leqslant -1;\\ 3-2x, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 2;\\ 2x-5, & \text{если } x\geqslant 2.\end{cases}$$

Отсюда видно, что на каждом из указанных промежутков графиком служит часть прямой (рис. 97).

§ 3. ГРАФИК СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Бывает, что функцию $y=f(x)$ можно представить в виде суммы двух функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, графики которых легко построить. Тогда построение графика функции $y=f(x)$ сводится к геометрическому сложению соответствующих ординат: $y=y_1+y_2$. Заметим, что разность двух функций всегда можно свести к соответствующей сумме двух функций:

$$y=f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)+[-f_2(x)].$$

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y=\frac{3^x-3^{-x}}{2}$.

Очевидно, если положить $y_1=\frac{3^x}{2}$, $y_2=-\frac{3^{-x}}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^x$, то $y=y_1+y_2$.

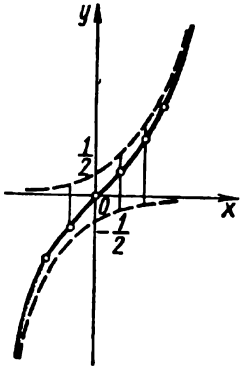


Рис. 98

Теперь по правилу построения графика показательной функции строим графики функций $y_1=\frac{3^x}{2}$ и $y_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (пунктирные линии на рис. 98) и далее путем геометрического сложения соответствующих ординат этих графиков находим ряд точек искомого графика, соединив которые плавной кривой, получим искомый график (сплошная линия на рис. 98).

2. $y=\frac{x^2+1}{x}$.

Очевидно, $y=x+\frac{1}{x}=y_1+y_2$, где $y_1=x$, $y_2=\frac{1}{x}$. Строим графики функций $y_1=x$ и $y_2=\frac{1}{x}$ и затем геометрическим сложением соответствующих ординат получаем искомый график (рис. 99).

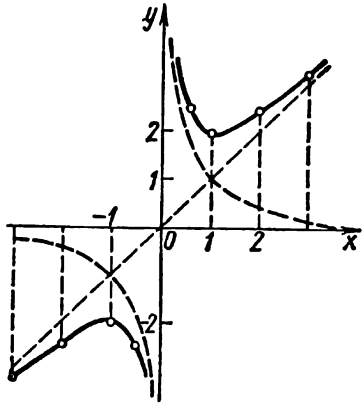


Рис. 99

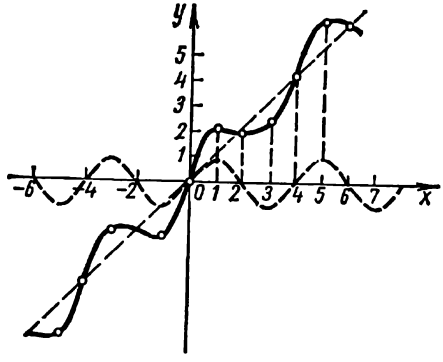


Рис. 100

Прямая $y=x$ является асимптотой полученного графика.

3. $y=\sin\frac{\pi x}{2}+x$.

Полагая $y_1=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y_2=x$, имеем $y=y_1+y_2$. Строим графики функций y_1 и y_2 (рис. 100—пунктирные линии).

Отметим те значения x, где первое слагаемое обращается в 0 и ± 1. В этих точках значения ординат y будут равны соответственно y_2 и $y_2 \pm 1$.

Построив ряд таких точек и соединив их плавной кривой, получим искомый график (рис. 100). Так как данная функция нечетная (сумма двух нечетных функций), то ее график симметричен относительно начала координат.

4. $y=\cos 2x-\sin x$.

Полагая $y_1=\cos 2x$ и $y_2=-\sin x$, имеем $y=y_1+y_2$. Так как функции y_1 и y_2 периодические с основными периодами $T_1=\pi$ и $T_2=2\pi$, то и функция y — периодическая с периодом $T=2\pi$. Поэтому требуемый график строим на промежутке $[-\pi, \pi]$. Построив на этом промежутке графики функций y_1 и y_2 (рис. 101 — пунктирные линии) и сложив ординаты ряда характерных точек (где одно из слагаемых равно нулю, где $y_1=y_2$, $y_1=-y_2$), найдем ряд точек искомого графика (рис. 101).

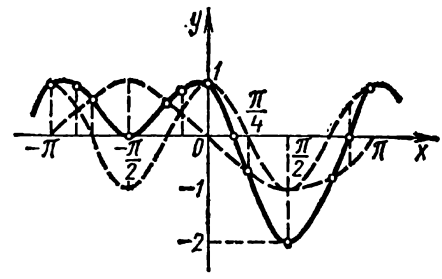


Рис. 101

Соединив эти точки плавной кривой, получим, что искомый график имеет вид кривой, изображенной на рис. 101 сплошной линией. Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ график получается по свойству периодичности функции.

Полученная кривая является графиком сложного гармонического колебания.

Замечание. Не всегда целесообразно график суммы двух функций строить сложением графиков слагаемых. Иногда такую сумму можно заменить одной функцией, график которой строится проще. Так, например, функция $y=\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$, которая является нечетной (сумма двух нечетных функций) и определенной всюду, кроме $x=0$, при $x>0$ преобразуется к виду $y=\frac{2}{\pi}(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1$ (см. гл. XII, § 3). Следовательно, эту функцию можно представить в виде

$$y=\begin{cases} 1, & \text{если } x>0;\\ -1, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Если сравнить с примером 1 § 2, то мы тем самым получили, что

$$\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)=\frac{|x|}{x}$$

§ 4. ГРАФИК ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Геометрическое перемножение ординат весьма затруднительно. Но анализ произведения двух функций $y=f_1(x)\cdot f_2(x)$ все же часто облегчается, если предварительно построить графики функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$.

При анализе особенное внимание следует обращать на точки, где функции y_1 и y_2 равны 0, 1 и -1.

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y=x(x^2-1)$.

Полагая $y_1=x$, $y_2=x^2-1$, строим пунктиром эти графики (рис. 102).

Функция y_1 — нечетная, а функция y_2 — четная и поэтому функция y будет нечетной. Поэтому дальнейший анализ будем проводить для $x\geqslant 0$. Имеем:

при $x=0$ значение $y_1=0$ и поэтому $y=y_1y_2=0$;

при $x=1$ значение $y_2=0$ и поэтому $y=0$;

при $0<x<1$ имеем $y_1>0$, а $y_2<0$ и поэтому $y=y_1y_2<0$;

в точке, где $y_2=1$, значение $y=y_1y_2=y_1$;

для x, при которых $y_1>1$ и $y_2>1$, величина y будет быстро расти с увеличением x (быстрее, чем y_2).

Используя эти рассуждения, получаем, что искомым графиком является кривая, изображенная на рис. 102 (сплошная линия).

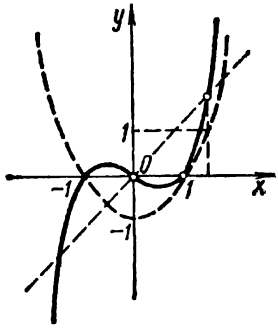


Рис. 102

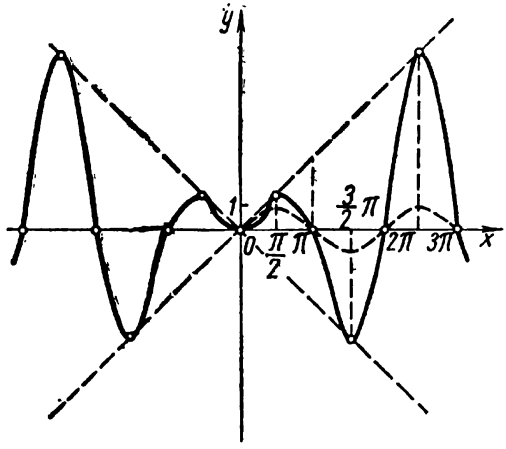


Рис. 103

Замечание. Этот график можно также получить как график суммы $y=x^3+(-x)$.

2. $y=x\sin x$.

Замечаем, что функция y как произведение двух нечетных функций будет четной функцией и поэтому анализ будем проводить для $x\geqslant 0$. Строим графики функций $y_1=x$ и $y_2=\sin x$ (рис. 103 — пунктирные линии).

В точках, где $y_2=\sin x=0$, получаем $y=y_1y_2=0$.

В точках, где $y_2=\sin x=1$, имеем $y=y_1y_2=y_1$, а в точках, где $\sin x=-1$, получим $y=y_1y_2=-y_1=-x$ (строим график функции $y_3=-x$).

Отметив ряд таких точек и учитывая, что для промежуточных точек $|y|=|x\sin x|<|x|$, получаем искомый график (рис. 103 — сплошная линия).

На промежутке $x<0$ график получается симметричным отображением относительно оси Oy.

§ 5. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y=\frac{1}{f(x)}$

Пусть требуется построить график функции $y=\frac{1}{f(x)}$, а график функции $y_1=f(x)$ нам известен (рис. 104—пунктирная линия).

Заметим, что для одних и тех же значений аргумента значения функции $y_1=f(x)$ и данной функции $y=\frac{1}{y_1}$ будут обратными по величине.

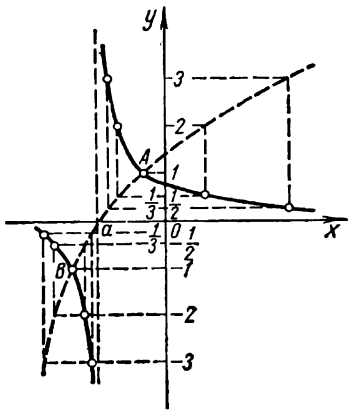


Рис. 104

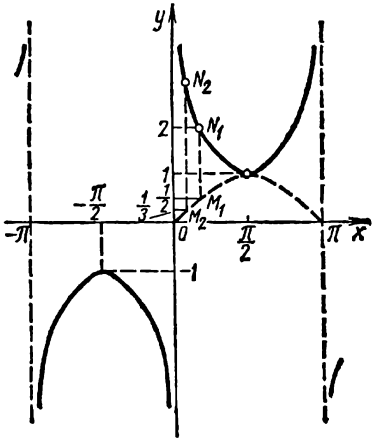


Рис. 105

Отметив несколько таких точек, соединяют их плавной кривой и учитывая поведение функции вблизи асимптот (вертикальные прямые, проходящие через точки, где $f(x)=0$), получают искомый график (рис. 104—сплошная линия).

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$.

Так как функция $y_1=\sin x$ нечетная и периодическая, то и функция $y=\frac{1}{\sin x}$ также нечетная и имеет тот же период. Поэтому достаточно построить график на промежутке $(0, \pi)$. Сначала строим график $y_1=\sin x$ для этого промежутка (рис. 105—пунктирная линия). Так как $\sin x=0$ в точках $x=0$ и $x=\pi$, то поэтому прямые $x=0$ и $x=\pi$ будут вертикальными асимптотами. Исследуем поведение функции вблизи асимптот.

При $x\to 0$ справа и $x\to\pi$ слева значение $y\to+\infty$. Точка $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ общая у обоих графиков. Далее, отмечая точки M_1 и M_2, где $\sin x=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, находим соответствующие точки N_1 и N_2, где

$\frac{1}{\sin x}=2$, 3. Соединив полученные точки плавной кривой, получим график функции $y=\frac{1}{\sin x}$ на промежутке $(0, \pi)$ и, отражая его симметрично относительно начала координат, получим график данной функции для промежутка $(-\pi, 0)$ (рис. 105), а затем в силу ее периодичности и вне промежутка $(-\pi, \pi)$

2. $y=\frac{1}{x^2-1}$.

Строим график функции $y_1=x^2-1$ (рис. 106—пунктирная линия). График функции $y_1=x^2-1$ симметричен относительно оси ординат и поэтому график искомой функции также будет симметричен относительно оси ординат.

Прямая $x=1$ будет вертикальной асимптотой: при $x\to 1$ справа значение $y\to+\infty$, а при $x\to 1$ слева значение $y\to-\infty$. Ось абсцисс будет горизонтальной асимптотой, так как при $x\to+\infty$ получаем, что $y=\frac{1}{x^2-1}\to 0$, оставаясь положительным.

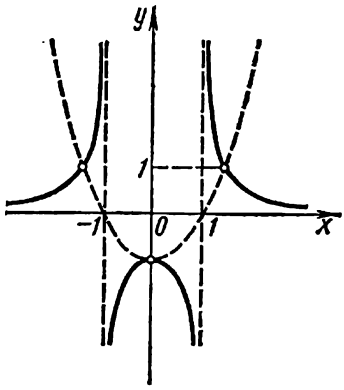


Рис. 106

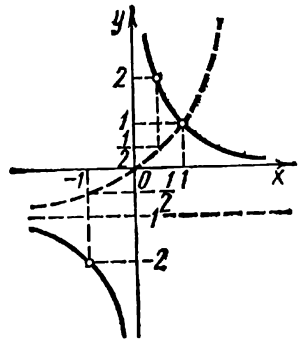


Рис. 107

Точки графика функции $y_1=x^2-1$, где $y_1=1$ и $y_1=-1$ будут общими у обоих графиков. Используя результаты исследования, получаем, что искомым графиком является кривая, изображенная на рис. 106.

3. $y=\frac{1}{2^x-1}$.

Строим вспомогательный график функции $y_1=2^x-1$ (рис. 107—пунктирная линия). Замечаем, что при $x=1$ значение $y_1=1$ и, следовательно, $y=\frac{1}{y_1}=1$, т. е. точка $(1, 1)$—общая у обоих графиков. При изменении x от 1 до $+\infty$ значения y_1 быстро и неограниченно возрастают и, следовательно, значения y будут быстро и неограниченно уменьшаться $\left(\text{при } x\to+\infty \text{ значение } y_1\to+\infty, \text{ а } y=\frac{1}{y_1}\to 0\right)$, т. е. ось Ox является горизонтальной асимптотой искомого графика. При изменении x от 1 до 0 значения y уменьшаются также от 1 до 0,

а следовательно, значения $y=\frac{1}{y_1}$ будут неограниченно возрастать от 1 до $+\infty$, т. е. ось Oy служит вертикальной асимптотой искомого графика.

При построении графика для $x<0$ возьмем за исходную точку $x=-1$, для которой $y_1=-\frac{1}{2}$, а $y=\frac{1}{y_1}=-2$. Тогда получаем:

при изменении x от -1 до 0 переменная y_1 изменяется от $\frac{1}{2}$ до 0, оставаясь отрицательной, а следовательно, значения $y=\frac{1}{y_1}$ будут изменяться от -2 до $-\infty$ (график асимптотически приближается к отрицательной полуоси Oy);

при изменении x от -1 до $-\infty$ переменная y_1 изменяется от $-\frac{1}{2}$ до -1 (вернее, стремится асимптотически к -1, оставаясь по абсолютной величине меньше 1), а следовательно, $y=\frac{1}{y_1}$ будет изменяться от -2 до -1 (вернее также стремится асимптотически к -1, но уже оставаясь по абсолютной величине больше 1).

Таким образом, искомый график имеет вид кривой, изображенной сплошной линией на рис. 107.

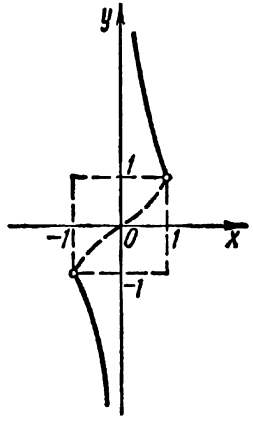


Рис. 108

4. $y=\frac{\pi}{2\arcsin x}$.

Строим график функции $y_1=\frac{2}{\pi}\arcsin x$ (рис. 108—пунктирная линия) и теперь легко строим график данной функции $y=\frac{1}{y_1}$ (рис. 108—сплошная линия).

§ 6. ГРАФИК ЧАСТНОГО ДВУХ ФУНКЦИЙ

Все сказанное о произведении двух функций в равной степени относится и к частному двух функций.

Построив на одном чертеже графики функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, путем их анализа исследуем, как в зависимости от x изменяется частное $y=\frac{y_1}{y_2}$, и тем самым получаем общий вид искомого графика, который всегда можно уточнить с помощью таблицы значений функции.

При анализе особое внимание следует обращать на точки, где значения функций y_1 и y_2 обращаются в 0, ± 1, где они равны между собой или отличаются только знаком.

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

Функция нечетная $\left(f(-x)=\frac{-x}{x^2-1}=-f(x)\right)$ и поэтому анализ будем проводить лишь для $x\geqslant 0$.

Полагая $y_1=x$ и $y_2=x^2-1$, строим графики этих функций для $x\geqslant 0$ (рис. 109—пунктирные линии).

Замечаем:

1) при $x=0$ имеем $y_1=0$ и поэтому $y=\frac{y_1}{y_2}=0$;

2) при $x=a$, где значения y_1 и y_2 отличаются только знаком, будет $y=\frac{y_1}{y_2}=-1$ (a—положительный корень уравнения $-y_1=y_2$, или $-x=x^2-1$, т. е. $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$);

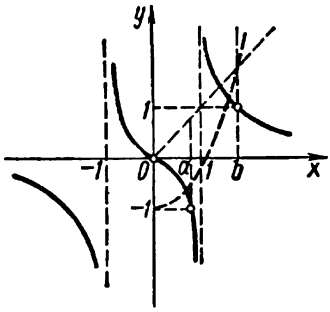


Рис. 109

3) при $x=1$ имеем $y_2=0$, а $y_1=1$ и, следовательно, прямая $x=1$—вертикальная асимптота; если $x\to 1$ слева, то $y_1\to 1$, а $y_2\to 0$, оставаясь отрицательным, и поэтому $y=\frac{y_1}{y_2}\to-\infty$; если $x\to 1$ справа, то, наоборот, $y\to+\infty$;

4) при $x=b$, где $y_1=y_2$, очевидно, $y=\frac{y_1}{y_2}=1$ (b—положительный корень уравнения $y_1=y_2$, или $x=x^2-1$, т. е. $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$);

5) при $x\to+\infty$ замечаем, что $y=\frac{x}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\to 0$, оставаясь положительным, т. е. ось абсцисс служит горизонтальной асимптотой.

Объединяя все эти замечания, получаем общий вид графика, изображенный на рис. 109 сплошной линией.

График частного двух функций $y=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ иногда удобнее строить как график произведения двух функций.

Действительно, если положить $y_1=f_1(x)$ и $y_2=\frac{1}{f_2(x)}$, то $y=y_1\cdot y_2$.

2. $y=\frac{2\cos\pi x}{x}$.

Представим функцию в виде $y=\frac{2}{x}\cdot\cos\pi x$ и построим графики вспомогательных функций $y_1=\frac{2}{x}$ и $y_2=\cos\pi x$ для $x>0$ (пунктирные линии на рис. 110), так как наша функция нечетная (произведение нечетной и четной функций). В тех точках, где $y_2=\cos\pi x=0$, будет также и $y=0$. В тех точках, где $y_2=\cos\pi x=1$ (кроме $x=0$), очевидно, $y=y_1$, а где $y_2=\cos\pi x=-1$, значение $y=-y_1=-\frac{2}{x}$. Строим для удобства график функции $y_3=-\frac{2}{x}$.

Построив ряд таких точек искомого графика, соединив их плавной кривой и учитывая поведение функции при $x \to 0$ (при $x \to 0$ справа $y_1 \to +\infty$, а $y_2 \to 1$ и, следовательно, $y \to +\infty$, оставаясь меньше y_1, т. е. ось Oy является асимптотой графика), получим искомый график для $x > 0$. Для $x < 0$ график получается симметричным отображением относительно начала координат (рис. 110).

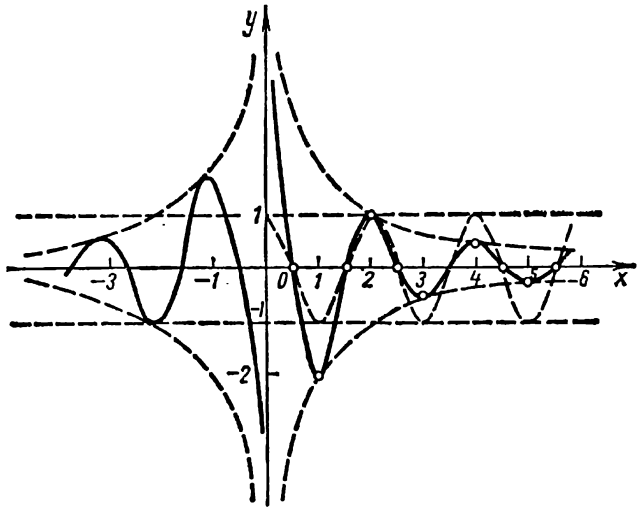


Рис. 110

Иногда проще сначала построить график функции $y_1 = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$, а затем уж построить график заданной функции $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ как график

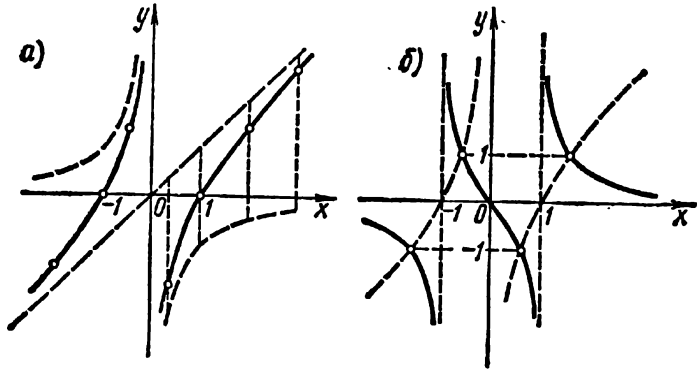


Рис. 111

функции $y = \frac{1}{y_1}$. Так, в примере 1 график функции $y_1 = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$ легко строится как график суммы двух функций (рис. 111, *а*—сплошная линия), а затем уже просто получается график заданной функции $y = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{y_1}$ (рис. 111, *б*—сплошная линия).

§ 7. ГРАФИК «ФУНКЦИИ ОТ ФУНКЦИИ»

Если в функцию $y=f(u)$ вместо аргумента u мы подставим функцию $u=\varphi(x)$ нового аргумента x*, то в результате получим так называемую «функцию от функции», или «суперпозицию» двух функций $y=f[\varphi(x)]$, или сложную функцию.

Исходную функцию $y=f(u)$ называют внешней, а промежуточную функцию $u=\varphi(x)$ — внутренней функцией.

Например, взяв функцию $y=\log_2 u$ и положив $u=x^2-1$, получим сложную функцию $y=\log_2(x^2-1)$. Термин «сложная» функция надо понимать относительно. Он указывает способ получения такой функции, а не степень сложности зависимости функции от аргумента.

Например, взяв функцию $y=u^2$ и положив $u=\frac{1}{x}$, получим сложную функцию $y=\frac{1}{x^2}$, которая на самом деле выражает довольно простую зависимость y от x.

По существу мы уже встречались с простейшими случаями сложных функций, например $y=f(x+a)$, $y=f(|x|)$ и т. д.

В этом параграфе мы рассмотрим способ построения графиков сложных функций в общем случае.

При построении графиков «функции от функции» надо в первую очередь попытаться заменить данную функциональную зависимость более простой, ей эквивалентной.

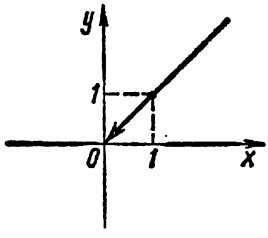


Рис. 112

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y=2^{\log_2 x}$.

Согласно основному логарифмическому тождеству данная функция равносильна функции $y=x$ при условии $x>0$ ($\log_2 x$ для отрицательных x не определен). Следовательно, искомым графиком является биссектриса I координатного угла (рис. 112). Стрелкой на рисунке указывается, что точка O — начало координат — исключается.

2. $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$.

Эта функция периодическая с основным периодом $T=\pi$, так как $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$.

Уравнение $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x$ при условии, что $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Поэтому для $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ получаем $y=x$. Следовательно, искомым графиком на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ служит отрезок $y=x$ с исключенными концевыми точ-

---

* Очевидно, что хотя бы одно значение функции $u=\varphi(x)$ должно входить в область задания функции $y=f(u)$, иначе о такой подстановке говорить бессмысленно.

ками. Вне промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ график получается периодическим продолжением (рис. 113).

3. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

Эта функция нечетная $\left(f(-x)=\arcsin\frac{-2x}{1+x^2}=-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=-f(x)\right)$ и поэтому достаточно построить график для $x\geqslant 0$.

Из данного равенства имеем $\sin y=\frac{2x}{1+x^2}$. Это равенство напо-

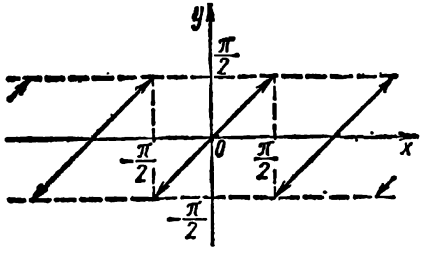


Рис. 113

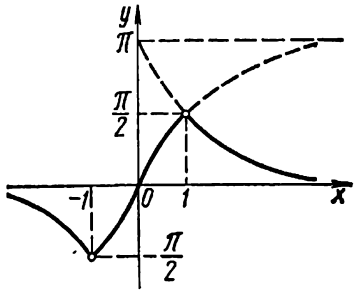


Рис. 114

минает формулу $\sin y=\frac{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}}$. Поэтому находим

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 y}}{\sin y}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}{\frac{2x}{1+x^2}}=$$

$$=\frac{1+x^2-|1-x^2|}{2x}.$$

Таким образом, получаем

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\begin{cases} x, & \text{если } 0<x\leqslant 1;\\ \frac{1}{x}, & \text{если } x\geqslant 1,\end{cases}$$

или

$$y=\begin{cases} 2\operatorname{arctg} x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=2\operatorname{arcctg} x, & \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Теперь легко строим искомый график для $x\geqslant 0$ и затем симметрическим отображением относительно начала координат получаем график и для $x<0$ (рис. 114—сплошная линия).

Если упрощение «функции от функции» $y=f[\varphi(x)]$ не достигается, то можно строить график такой функции следующим образом.

Построим на отдельных чертежах вспомогательные графики внешней и внутренней функций $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ (рис. 115, *а*, *б*).

Очевидно, для всякой точки $A(u_0, y_0)$ графика функции $y=f(u)$ (рис. 115, *а*) (но, конечно, такой, для которой значение u_0 принадлежит области изменения функции $u=\varphi(x)$) можно построить соответствующую точку $B(x_0, u_0)$ графика функции $u=\varphi(x)$ (отложив на оси Ou значение u_0, находим точку x_0; рис. 115, *б*) и затем соответствующую точку $C(x_0, y_0)$ искомого графика (рис. 115, *в*). Построив ряд таких точек и соединив их плавной кривой, получим изображение графика заданной функции, который всегда можно уточнить вычислением отдельных контрольных точек.

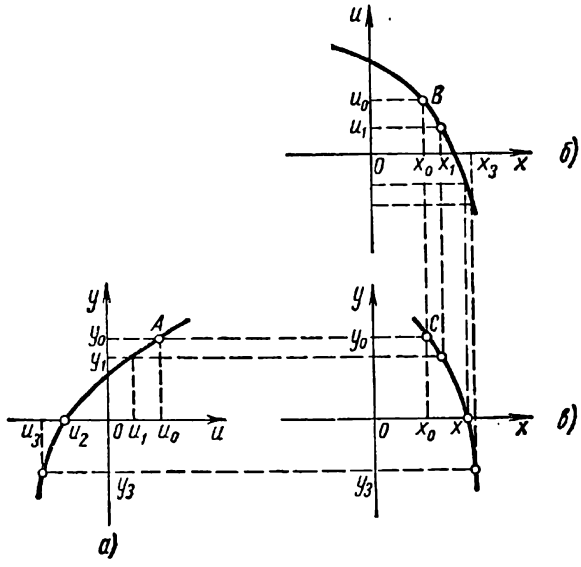


Рис. 115

Обычно строят лишь некоторые характерные точки искомого графика, а затем путем анализа специфических свойств внутренней и внешней функции получают весь график. В простых случаях можно легко обойтись без построения графика внешней функции $y=f(u)$.

4. $y=\log_2(x^2-1)$.

Полагая $u=x^2-1$, получаем $y=\log_2 u$. Строим системы координат xOu, xOy, располагая их, как показано на рис. 116, и график функции $u=x^2-1$ (рис. 116, *а*).

Заметим, что:

1) из симметрии относительно оси ординат графика функции $u=x^2-1$ следует симметрия относительно оси ординат графика функции $y=\log_2(x^2-1)$;

2) так как для $-1\leqslant x\leqslant 1$ значения $u\leqslant 0$, то на этом промежутке заданная функция не определена:

3) так как, очевидно, для $u=\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$ соответствующие значения $y=\log_2 u$ будут равны $-2, -1, 0, 1, 2$, то беря эти значения u на рис. 116, *а* и находя соответствующие значения x, переносим их на рис. 116, *б*, отмечая для них соответствующие значения y. Тем самым мы получим ряд точек искомого графика (рис. 116, *б*);

4) так как при $u\to 0$ $(u>0)$ значения $y=\log_2 u\to-\infty$, то при $x\to 1$, когда $u\to 0$, оставаясь положительным, $y=\log_2=(x^2-1)\to-\infty$;

5) при $x\to+\infty$, очевидно, $u\to+\infty$ и, следовательно, $y\to+\infty$.

Учитывая эти замечания, получаем, что искомый график имеет вид кривой, изображенной на рис. 116, *б*.

5. $y=\sin 2\log_2 x$.

Полагая $u=2\log_2 x$, получаем $y=\sin u$. Строим график функции $u=2\log_2 x$ (рис. 117, *а*). Характерными точками заданной функции являются точки, где значения y равны $0, \pm 1$, т. е. когда $u=0, \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$.

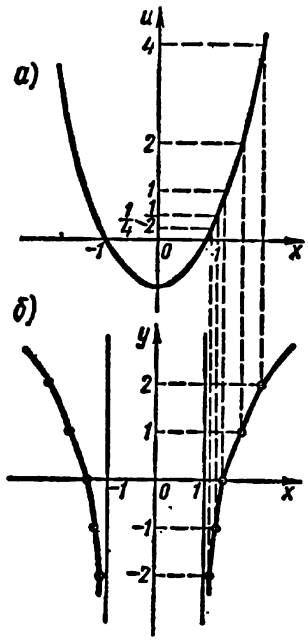


Рис. 116

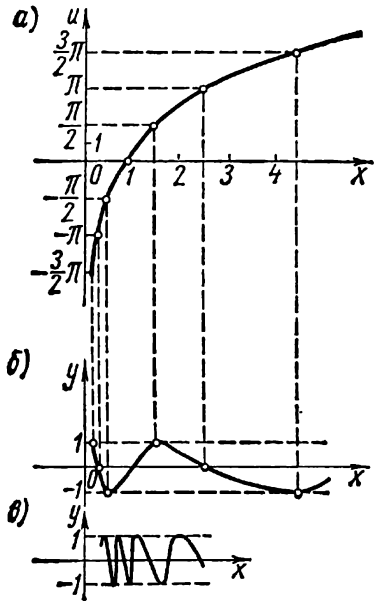


Рис. 117

На рис. 117, *а* отмечаем эти значения u, находим соответствующие значения x и строим соответствующие значения y (рис. 117, *б*). Соединяя найденные точки плавной кривой, получаем искомый график. Очевидно, график будет описывать колебательный процесс, причем с увеличением x частота колебаний уменьшается, а при стремлении x к нулю — неограниченно возрастает. Часть графика вблизи оси Oy при увеличенном горизонтальном масштабе показана на рис. 117, *в*.

В отдельных случаях для построения графика сложной функции достаточно найти область ее определения (особенно при задании функциональной зависимости громоздкими формулами).

6. $y=\sqrt{\lg\sin\pi x}$.

Функция определена лишь для x, при которых справедливо неравенство

$$\lg\sin\pi x\geqslant 0 \text{ или } \sin\pi x\geqslant 1,$$

что возможно, когда $\sin\pi x=1$, т. е. $x=2k+\frac{1}{2}$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Для этих значений x значение $y=0$. Таким образом, график состоит из отдельных точек оси Ox.

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИКОВ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ И НЕРАВЕНСТВ

Графики широко применяются для определения числа действительных решений уравнения

$$f(x)=0 \tag{1}$$

или системы

$$\begin{cases} F_1(x,\ y)=0, \\ F_2(x,\ y)=0 \end{cases} \tag{2}$$

и их приближенных значений.

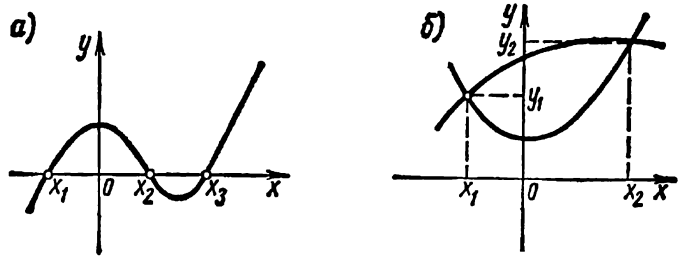


Рис. 118

Действительно, если мы построим график функции $y=f(x)$, то абсциссы точек, в которых график пересекает ось Ox, и будут действительными корнями уравнения (1) (рис. 118, *а*).

Когда построение графика функции $y=f(x)$ вызывает затруднения, нужно постараться представить уравнение в виде $f_1(x)=f_2(x)$ таким образом, чтобы было легко построить графики функций (рис. 118, *б*)

$$y=f_1(x) \text{ и } y=f_2(x).$$

Очевидно, что абсциссы точек пересечения графиков этих функций и будут действительными корнями уравнения.

Если эти графики не имеют общих точек, то уравнение не имеет действительных корней.

Чем точнее построены графики, тем меньшие можно указать интервалы, которые содержат корни.

Все сказанное относится и к решениям системы (2) (координаты точек пересечения графиков уравнений $F_1(x,\ y)=0$ и $F_2(x,\ y)=0$ будут действительными решениями системы (2)).

Пример 1. Найти графически корни следующих уравнений:

1) $x^3+x-1=0$; 2) $2-x^2=\log_2(-x)$.

Решение. 1. Запишем уравнение в виде $x^3=1-x$. Построив графики функций $y=x^3$ и $y=1-x$ (рис. 119), видим, что уравнение имеет лишь один действительный корень x_0.

2. Строим графики функций $y=2-x^2$ и $y=\log_2(-x)$ (рис. 120). Находим, что уравнение имеет один действительный корень x_0.

Пример 2. Указать число действительных корней уравнения $100 \sin \pi x = x$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sin \pi x = \frac{x}{100}$ и рассмотрим функции $y = \sin \pi x$ и $y = \frac{x}{100}$.

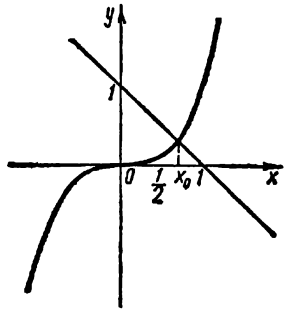


Рис. 119

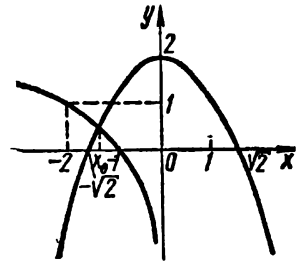


Рис. 120

Построим схематично графики этих функций (рис. 121). Графики обеих функций симметричны относительно начала координат, поэтому достаточно проанализировать решение уравнения для $x \geqslant 0$. Очевидно, как только значение функции $y = \frac{x}{100}$ станет больше 1 ($x > 100$), то уже графики наших функций пересечься не смогут ($\sin \pi x \leqslant 1$).

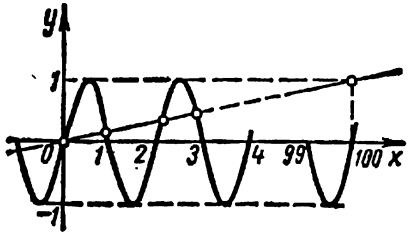


Рис. 121

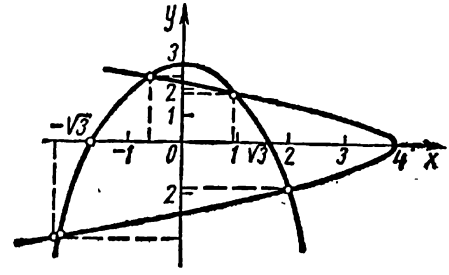


Рис. 122

Функция $y = \sin \pi x$ имеет период $T = 2$, а на отрезке длиной в период прямая пересекает синусоиду лишь в двух точках. Следовательно, на отрезке [0, 100] таких точек пересечения будет $2 \cdot \frac{100}{2} = 100$. Аналогично на отрезке $[-100, 0]$ также будет 100 точек пересечения, но так как начало координат мы просчитываем два раза, то, следовательно, искомое уравнение имеет 199 корней, один из которых 0, а остальные можно указать лишь приближенно.

Пример 3. Определить число действительных решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ x + y^2 = 4. \end{cases}$$

Решение. Каждое из уравнений системы определяет параболу ($y=3-x^2$ и $x=4-y^2$). Построив эти параболы (рис. 122), видим, что система имеет четыре действительных решения.

Иногда отдельные действительные решения легко находятся подбором. Тогда встает вопрос: не имеет ли уравнение или система других действительных решений? Часто ответ на этот вопрос можно получить прибегнув к графикам.

Пример 4. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^x=2^x.$$

Решение. Легко заметить, что уравнение имеет корень $x=2$. Представив уравнение в виде

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^x=1,$$

построим графики функций (рис. 123)

$$y=1 \text{ и } y=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^x.$$

График второй функции строим графическим сложением графиков показательных функций $y_1=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^x$ и $y_2=\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^x$

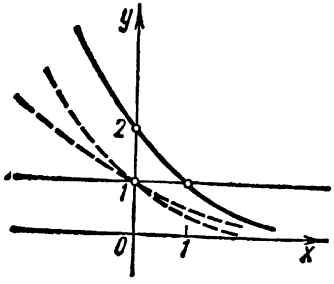


Рис. 123

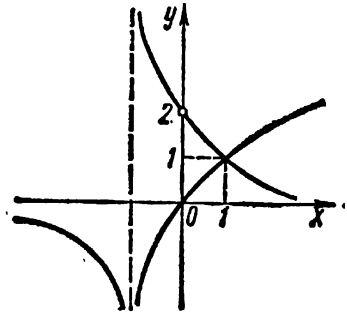


Рис. 124

с основаниями меньше 1 (на рис. 123—пунктирные линии). В силу монотонности этой функции он пересекается с прямой $y=1$ лишь в одной точке. Следовательно, $x=2$—единственный корень.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} xy=2-y, \\ y=\log_2(x+1). \end{cases}$$

Решение. Можно заметить, что система имеет решение (1, 1). Построив по известным правилам графики этих уравнений (для чего надо первое уравнение записать в виде $y=\frac{2}{x+1}$), убеждаемся, что найденное решение единственное (рис. 124).

В заключение покажем, как применяются графики к решению неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными.

Решить неравенство

$$F(x,\ y) \vee 0 \qquad (3)$$

— это значит найти все точки плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют неравенству (3).

Пример 6. Решить графически неравенство

$$x+2y-1 \geqslant 0.$$

Решение. Построим прямую $x+2y-1=0$ (рис. 125). Очевидно, сами точки прямой удовлетворяют поставленной задаче. Эта прямая делит плоскость на две части. Взяв произвольную точку $M(x_0,\ y_0)$ этой прямой и передвинув ее параллельно оси Oy вверх в положение $N_1(x_0,\ y_1)$, получим в силу равенства $x_0+2y_0-1=0$ и неравенства $y_1 > y_0$, что будет справедливо неравенство $x_0+2y_1-1>0$.

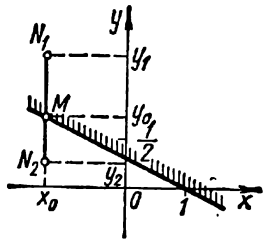


Рис. 125

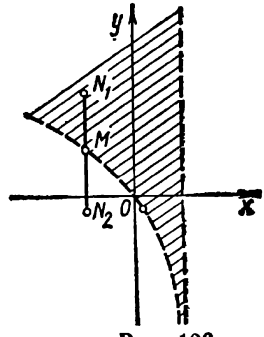


Рис. 126

Аналогично, если взять точку $N_2(x_0,\ y_2)$, где $y_2 < y_0$, то получим, что координаты этой точки будут удовлетворять неравенству $x_0+2y_2-1<0$. Следовательно, данному неравенству удовлетворяют все точки прямой и расположенные над ней (рис. 125).

Пример 7. Решить графически неравенство

$$y > \log_2(1-x).$$

Решение. Строим график функции $y=\log_2(1-x)$ (пунктирная линия на рис. 126). График нарисован пунктирной линией для того чтобы подчеркнуть тот факт, что сами точки этого графика не удовлетворяют неравенству.

Очевидно, координаты точек решения неравенства должны удовлетворять условию $1-x>0$, т. е. $x<1$, так как иначе $\log_2(1-x)$ не определен.

Взяв произвольную точку M этого графика и рассуждая аналогично предыдущему, получим, что решением неравенства будут все точки, расположенные выше логарифмической кривой и левее прямой $x=1$ (на рис. 126 эта область заштрихована).

Под решением системы неравенств

$$\begin{cases} F_1(x,\ y) \vee 0, \\ F_2(x,\ y) \vee 0 \\ \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{cases}$$

понимают все точки плоскости, координаты которых одновременно удовлетворяют всем неравенствам, входящим в систему.

Пример 8. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+y \leqslant 1, \\ y-x \geqslant -1. \end{cases}$$

Решение. Сначала решаем отдельно неравенство $y \leqslant 1-x^2$ (рис. 127, *а*) и неравенство $y \geqslant x-1$ (рис. 127, *б*).

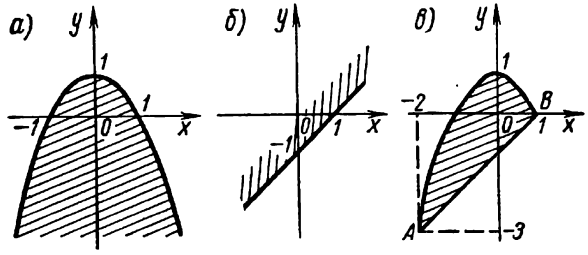


Рис. 127

Теперь, объединяя эти результаты, получаем, что искомой системе удовлетворяют все точки заштрихованной области на рис. 127, *в*. Координаты точек A и B находятся путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=1, \\ y-x=-1. \end{cases}$$

§ 9. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим некоторые задачи, связанные с функциями.

Пример 1. Найти область определения функций:

$$1)\ y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};\quad 2)\ y=\log_{\frac{1}{2}}\cos\log_2 x;$$

$$3)\ y=\arcsin\frac{2}{1-x}+\lg\frac{x^2-3x-10}{-x}.$$

Решение 1. Данная функция будет определена лишь для x, удовлетворяющих неравенству $\frac{1+x}{1-x} \geqslant 0$. Решив это неравенство, получим $-1 \leqslant x < 1$.

2. Функция определена, лишь когда $\cos \log_2 x > 0$. Очевидно, это неравенство справедливо, если

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < \log_2 x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда получаем, что область существования искомой функции состоит из бесконечного числа отдельных промежутков

$$2^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} < x < 2^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

3. Функция будет определена лишь в том случае, когда оба слагаемых одновременно определены. Следовательно, x должен удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \left|\frac{2}{1-x}\right| \leqslant 1, \\ \frac{x^2-3x-10}{-x} > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |x-1| \geqslant 2, \\ \frac{(x+2)(x-5)}{x} < 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что область определения состоит из двух промежутков: $(-2, 1]$ и $[3, 5)$.

Пример 2. Определить, является ли функция четной или нечетной:

$$1)\ f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}; \quad 2)\ f(x) = \lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right);$$

$$3)\ f(x) = \cos(x + 2) + \cos(x - 2).$$

Решение. 1. Имеем

$$f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = -f(x).$$

Следовательно, эта функция нечетная.

2. Имеем

$$f(-x) = \lg\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

На первый взгляд кажется, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, т. е. что функция не является ни четной, ни нечетной. Но на самом деле не так. Действительно, получившееся выражение можно тождественно преобразовать следующим образом:

$$\lg\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) = \lg \frac{\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right)}{\sqrt{1 + x^2} + x} =$$

$$= \lg \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = \lg 1 - \lg\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right) =$$

$$= -\lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = -f(x).$$

Следовательно, функция нечетная.

3. Имеем

$$f(-x)=\cos(-x+2)+\cos(-x-2)=$$
$$=\cos[-(x-2)]+\cos[-(x+2)]=$$
$$=\cos(x-2)+\cos(x+2)=f(x).$$

Следовательно, функция четная.

Пример 3. Указать геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям:

1) $x^2-x-2=0$; 2) $x^2-xy-2y^2+3y-1=0$; 3) $|y|=y\cos\pi x$;
4) $\sin^2\pi x+\sin^2\pi y=0$; 5) $y+|y|=x+|x|$.

Решение. 1. Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x=2$ и $x=-1$ и, следовательно, искомым геометрическим местом служат две прямые, параллельные оси Oy (рис. 128).

2. Решая это уравнение как квадратное относительно x, найдем, что оно равносильно совокупности двух уравнений $x+y-1=0$ и $x-2y+1=0$. Следовательно, искомое геометрическое место состоит из двух прямых (рис. 129).

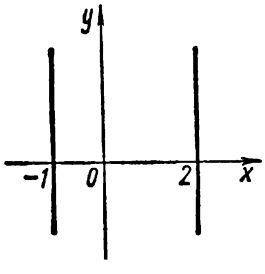


Рис. 128

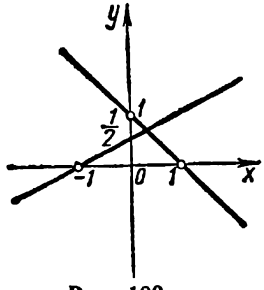


Рис. 129

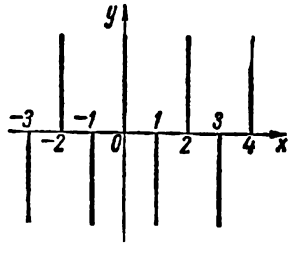


Рис. 130

3. Имеем:

при $y=0$ уравнению удовлетворяют любые x;

при $y>0$ уравнению удовлетворяют все x, для которых $\cos\pi x=1$, т. е. $x=2k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

при $y<0$ уравнение равносильно уравнению $\cos\pi x=-1$, или $x=2n+1$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Следовательно, искомым геометрическим местом является ось Ox $(y=0)$ и семейства прямых: $x=2k$ при условии, что $y>0$, и $x=2n+1$ при условии, что $y<0$ (рис. 130).

4. Сумма квадратов двух действительных чисел может равняться нулю лишь тогда, когда эти числа одновременно равны нулю. Следовательно, искомым геометрическим местом служат все точки, для которых одновременно $\sin\pi x=0$ и $\sin\pi y=0$, т. е. точки с координатами $x=k$ и $y=n$, где k и n — любые целые числа (рис. 131).

5. Для x и y из I квадранта $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ уравнение равносильно уравнению $y+y=x+x$, или $y=x$. Это — биссектриса I координатного угла.

Если $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$ (II квадрант), то получаем $y+y=x-x$, т. е. $y=0$.

Если $x\leqslant 0$ и $y\leqslant 0$ (III квадрант), то имеем тождество.

Наконец, если $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ (IV квадрант), то уравнение принимает вид $y - y = x + x$, или $x = 0$.

Следовательно, искомое геометрическое место состоит из биссектрисы I координатного угла и всех точек плоскости III квадранта, включая его границы (рис. 132).

Пример 4. Найти a, b, c, если функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наибольшее значение $y = 2$ при $x = 1$, а при $x = -1$ значение функции $y = -2$.

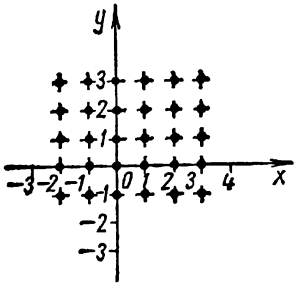


Рис. 131

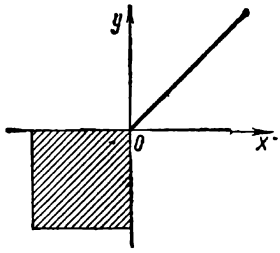


Рис. 132

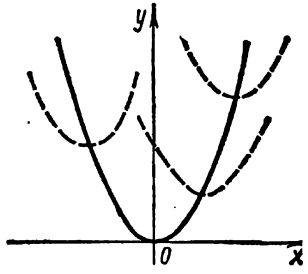


Рис. 133

Решение. Графиком искомой функции служит парабола, вершина которой находится в точке B (1, 2) и, следовательно, функцию можно представить в виде

$$y = a(x-1)^2 + 2.$$

Подставив в это уравнение $x = -1$ и $y = -2$, найдем, что $a = -1$. Таким образом, $y = -(x-1)^2 + 2$, или $y = -x^2 + 2x + 1$ и, значит, $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$.

Пример 5. Какую линию описывает вершина параболы $y = x^2 + 2tx + 2t^2$, когда параметр t принимает любые действительные значения?

Решение. Выделяя полный квадрат, получаем

$$y = (x+t)^2 + t^2.$$

Следовательно, координаты вершины параболы находятся в зависимости от t из условий $x = -t$, $y = t^2$. Исключая из этих равенств параметр t, получаем, что эти координаты удовлетворяют уравнению $y = x^2$, графиком которого также служит парабола. На рис. 133 эта парабола изображена сплошной линией, а пунктиром изображено несколько положений параболы $y = x^2 + 2tx + 2t^2$ при различных значениях t.

ГЛАВА XV

ПРИЛОЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ФИГУР

Основными элементами треугольника называются его стороны и углы.

Из признаков равенства треугольников, доказываемых в геометрии, вытекает, что последние определяются тремя основными элементами, из которых хотя бы один должен быть стороной. В частности, прямоугольные и равнобедренные треугольники определяются двумя основными элементами, из которых хотя бы один должен быть стороной, а равносторонний треугольник определяется одним основным элементом—его стороной. Отсюда следует, что задав необходимое число основных элементов, можно по ним вычислить все остальные основные его элементы.

Чтобы решить эту задачу, необходимо знать различные соотношения между углами и сторонами треугольника.

Прежде всего перечислим все те соотношения между элементами треугольника, которые выводятся в геометрии как в виде равенств, так и в виде неравенств.

1. *Сумма внутренних углов треугольника равна* 180°. *Каждый внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных.*

2. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и обратно. Стороны треугольника, лежащие против равных углов, равны и обратно—против равных углов лежат равные стороны. Катет, лежащий против угла в* 30°, *равен половине гипотенузы.*

3. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности.*

4. *Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Каждый катет является средним геометрическим между всей гипотенузой и проекцией указанного катета на эту гипотенузу.*

Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла, является средним геометрическим между отрезками, на которые он делит гипотенузу.

5. *Квадрат стороны, лежащей против острого угла в треугольнике, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения известной стороны на проекцию на нее другой известной стороны.*

Соответствующая теорема дается для квадрата стороны, лежащей против тупого угла.

Помимо приведенных соотношений между углами и сторонами треугольника, доказывается ряд свойств его специальных линий: высот, биссектрис, медиан, перпендикуляров из середин сторон, средних линий и т. д. Перечислим и их.

6. *Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.*

7. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, равноудаленной от сторон треугольника. Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности. Кроме того, биссектриса внутреннего угла делит противолежащую сторону на части, пропорциональные двум другим прилежащим сторонам.*

8. *Все медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая отсекает от каждой медианы ее две трети, считая от вершины.*

9. *Все три высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

10. *Перпендикуляры из середин сторон также пересекаются в одной точке, равноудаленной от всех вершин треугольника. Эта точка является центром окружности, описанной около треугольника.*

Анализируя все эти соотношения, легко увидеть, что с их помощью решаются лишь специально подобранные задачи. Например, можно по двум сторонам прямоугольного треугольника найти третью сторону (теорема Пифагора) или по заданному углу в 30, 60 или 45° и стороне прямоугольного треугольника найти все остальные его элементы. Что касается косоугольного треугольника, то приведенная здесь теорема «работает» лишь в том случае, когда известна величина проекции одной данной стороны на другую (ее можно вычислить либо когда дана соответствующая высота, либо угол между известными сторонами равен 30 или 45, или 60°).

В следующих параграфах получим ряд соотношений между сторонами и углами произвольного треугольника.

§ 1. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Выражения тригонометрических функций острого угла через стороны прямоугольного треугольника (см. гл. IX, § 5) позволяют ввести следующие соотношения между его углами и сторонами.

1. Из формул $\sin A = \frac{a}{c}$ и $\cos A = \frac{b}{c}$ следует, что $a = c \cdot \sin A$ и $b = c \cdot \cos A$, т. е. *катет равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или косинус прилежащего к определяемому катету угла.*

2. Из формул $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ и $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$ следует, что $a = b \cdot \operatorname{tg} A$ и $b = a \cdot \operatorname{ctg} A$, т. е. *катет равен произведению другого катета на тангенс противолежащего или котангенс прилежащего к определяемому катету угла.*

Простейшая задача решения треугольника состоит в том, чтобы по минимальному числу основных элементов, определяющих этот треугольник, найти остальные. Прямоугольный треугольник определяется двумя элементами; строя различные комбинации из шести основных элементов по два, среди которых имеется хотя бы одна сторона, мы получаем следующие четыре так называемые основные случаи решения прямоугольных треугольников.

I случай. Даны катеты a и b. Найти гипотенузу c и острые углы A и B.

Решение. 1. Используя формулу $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, находим угол A, затем угол B: $B = 90° - A$.

2. Гипотенузу c находим по формуле $c = \frac{a}{\sin \cdot A}$. Подставляя в эти формулы численные значения данных a и b, вычисляем значение $\operatorname{tg} A$. Угол A находим по таблицам. (Например, по таблице Брадиса.) Затем находим значения угла B и гипотенузы c.

Чтобы убедиться в правильности расчетов, полезно для контроля взять одну из формул, не использованную в ходе решения и содержащую искомые величины. В первом случае можно взять, например, теорему Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

II случай. Даны катет a и гипотенуза c. Найти катет b и острые углы A и B.

Решение. 1. Используя формулу $\sin A = \frac{a}{c}$, находим угол A, затем B: $B = 90° - A$.

2. Катет b находим по формуле $b = c \cdot \sin B$.

Формула для проверки: $c^2 = a^2 + b^2$.

III случай. Даны катет a и острый угол B. Найти катет b, гипотенузу c и угол A.

Решение. 1. Используя формулы $A = 90° - B$ и $c = \frac{a}{\cos B}$, находим A и c.

2. Катет b находим по формуле $b = a \cdot \operatorname{tg} B$. Формула для проверки: $a^2 + b^2 = c^2$.

IV случай. Даны гипотенуза c и острый угол B. Найти катеты a и b и угол A.

Решение. 1. Используя формулы $a = c \cdot \sin A$ и $B = 90° - A$, находим a и B.

2. Катет b находим по формуле $b = c \cdot \cos A$. Формула для проверки: $a^2 + b^2 = c^2$.

Отметим, что предложенные способы решения этих случаев так же как и формулы для проверки не являются единственными. Важно лишь, что в качестве контроля нужно брать формулу, не использованную при ее решении.

§ 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ЛЮБОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема синусов. *В любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла есть величина постоянная, равная диаметру описанной окружности, т. е.*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \qquad (1)$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда угол A — острый. Опишем вокруг треугольника ABC окружность

(рис. 134) и из вершины B (или C) проведем диаметр BD. Соединим точки D и C и рассмотрим треугольник BCD. В этом треугольнике $\angle BCD = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, а $\angle BDC = A$, так как эти вписанные в окружность углы опираются на одну и ту же дугу.

Из прямоугольного треугольника BCD следует, что неизвестный катет BC равен гипотенузе BD, умноженной на синус противолежащего угла BDC, т. е. $BC = BD \cdot \sin \angle BDC$, или

$$\frac{a}{\sin A} = 2R,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются остальные две формулы для $B < 90°$ и $C < 90°$.

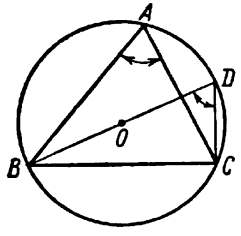


Рис. 134

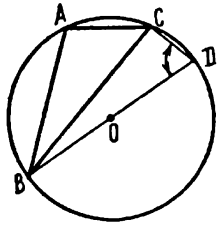


Рис. 135

2. Пусть теперь угол A — тупой. Описав вокруг треугольника ABC окружность (рис. 135), проведем из вершины B (или C) диаметр BD и рассмотрим прямоугольный треугольник BCD, где $\angle BCD = 90°$. Из этого треугольника имеем

$$BC = BD \cdot \sin \angle BDC.$$

Но $\angle BAC + \angle BDC = 180°$, следовательно,

$$\sin \angle BDC = \sin (180° - \angle BAC) = \sin \angle BAC = \sin A,$$

а поэтому $BC = BD \cdot \sin A$, или $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

3. Если угол A — прямой, то в прямоугольном треугольнике ABC сторона a является гипотенузой и, следовательно, $a = 2R \sin 90°$, т. е. теорема остается верной и в этом случае.

Замечание. Теорема синусов устанавливает связь между радиусом описанной окружности и основными элементами треугольника:

$$a = 2R \cdot \sin A,\ b = 2R \cdot \sin B,\ c = 2R \cdot \sin C.$$

Теорема косинусов. *Квадрат стороны любого треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без их удвоенного произведения на косинус угла, заключенного между ними, т. е.*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \qquad (2)$$

Доказательство. 1. Пусть угол A—острый. В треугольнике ABC проведем высоту BD (рис. 136) и рассмотрим полученный при этом прямоугольный треугольник BDC. В этом треугольнике

$$BC^2 = DC^2 + BD^2,$$

или

$$a^2 = (b - b_1)^2 + h^2 \qquad (3)$$

(обозначения ясны из рис. 136).

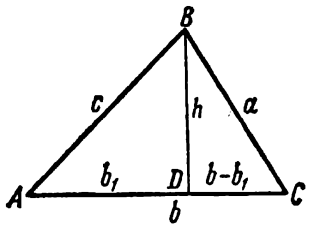


Рис. 136

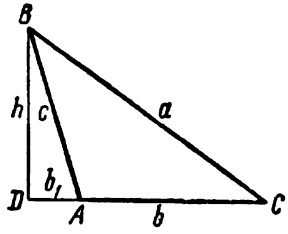


Рис. 137

Выразим теперь величины b_1 и h через основные элементы треугольника ABC. Рассмотрим треугольник ABD. Имеем

$$h = c \cdot \sin A, \qquad (*)$$

$$b_1 = c \cdot \cos A. \qquad (**)$$

Заменив h и b_1 в выражении (3) их значениями (*) и (**), найдем, что

$$a^2 = (b - c \cdot \cos A)^2 + c^2 \cdot \sin^2 A,$$

откуда после очевидных упрощений получим

$$a^2 = b^2 - 2bc \cdot \cos A + c^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть угол A—тупой. Из вершины B опустим высоту BD на продолжение стороны AC (рис. 137).

Из прямоугольного треугольника BDC имеем

$$BC^2 = BD^2 + DC^2,$$

или

$$a^2 = h^2 + (b + b_1)^2. \qquad (4)$$

Величины h и b_1 выразим через основные элементы треугольника ABC. Рассматривая треугольник ABD, имеем

$$h = c \cdot \sin (180° - A) = c \cdot \sin A, \qquad (***)$$

$$b_1 = c \cdot \cos (180° - A) = -c \cdot \cos A. \qquad (****)$$

Заменив h и b_1 в выражении (4) их значениями (***) и (****), после необходимых преобразований получим

$$a^2 = c^2 \sin^2 A + (b - c \cos A)^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

что и требовалось доказать.

3. Пусть угол A — прямой. В этом случае $\cos A = 0$ и, следовательно,

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2. \tag{5}$$

Но по теореме Пифагора

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{6}$$

Сравнивая соотношения (5) и (6), получим

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

что и требовалось доказать.

Читателю, знакомому с элементами векторной алгебры, предлагаем другой вывод теоремы косинусов.

Рассмотрим векторы $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$ (рис. 138). Очевидно, что

$$\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} \text{ и } \overline{CB}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CB} = (\overline{AB} - \overline{AC})^2. \tag{7}$$

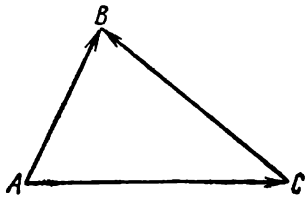


Рис. 138

Здесь $\overline{CB} \cdot \overline{CB}$ — скалярное произведение вектора $\overline{CB}$ на себя. Согласно свойствам скалярного произведения

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AC}^2. \tag{8}$$

Учитывая, что $\overline{CB}^2 = a^2$, $\overline{AB} = c^2$, $\overline{AC}^2 = b^2$ и $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = c \cdot b \cdot \cos A$, перепишем равенство (8):

$$a^2 = c^2 - 2bc \cdot \cos A + b^2,$$

что и требовалось доказать.

Записав формулу (2) в виде

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \tag{9}$$

замечаем, что:

1) если $a^2 = b^2 + c^2$, то $\cos A = 0$ и $A = 90°$. Следовательно, если квадрат сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник — прямоугольный;

2) если $a^2 < b^2 + c^2$, то $\cos A > 0$ и $A < 90°$, т. е. в этом случае треугольник — остроугольный;

3) если $a^2 > b^2 + c^2$, то $\cos A < 0$ и $A > 90°$, т. е. в этом случае треугольник — тупоугольный.

Весьма полезной при решении задач является следующая формула, выражающая тангенс угла через стороны треугольника. Последняя в отличие от формулы косинусов приведена к виду, удобному для логарифмирования.

Теорема тангенсов. *В любом треугольнике*

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \tag{10}$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ *— его полупериметр.*

Доказательство. Из теоремы косинусов вытекает, что

$$1+\cos A=\frac{2bc-a^2+b^2+c^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}=$$

$$=\frac{2p\cdot 2(p-a)}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc}, \qquad (*)$$

$$1-\cos A=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}. \qquad (**)$$

Из равенств (*) и (**) вытекает, что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Радиус вписанной в треугольник окружности может быть вычислен по формуле*

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \qquad (11)$$

Доказательство. Соединим центр вписанной окружности с вершинами треугольника ABC (рис. 139), в котором

$$OD=OE=OF=r.$$

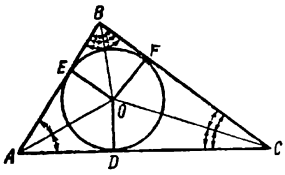


Рис. 139

Из треугольника AOD следует, что $r=OD=AD\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Для нахождения AD заметим, что $AD=AE$, $BE=BF$ и $FC=CD$ как отрезки касательных, приведенных к окружности из одной точки. Поэтому

$$2p=a+b+c=2AD+2CF+2BF=2AD+2(BF+FC)=2AD+2a.$$

Отсюда следует, что $AD=p-a$. Используя формулу (10), имеем

$$r=AD\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{(p-a)p}}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

что и требовалось доказать.

Ниже будет дано выражение радиуса описанной окружности через стороны треугольника.

§ 3. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Так же как и для прямоугольных треугольников, существуют четыре основных случая решения косоугольных треугольников. Рассмотрим каждый из них.

I случай. Даны стороны a, b и c. Найти углы A, B, C.

Решение. Задача имеет единственное решение при условии, что $a+b>c$, где $b\leqslant a\leqslant c$. Используя теорему тангенсов (10),

находим

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Формула для проверки: $A+B+C=180°$.

Заметим, что угол A можно найти и по теореме косинусов.

II случай. Даны две стороны a и b и угол C, заключенный между ними. Найти сторону c и углы A и B.

Решение. 1. Используя теорему косинусов, находим сторону c:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos C}.$$

2. Используя теорему синусов, находим угол B. Пусть $a\geqslant b$. Тогда угол B острый и

$$\sin B=\frac{b\sin C}{c},\quad A=180°-(B+C).$$

Формула для проверки: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

Замечание. Угол A может быть острым или тупым, если $C<90°$. Поэтому, если искать сначала угол A (по формуле $\sin A=\frac{a\sin C}{c}$), то без дополнительных исследований мы не сможем однозначно определить значение угла A по известному значению его синуса.

III случай. Даны две стороны a и b и угол A, лежащий против одной из известных сторон. Найти сторону c и углы B и C.

Решение. 1. Используя теорему синусов, находим угол B, а затем C:

$$\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a};\quad C=180°-(B+A).$$

2. Вторично используя теорему синусов, находим сторону c:

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}.$$

Формула для проверки: $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos A}$.

Исследование решения: 1) если $a>b$, то $a>b\cdot\sin A$ и $\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a}<1$. Задача имеет решение. Это решение единственно, так как угол B острый ($a>b$);

2) если $a<b$, то задача имеет решение при условии, что $b\cdot\sin A\leqslant a$. При этом имеют место две возможности: а) если $a=b\cdot\sin A$, то $\sin B=1$ и $B=90°$—задача имеет единственное решение; б) если $b\cdot\sin A<a$, то задача имеет два решения, так как для угла B нужно брать два значения (по известному значению его синуса).

Если же $b \cdot \sin A > a$, то $\sin B > 1$ и задача не имеет решения;

3) если $a = b$, то $A < 90°$, $b \cdot \sin A < a$ и задача имеет единственное решение.

IV случай. Даны сторона a и прилежащие к ней углы B и C. Найти стороны b, c и угол A.

Решение. 1. Находим $A = 180° - (B + C)$.

2. Дважды применяя теорему синусов, находим b и c:

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Формула для проверки: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$.

Предложенные способы решения каждого из этих случаев не являются единственными. Так, например, в I случае можно сначала найти r, а затем искать углы по формулам:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c},$$

непосредственно вытекающим из формул (10) и (11). Можно также искать $\cos A$ по теореме косинусов, а затем $\sin B$ по теореме синусов и т. д.

§ 4. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Всякое измерение представляет собой сравнение измеряемой величины с некоторой величиной той же размерности.

В частности, при измерении площадей измеряемую фигуру сравнивают с единичным квадратом, площадь которого принимают за единицу площади в соответствующей размерности (один квадратный сантиметр, один квадратный метр и т. д., или 1 см^2, 1 м^2 и т. д.). При этом измерение должно удовлетворять трем условиям:

1. Равные фигуры имеют равные площади.

2. Если фигура F содержится в фигуре G, то

$$\text{пл. } F \leqslant \text{пл. } G.$$

3. Если фигура F составлена из двух примыкающих друг к другу фигур P и G без общих внутренних точек, то

$$\text{пл. } F = \text{пл. } P + \text{пл. } G.$$

Поэтому, если фигура F состоит из конечного числа n примыкающих друг к другу единичных квадратов, то пл. $F = n$ ед^2. Если каждую из двух смежных сторон единичного квадрата разделить на n (n — целое) равных частей и через точки деления провести прямые, перпендикулярные этим сторонам, то единичный квадрат разделится на n^2 малых квадратов со стороной $\frac{1}{n}$. Согласно свойствам 1 и 3 отсюда следует, что площадь квадрата со стороной $\frac{1}{n}$ равна $\frac{1}{n^2}$ ед^2. Подобным рассуждением получаем, что площадь квадрата со стороной $\frac{p}{q}$ (p и q — целые) равна $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ ед^2.

Пусть F — плоская фигура. Наложим на нее квадратную сетку (рис. 140), состоящую из смежных квадратов со стороной $\frac{1}{10^n}$ (сетка ранга n). Фигуру, образованную из всех квадратов сетки ранга n, содержащихся в F, обозначим через $\underline{F}_n$, а сумму площадей всех составляющих ее квадратов — через $\underline{S}_n$. В силу свойства 3 $\underline{S}_n$ — площадь фигуры $\underline{F}_n$. Фигура $\underline{F}_n$ называется *входящей фигурой* ранга n.

Фигуру, образованную из всех квадратов сетки, имеющих с F хотя бы одну точку, обозначим через $\overline{F}_n$, ее площадь — через $\overline{S}_n$. Фигура $\overline{F}_n$ называется *выходящей фигурой* ранга n.

Очевидно, фигура $\underline{F}_n$ содержится в F, а F содержится в $\overline{F}_n$, причем $\underline{F}_n$ и $\overline{F}_n$ совпадают в том и только в том случае, если

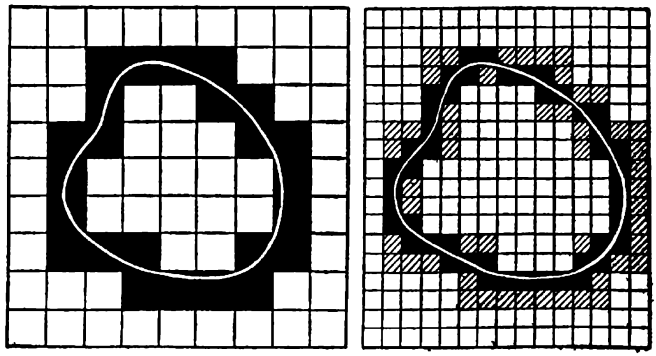


Рис. 140

любая из них совпадает с F. В этом случае полагаем, что

$$\text{пл. } F = \underline{S}_n = \overline{S}_n.$$

Если не существует целого n, при котором $\underline{F}_n$ совпадает с F, то, полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим бесконечную систему входящих и выходящих фигур

$$\underline{F}_1, \underline{F}_2, \underline{F}_3, \ldots, \underline{F}_n, \ldots \text{ и } \overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_n, \ldots,$$

площади которых образуют две числовые последовательности

$$\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}_3, \ldots, \underline{S}_n, \ldots \text{ и } \overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3, \ldots, \overline{S}_n, \ldots.$$

Легко заметить, что каждая входящая фигура ранга k содержит в себе все входящие фигуры меньшего ранга (рис. 140), поэтому

$\underline{S}_{k-1} \leqslant \underline{S}_k$. Любая входящая фигура содержится в $\overline{F}_1$, т. е. все $\underline{S}_k \leqslant \overline{S}_1$.

Таким образом, последовательность $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}_3, \ldots, \underline{S}_n, \ldots$ монотонно возрастает и ограничена, а потому имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n$.

Выходящая фигура ранга k содержится во всех выходящих фигурах меньшего ранга (рис. 140). Поэтому $\overline{S}_{k-1} \geqslant \overline{S}_k$ и $\overline{S}_k \geqslant \underline{S}_1$ для любого k. Значит, последовательность $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_n, \ldots$, как монотонно убывающая и ограниченная, имеет конечный предел, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n$.

Если оба предела совпадают, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = S$, то число S, выраженное в соответствующих квадратных единицах, и принимают за площадь фигуры F.

Определенная таким образом площадь удовлетворяет всем условиям 1, 2, 3, сформулированным в начале параграфа.

Очевидно, что при измерении площади фигуры F ее можно сравнивать не только с квадратом, или с фигурами, составленными из квадратов, но также и с любыми фигурами, площади которых нам известны. После того, как нам стала известна площадь многоугольников, последние можно брать в качестве входящих и выходящих фигур. Например, при вычислении площади круга мы в качестве входящих фигур берем правильные вписанные многоугольники, а в качестве выходящих — правильные описанные многоугольники. Площадь круга и определяется как общий предел их площадей при неограниченном удвоении числа сторон этих многоугольников.

§ 5. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема 1. *Площадь прямоугольника равна произведению длин двух его смежных сторон (двух измерений), т. е.*

$$S = a \cdot b. \tag{12}$$

Доказательство. Случай 1. Пусть a и b рациональные: $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{q}$. Покроем прямоугольник сеткой из квадратов со стороной равной $\frac{1}{q}$ и такой, что две взаимно перпендикулярные прямые сетки совпадают с двумя смежными сторонами прямоугольника. Очевидно, что в прямоугольнике полностью уложится $p \cdot r$ таких квадратов. Так как площадь каждого квадрата равна $\frac{1}{q^2}$ ед^2, то площадь всего прямоугольника равна произведению

$$p \cdot r \cdot \frac{1}{q^2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q} = a \cdot b \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Случай 2. Одно или оба числа a и b иррациональны. Пусть $\underline{\alpha}_n$ и $\overline{\alpha}_n$ — десятичные приближения числа a по недостатку и избытку с точностью $\frac{1}{10^n}$ соответственно, а $\underline{\beta}_n$ и $\overline{\beta}_n$ — аналогичные приближения числа b. На сторонах AB и AD данного прямоугольника отложим отрезки $AB_1=\underline{\alpha}_n$, $AB_2=\overline{\alpha}_n$, $AD_1=\underline{\beta}_n$, $AD_2=\overline{\beta}_n$ и построим прямоугольники $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$. Так как измерения этих прямоугольников рациональны, то по случаю 1

$$\text{пл. } AB_1C_1D_1=\underline{\alpha}_n\cdot\underline{\beta}_n \text{ и пл. } AB_2C_2D_2=\overline{\alpha}_n\cdot\overline{\beta}_n.$$

Очевидно, далее, что $AB_1C_1D_1$ содержится в $ABCD$, т. е. является входящей фигурой, а $AB_2C_2D_2$ содержит $ABCD$ и, следовательно, является выходящей фигурой.

Таким образом, $\underline{S}_n=\underline{\alpha}_n\cdot\underline{\beta}_n$; $\overline{S}_n=\overline{\alpha}_n\cdot\overline{\beta}_n$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}_n=\lim\underline{\alpha}_n\cdot\underline{\beta}_n=ab$$

и

$$\lim\overline{S}_n=\lim\overline{\alpha}_n\cdot\overline{\beta}_n=ab,$$

то согласно определению площади (§ 4) имеем

$$S=\text{пл. } ABCD=ab.$$

Теорема 2. *Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту:*

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h. \tag{13}$$

Доказательство. Допустим для простоты, что углы B и C — острые. Дополним данный треугольник до прямоугольника $BCDE$ с основанием a и высотой h, как это указано на рис. 141. Прямоугольник $BCDE$ составлен из четырех треугольников BEA, BAF, FAC и CAD, причем $\triangle BEA=\triangle BAF$, а $\triangle FAC=\triangle CAD$. Согласно свойствам 3 и 1

$$\text{пл. } BCDE=\text{пл. } BEA+\text{пл. } BAF+\text{пл. } FAC+\text{пл. } CAD=$$

$$=2\text{ пл. } BAF+2\text{ пл. } FAC=2(\text{пл. } BAF+\text{пл. } FAC)=2\text{ пл. } ABC.$$

Следовательно,

$$\text{пл.}\triangle BAC=S=\frac{1}{2}\text{ пл. } BCDE=\frac{1}{2}a\cdot h,$$

что и требовалось доказать.

Предоставляем читателю получить доказательство в случае, когда A или C — тупой угол.

Используя теорему 2 и соотношения между элементами треугольника, получим еще несколько формул для вычисления его площади.

I. *Площадь треугольника равна произведению двух его сторон на синус угла, заключенного между ними:*

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin C. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая.

1. Угол C — острый. Опустив из вершины B высоту $BD=h$, рассмотрим прямоугольный треугольник BDC (рис. 142). Имеем

$$BD=h=a\cdot\sin C.$$

Тогда

$$\text{пл. }\triangle ABC=\frac{1}{2}b\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin C.$$

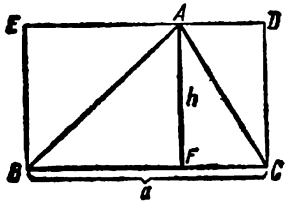


Рис. 141

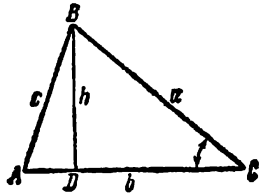


Рис. 142

2. Угол C — тупой (рис. 143). Опустив из вершины B высоту $BD=h$ на продолжение стороны AC, рассмотрим прямоугольный треугольник CBD. Имеем

$$BD=h=a\cdot\sin(180^\circ-C)=a\sin C.$$

Тогда

$$\text{пл. }\triangle ABC=\frac{1}{2}b\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin C.$$

3. Угол C — прямой. Тогда $\sin C=1$ и $h=a$,

$$\text{пл. }\triangle ABC=\frac{1}{2}b\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin C.$$

II. *Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности:*

$$S=p\cdot r, \tag{15}$$

где

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Доказательство. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, r — ее радиус (рис. 144). Соединив центр O с вершинами A, B и C, получим треугольники AOC, BOC и AOB с высотами, равными r. Согласно свойству 3 площадей

$$\text{пл. }\triangle ABC=\text{пл. }\triangle AOC+\text{пл. }\triangle AOB+\text{пл. }\triangle BOC=$$
$$=\frac{1}{2}b\cdot r+\frac{1}{2}c\cdot r+\frac{1}{2}a\cdot r=\frac{r}{2}(a+b+c)=p\cdot r.$$

III. *Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности, т. е.*

$$S=\frac{abc}{4R}. \tag{16}$$

Доказательство. Согласно формуле (14)

$$\text{пл. } \triangle ABC=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin C.$$

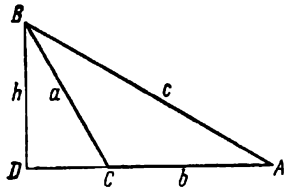


Рис. 143

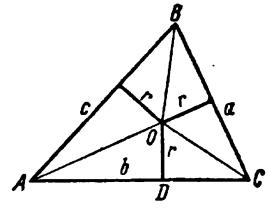


Рис. 144

Исключим из последнего равенства $\sin C$. Так как

$$\sin C=\frac{c}{2R},$$

то

$$\text{пл. } \triangle ABC=\frac{abc}{4R}.$$

Теорема 3 (формула Герона). *Площадь треугольника со сторонами a, b, c и полупериметром p равна выражению*

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{17}$$

Доказательство. Согласно формуле (15) имеем

$$S=\text{пл. } \triangle ABC=p\cdot r.$$

Выражая r через стороны треугольника a, b и c, получаем (см. формулу (11))

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Тогда

$$S=p\cdot r=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Формулы (15) и (16) могут быть использованы для вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей, если известны стороны треугольника. (Тогда его площадь можно вычислить по формуле Герона.)

§ 6. ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА И МНОГОУГОЛЬНИКА

Теорема 1. *Площадь любого четырехугольника* (рис. 145) *равна половине произведения его диагоналей на синус угла, заключенного между ними, т. е.*

$$S = \text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha. \tag{18}$$

Доказательство. Четырехугольник $ABCD$ диагоналями AC и BD разбивается на четыре треугольника AOB, BOC, COD и AOD, причем

$$\text{пл. } AOB = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha, \quad \text{пл. } BOC = \frac{1}{2} BO \cdot CO \cdot \sin(180° - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} BO \cdot CO \cdot \sin\alpha, \quad \text{пл. } COD = \frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin\alpha$$

и

$$\text{пл. } AOD = \frac{1}{2} AO \cdot DO \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} AO \cdot DO \cdot \sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} \sin\alpha \,[(AO + CO)\, BO + DO\,(AO + CO)] =$$

$$= \frac{1}{2} \sin\alpha\,(AO + CO)\,(BO + DO).$$

Замечая, что $AO + CO = AC$ и $BO + DO = BC$, получаем

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha.$$

Следствие. *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.*

Доказательство вытекает из формулы (18), если учесть, что угол $\alpha = 90°$, т. е. $\sin\alpha = 1$.

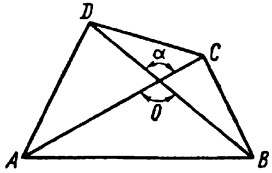


Рис. 145

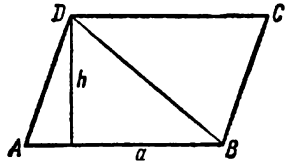


Рис. 146

Теорема 2. *Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.*

Доказательство. Диагональ BD (рис. 146) делит данный параллелограмм с основанием a и высотой h на два равных треугольника ABD и DBC. Следовательно,

$$\text{пл. } ABCD = 2 \text{ пл. } ABD = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = a \cdot h.$$

Следствие. *Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла, заключенного между ними.*

Доказательство следствия вытекает из равенства

$$\text{пл. } ABCD = 2 \text{ пл. } ABD,$$

где

$$\text{пл. } ABD = \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin A.$$

Тогда

$$\text{пл. } ABCD = AD \cdot AB \cdot \sin A.$$

Теорема 3. *Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту, т. е.*

$$S = \text{пл. } ABCD = \frac{AB + CD}{2} h. \tag{19}$$

Доказательство. Проведем из вершины C отрезок CE, параллельный стороне AD (рис. 147). Он разобьет трапецию на парал-

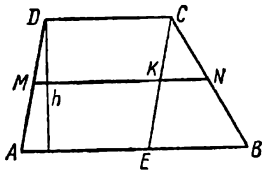


Рис. 147

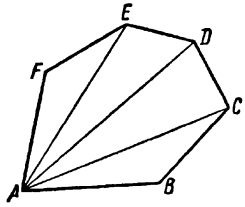


Рис. 148

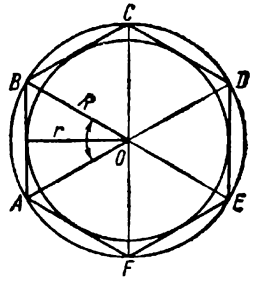


Рис. 149

лелограмм $AECD$ и треугольник ECB с высотами, равными h. Следовательно,

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } AECD + \text{пл. } ECB = AE \cdot h + \frac{BE \cdot h}{2}.$$

Но $AE = MK$, $BE = 2KN$, где MN — средняя линия трапеции, а KN — средняя линия треугольника. Поэтому

$$\text{пл. } ABCD = (MK + KN)\, h = MN \cdot h = \frac{AB + DC}{2} \cdot h.$$

Для определения площади произвольного многоугольника, например $ABCDEF$ (рис. 148), его разбивают на треугольники диагоналями, проведенными из одной вершины. Подсчитывая площади каждого из получившихся треугольников и суммируя их, получаем площадь многоугольника

$$\text{пл. } ABCDEF = \text{пл. } ABC + \text{пл. } ACD + \text{пл. } ADE + \text{пл. } AEF.$$

Если многоугольник правильный, то его целесообразно делить на треугольники другим способом, как это видно из доказательства следующей теоремы.

Теорема 4. *Площадь правильного n-угольника равна его полупериметру p_n, умноженному на радиус вписанной окружности* (рис. 149):

$$S = \text{пл. } ABCDEF = p_n \cdot r. \tag{20}$$

Доказательство. Соединив центр O многоугольника со всеми его вершинами, получим n равных треугольников AOB, BOC, ..., где n — число сторон данного многоугольника. Высоты этих треугольников равны радиусу вписанной окружности, поэтому

$$\text{пл. } ABCDEF = n \cdot \frac{1}{2} AB \cdot r,$$

где $p_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot AB$ — полупериметр.

Следствие. *Площадь правильного многоугольника равна половине произведения числа сторон многоугольника на квадрат радиуса описанной окружности и на* $\sin \frac{360^\circ}{n}$:

$$S = \text{пл. } ABCDEF = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}. \tag{21}$$

Доказательство. Угол AOB равен $\frac{360^\circ}{n}$ (рис. 149). Поэтому

$$\text{пл. } AOB = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

и

$$\text{пл. } ABCDEF = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

§ 7. ЗАДАЧИ

Помимо выведенных в этой главе соотношений между основными элементами треугольника полезно знать или уметь вывести формулы, выражающие высоты, медианы и биссектрисы треугольника через его стороны и, наоборот, стороны через медианы и высоты.

В следующих задачах предлагается вывод таких формул.

Задача 1. В треугольнике ABC даны три стороны a, b и c. Найти его медианы m_a, m_b и m_c* (рис. 150).

Решение. Для вычисления медианы $m_a = AD$ продолжим ее на отрезок $DE = AD$ и точку E соединим с вершинами B и C. Полученный четырехугольник $ABEC$ есть параллелограмм, ибо диагонали AE и BC делятся в точке пересечения пополам. Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, т. е. $2c^2 + 2b^2 = a^2 + (2m_a)^2$, то отсюда следует, что

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.$$

* Всюду в дальнейшем индекс a означает, что соответствующая линия проведена из вершины A и т. д.

Аналогично получаем, что

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} \text{ и } m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Задача 2. В треугольнике ABC даны его медианы m_a, m_b и m_c. Найти его стороны a, b и c.

Решение. Для вычисления стороны a продолжим отрезок ED (рис. 151) на расстояние $DF=ED=\frac{m_a}{3}$ и точку F соединим с вершинами B и C. Полученный четырехугольник $BFCE$ есть параллело-

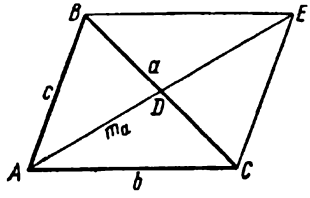


Рис. 150

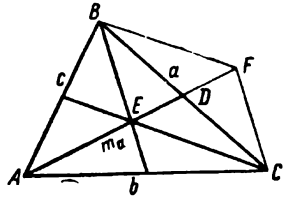


Рис. 151

грамм, в котором стороны $BE=FC=\frac{2}{3}m_b$, $BF=EC=\frac{2}{3}m_c$, диагонали $BC=a$ и $EF=\frac{2}{3}m_a$. Поэтому

$$2\cdot\frac{4}{9}m_b^2+2\cdot\frac{4}{9}m_c^2=a^2+\frac{4}{9}m_a^2,$$

откуда следует, что

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}.$$

Аналогично находим, что

$$b=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_c^2-m_b^2} \text{ и } c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_b^2-m_c^2}.$$

Задача 3. В треугольнике ABC даны три стороны a, b и c. Найти его высоты h_a, h_b и h_c.

Решение. Пусть S — площадь треугольника ABC. Тогда $S=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ и $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Из этих равенств следует, что

$$\frac{1}{2}c\cdot h_c=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ и } h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Аналогично находим, что

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ и } h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Задача 4. В треугольнике ABC даны его высоты h_a, h_b и h_c. Найти его стороны a, b и c.

Решение. Пусть S — площадь треугольника ABC. Тогда

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c.$$

Следовательно,

$$a=\frac{2S}{h_a},\ b=\frac{2S}{h_b}\ \text{и}\ c=\frac{2S}{h_c}. \qquad (*)$$

С другой стороны, по формуле Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right),$$

$$p-a=\frac{1}{2}(-a+b+c)=S\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right),$$

$$p-b=\frac{1}{2}(a-b+c)=S\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right),$$

$$p-c=\frac{1}{2}(a+b-c)=S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right).$$

Следовательно,

$$S=S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)},$$

т. е.

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}=\frac{1}{q}.$$

Теперь, используя равенства (*), находим a, b и c:

$$a=\frac{2}{h_a\cdot q},\ b=\frac{2}{h_b\cdot q},\ c=\frac{2}{h_c\cdot q}.$$

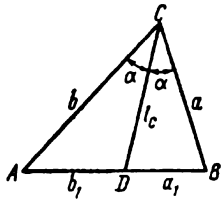


Рис. 152

Задача 5. Доказать, что квадрат биссектрисы равен произведению двух прилежащих сторон треугольника без произведения отрезков, на которые она делит противолежащую сторону (рис. 152), т. е.

$$l_c^2=ab-a_1b_1.$$

Решение. Рассмотрим треугольники ACD и DCB. Согласно теореме косинусов имеем

$$b_1^2=b^2+l_c^2-2bl_c\cdot\cos\alpha,$$

$$a_1^2=a^2+l_c^2-2a\cdot l_c\cdot\cos\alpha,\ \text{где}\ \alpha=\frac{C}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{b^2+l_c^2-b_1^2}{2b}=\frac{a^2+l_c^2-a_1^2}{2a},$$

т. е.

$$l_c^2(b-a)=ab(b-a)-(ab_1^2-a_1^2b). \qquad (*)$$

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1},\ \text{т. е. } ab_1=a_1b.$$

Тогда

$$ab_1^2-a_1^2b=a_1b_1\cdot b-a_1b_1\cdot a=a_1b_1(b-a)$$

и равенство (*) перепишется в виде

$$l_c^2(b-a)=ab(b-a)-a_1b_1(b-a).$$

Таким образом,

$$l_c^2=ab-a_1b_1$$

при условии, что $b\neq a$. Если $b=a$, то $b_1=a_1=\frac{c}{2}$, $l_c^2=a^2-\frac{c^2}{4}$, что согласуется с доказываемым равенством, если положить в нем $a=b$.

Задача 6. В треугольнике ABC даны стороны a, b и c. Найти его биссектрисы l_a, l_b и l_c.

Решение. Используя результат задачи 5, имеем

$$l_c^2=ab-a_1b_1,\ \text{или}\ l_c^2=ab-a_1(c-a_1).$$

Выразим a_1 через стороны треугольника. Из равенства $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{c-a_1}$ находим, что $a_1=\frac{ac}{a+b}$. Тогда

$$l_c^2=ab-\frac{ac}{a+b}\left(c-\frac{ac}{a+b}\right)=ab\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2},$$

т. е.

$$l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Аналогично находим, что

$$l_a=\frac{\sqrt{cb(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}\ \text{ и }\ l_b=\frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a-b+c)}}{a+c}.$$

При решении многих задач полезно использовать некоторые дополнительные соотношения. Они легко получаются из формул (1)—(20).

Приведем примеры таких дополнительных соотношений. Рекомендуем читателю запомнить их вывод, так как мы будем на них ссылаться при решении последующих задач.

Задача 7. Найти площадь треугольника, если известны его сторона и два прилежащих к ней угла.

Решение. Пусть известная сторона равна a, прилежащие углы B и C. Согласно формуле (14) имеем

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B.$$

С другой стороны, по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

откуда $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$ и

$$\text{пл. } ABC = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin (B+C)}. \tag{22}$$

Задача 8. Доказать, что в любом треугольнике радиус вписанной окружности равен произведению любой стороны на синусы прилежащих половинных углов, деленному на косинус противолежащего половинного угла, т. е.

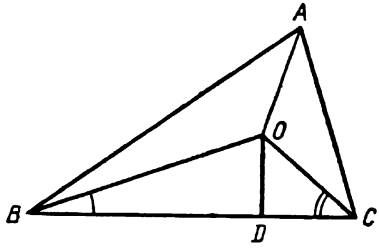


Рис. 153

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}. \tag{23}$$

Решение. Пусть O — центр вписанной окружности, r — ее радиус, AO, BO и CO — биссектрисы углов A, B и C (рис. 153). Из прямоугольных треугольников BOD и DOC имеем

$$BD = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}, \quad DC = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Складывая эти равенства и замечая, что $BD + DC = a$, получаем

$$a = r\left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}\right) = \frac{r \cdot \sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}} = \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}.$$

Таким образом,

$$r = \frac{a \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Задача 9. Доказать, что в любом треугольнике

$$\sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}. \tag{24}$$

Решение. Имеем $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$. Выражая $\cos A$ через стороны треугольника, получаем

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

откуда

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Итак, $\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}$, причем равенство достигается при $b=c$, т. е. в случае равнобедренного треугольника.

Задача 10. Доказать, что площадь вписанного четырехугольника равна $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d—стороны четырехугольника, а $2p$—его периметр.

Р е ш е н и е. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ADC; здесь угол B обозначен через α и тогда угол $D=180°-\alpha$ (рис. 154). Согласно формуле (14) находим

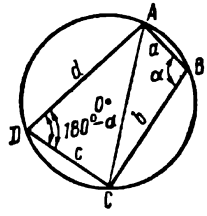


Рис. 154

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin(180°-\alpha)=$$
$$=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha \qquad (*)$$

(обозначения ясны из рис. 154). Выразим $\sin\alpha$ через стороны a, b, c, d. По теореме косинусов из треугольников ABC и ADC имеем

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha,$$
$$AC^2=c^2+d^2+2cd\cos\alpha.$$

Сравнивая правые части этих равенств, получаем

$$a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha=c^2+d^2+2cd\cos\cdot\alpha,$$
$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(cd+ab)},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{4(cd+ab)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{2(cd+ab)}.$$

Подставляя найденное значение $\sin\alpha$ в равенство (*), находим

$$\text{пл. } ABCD=\frac{1}{4}\sqrt{4(cd+ab)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}. \qquad (**)$$

Преобразуем подкоренное выражение, которое является разностью квадратов. Имеем

$$4(cd+ab)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=(2cd+2ab+a^2+b^2-c^2-d^2)\times$$
$$\times(2cd+2ab-a^2-b^2+c^2+d^2)=[(a+b)^2-(c-d^2)]\times$$
$$\times[(c+d)^2-(a-b)^2]=(a+b+c-d)(a+b-c+d)\times$$
$$\times(c+d+a-b)(c+d-a+b).$$

Замечая, что

$$a+b+c-d=a+b+c+d-2d=2(p-d)$$

и аналогично

$$a+b-c+d=2(p-c),\ a-b+c+d=2(p-b),\ c+d-a+b=2(p-a)$$

и возвращаясь к равенству (**), окончательно получаем

$$\text{пл. } ABCD = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \qquad (25)$$

В частности, заметим, что если в четырехугольник $ABCD$ можно также и вписать окружность, т. е.

$$a+c=b+d,$$

то формула (25) упрощается. В этом случае

$$p-a=\frac{a+b+c+d}{2}-a=a+c-a=c,$$

$$p-b=\frac{a+b+c+d}{2}-b=d+b-b=d,$$

$$p-c=\frac{a+b+c+d}{2}-c=c+a-c=a,$$

$$p-d=\frac{a+b+c+d}{2}-d=b+d-d=b$$

и

$$S=\sqrt{abcd}.$$

Приведем несколько задач, при решении которых используются результаты задач 7—10.

Задача 11. Доказать, что в любом треугольнике отношение радиуса вписанной к радиусу описанной окружности не превосходит $\frac{1}{2}$.

Решение. Согласно формулам (23) и (1) имеем

$$r=\frac{a\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \quad \text{и} \quad R=\frac{a}{2\sin A},$$

где r — радиус вписанной, а R — радиус описанной окружности. Следовательно,

$$\frac{r}{R}=\frac{2a\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin A}{a\cdot\cos\frac{A}{2}}=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

Принимая во внимание неравенство (24), окончательно получаем

$$\frac{r}{R}\leqslant 4\frac{a}{2\sqrt{bc}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{c}{2\sqrt{ac}}=\frac{1}{2}.$$

Итак, $\frac{r}{R}\leqslant\frac{1}{2}$, причем равенство достигается в случае, когда $a=b=c$.

Задача 12. Определить углы прямоугольного треугольника, в котором отношение радиуса вписанной к радиусу описанной окружности имеет наибольшее значение.

Решение. Вновь используя формулу (23), имеем

$$r=\frac{c\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

где $C=90°$ и $\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому учитывая, что $R=\frac{c}{2}$, получаем

$$\frac{r}{R}=\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]=$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos 45°\right]=\sqrt{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Отсюда ясно, что отношение $\frac{r}{R}$ принимает наибольшее значение, когда $\cos\frac{A-B}{2}=1$, что возможно при $A=B=45°$. При этом отношение

$$\frac{r}{R}=\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-1.$$

Задача 13. Доказать, что в любом треугольнике

$$\frac{d_1\cdot d_2\cdot d_3}{r}=\frac{abc}{p},$$

где r — радиус вписанной окружности; d_1, d_2 и d_3 — расстояния от центра этой окружности до вершин треугольника; a, b и c — стороны треугольника и p — его полупериметр.

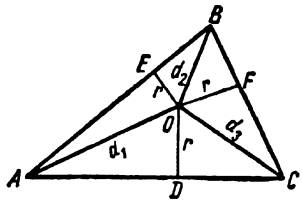


Рис. 155

Решение. Из центра O вписанной окружности опустим перпендикуляры $OD=OF=OE=r$ на стороны треугольника (рис. 155) и рассмотрим образовавшиеся при этом построении треугольники AOD, OEB и COF. В каждом из них выразим отрезки d_1, d_2 и d_3 через радиус r. Имеем

$$d_1=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}},\quad d_2=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}},\quad d_3=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$d_1d_2d_3=\frac{r^3}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}. \qquad (*)$$

С другой стороны, согласно формуле (23)

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},\quad r=\frac{b\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\quad\text{и}\quad r=\frac{c\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

и

$$r^3 = \frac{abc \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}. \qquad (**)$$

Тогда из равенств (*) и (**) следует, что

$$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = abc \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}. \qquad (***)$$

Выражая $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ по формуле (10), находим, что

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}} = \frac{S}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$

[мы использовали формулу Герона и формулу (15)]. Возвращаясь к равенству (***) и учитывая последний результат, получаем

$$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = \frac{abc \cdot r}{p},$$

или

$$\frac{d_1 d_2 d_3}{r} = \frac{abc}{p}.$$

Задача 14. В равнобочной трапеции верхнее основание в два раза меньше нижнего и диагональ делит угол при нижнем основании пополам. Найти стороны трапеции, зная, что ее площадь равна S.

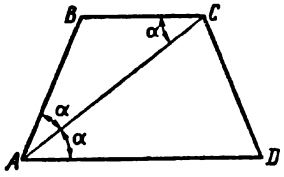


Рис. 156

Решение. Равнобочную трапецию можно вписать в окружность, следовательно, для ее площади справедлива формула (25).

Обозначим основание BC через x, а равные углы CAD и CAB через α (рис. 156). Так как $\angle DAC = \angle BCA = \alpha$, то треугольник ABC равнобедренный и $AB = BC = x$. Тогда

$$2p = AD + 2AB + BC = 5x,\ p = \frac{5}{2}x,\ p - AD = \frac{1}{2}x,$$

$$p - AB = p - BC = p - CD = \frac{3x}{2} \text{ и } S = \sqrt{\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{3}{2}x\right)^3} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3^3}},\quad AD = \frac{4\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3^3}},\quad AB = BC = CD = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3^3}}.$$

Рассмотрим несколько задач на решение треугольников, когда последние заданы не основными элементами, а величинами, зависящими от них, или другими элементами.

Будем считать задачу этого типа решенной, если она сведена к одному из основных случаев.

Задача 15. В треугольнике ABC даны угол A, противолежащая ему сторона a и отношение двух других сторон $\frac{b}{c}=k\neq 1$. Найти b, c и угол B.

Решение. 1. Из теоремы синусов $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ следует, что $\frac{\sin B}{\sin C}=k$.

Таким образом, для определения углов треугольника мы имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \sin B = k\cdot \sin C, \\ B+C=180^\circ - A, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\sin B = k\sin(A+B),$$
$$\sin B = k\sin A\cdot\cos B + k\cos A\cdot\sin B,$$

откуда

$$\operatorname{tg} B=\frac{k\sin A}{1-k\cos A},$$

или

$$\sin B=\frac{k\sin A}{\sqrt{1-2k\cos A+k^2}}$$

($1-2k\cos A+k^2>0$ для любых $A\neq 0$ и k).

2. Вновь используя теорему синусов, находим b и c:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A} \text{ и } c=\frac{b}{k},$$

или

$$b=\frac{ak\sin A}{\sqrt{1-2k\cos A+k^2}\cdot\sin A}=\frac{ak}{\sqrt{1-2k\cos A+k^2}},$$

$$c=\frac{a}{\sqrt{1-2k\cos A+k^2}}.$$

Задача 16. В прямоугольном треугольнике даны высота h и биссектриса l, проведенные из вершины прямого угла. Найти стороны и углы треугольника.

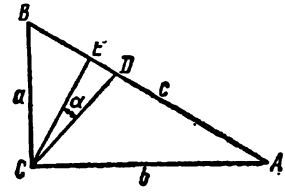


Рис. 157

Решение. Пусть CE — высота, CD — биссектриса и угол $DCE=\alpha$ (рис. 157). Из прямоугольного треугольника ECD ($E=90^\circ$) находим угол α:

$$\cos\alpha=\frac{CE}{CD}=\frac{h}{l}.$$

Теперь нам известны углы $BCE=\frac{\pi}{4}-\alpha$ и $ACE=\frac{\pi}{4}+\alpha$, т. е. в прямоугольных треугольниках CBE и ACE известны по два основ-

ных элемента. Решая эти треугольники, находим

$$BC=\frac{CE}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{2h}{\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\sqrt{2}hl}{h+\sqrt{l^2-h^2}},$$

$$AC=\frac{CE}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{2h}{\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\sqrt{2}hl}{h-\sqrt{l^2-h^2}}$$

$\left(\text{заметим, что } \alpha<\frac{\pi}{4}, \text{ т. е. } \cos\alpha>\sin\alpha; \text{ поэтому } h>\sqrt{l^2-h^2}\right),$

$$AB^2=AC^2+BC^2=2h^2l^2\left[\left(\frac{1}{h-\sqrt{l^2-h^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{h+\sqrt{l^2-h^2}}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{4h^2l^4}{(2h^2-l^2)^2}, \quad AB=\frac{2hl^2}{2h^2-l^2}.$$

Задача 17. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B, известны стороны $AB=c$, $AC=b$. Определить сторону BC и углы треугольника.

Решение. Обозначая углы B и A через α и 2α, а сторону BC через a, согласно теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin 2\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin 3\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}, \text{ или } a=2b\cdot\cos\alpha$$

и

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}, \text{ или } \frac{b}{c}=\frac{1}{4\cos^2\alpha-1}, \text{ т. е. } \cos^2\alpha=\frac{b+c}{4b}.$$

Подставляя найденное значение $\cos\alpha$ в формулу, определяющую a, получаем

$$a=2b\cdot\cos\alpha=2b\sqrt{\frac{b+c}{4b}}=\sqrt{b(b+c)}.$$

Угол B находим из равенства

$$\cos B=\cos\alpha=\sqrt{\frac{b+c}{4b}} \quad (\alpha<90°),$$

т. е.

$$B=\arccos\sqrt{\frac{b+c}{4b}} \text{ и } A=2\arccos\sqrt{\frac{b+c}{4b}}.$$

Задача имеет решение, если $c<3b$.

Задача 18. В треугольнике ABC даны площадь S, радиус вписанной окружности r и угол A. Найти стороны и углы треугольника.

Решение. Пусть O—центр вписанной окружности, $OD\perp AC$, причем $OD=r$ (рис. 158).

1. Из треугольника AOD имеем

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{OD}{AD}=\frac{r}{p-a},\ \text{или}\ p-a=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

($AD+BE+EC=p$, или $AD+a=p$). С другой стороны, из формулы $S=p\cdot r$ следует, что

$$p=\frac{S}{r}.$$

Поэтому

$$a=p-r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{S}{r}-r\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{S-r^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{r}.$$

2. Найдем углы треугольника. Из формулы (22)

$$S=\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}$$

имеем

$$2S\cdot\sin A=\frac{1}{2}a^2\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right],$$

или

$$4S\sin A=a^2\cos\frac{B-C}{2}-a^2\sin\frac{A}{2}.$$

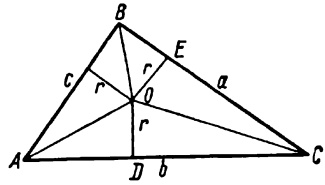


Рис. 158

Решая это уравнение относительно $\cos\frac{B-C}{2}$, получаем

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{4S\cdot\sin A+a^2\sin\frac{A}{2}}{a^2},$$

т. е.

$$B-C=2\arccos\frac{4S\cdot\sin A+a^2\sin\frac{A}{2}}{a^2}.$$

Так как $B+C=180°-A$, то окончательно находим

$$B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\arccos\frac{4S\cdot\sin A+a^2\sin\frac{A}{2}}{a^2}$$

и

$$C=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\arccos\frac{4S\cdot\sin A+a^2\sin\frac{A}{2}}{a^2}.$$

Теперь в треугольнике ABC известны сторона и углы, т. е. задача сведена к основному случаю решения треугольника. Задача имеет единственное решение, если $S>r^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$.

При вычислении площадей из нескольких выведенных ранее формул нужно выбрать ту, которая в условиях данной задачи приведет к более короткому решению.

Задача 19. Непараллельные стороны трапеции перпендикулярны друг к другу. Одна из них, равная a, составляет с диагональю угол α, а другая наклонена под тем же углом к основанию. Вычислить площадь трапеции (рис. 159).

Решение. Продолжим боковые стороны до пересечения в точке O. Так как $\angle BOC = 90°$, то

$$\angle OAD = 90° - \alpha, \quad \angle CAD = 90° - 2\alpha = \angle ACB,$$
$$\angle ACD = 90° + \alpha \quad \text{и} \quad \angle ABC = 90° + \alpha.$$

Из треугольника ABC, в котором известна сторона $AB = a$ и все углы, находим AC:

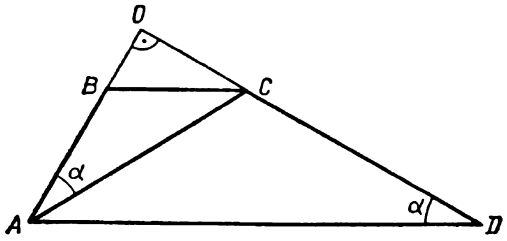


Рис. 159

$$\frac{AC}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{AB}{\sin(90° - 2\alpha)},$$

т. е.

$$AC = \frac{a \cos \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Мы имеем все данные для вычисления площадей треугольников ABC и ACD [см. формулу (22)]. Поэтому

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } ABC + \text{пл. } ACD = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin(90° + \alpha)}{\sin(90° - 2\alpha)} +$$
$$+ \frac{1}{2} AC^2 \cdot \frac{\sin(90° - 2\alpha) \cdot \sin(90° + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{a^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos 2\alpha} +$$
$$+ \frac{a^2 \cos^3 \alpha}{2 \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{a^2 \cos \alpha}{2 \cos 2\alpha} \left(\sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 \cos 2\alpha}.$$

Задача 20. Углы треугольника, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью φ. Найти площадь треугольника, если его периметр равен $2p$.

Решение. Обозначая углы треугольника A, B и C через α, $\alpha + \varphi$ и $\alpha + 2\varphi$, находим, что $3(\alpha + \varphi) = 180°$, т. е. $B = \alpha + \varphi = 60°$. Площадь треугольника будем искать по формуле $S = p \cdot r$, где радиус вписанной окружности найдем из равенства

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p - b},$$

а сторону b — по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{c}{\sin(\alpha + 2\varphi)}.$$

По свойству равных отношений имеем

$$\frac{a + b + c}{\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + 2\varphi)} = \frac{b}{\sin(\alpha + \varphi)},$$

или

$$\frac{2p}{\frac{\sqrt{3}}{2}(2 \cos \varphi + 1)} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

откуда

$$b=\frac{2p}{2\cos\varphi+1}.$$

Тогда

$$p-b=\frac{p(2\cos\varphi-1)}{2\cos\varphi+1},\quad r=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{p(2\cos\varphi-1)}{\sqrt{3}(2\cos\varphi+1)}$$

и

$$S=p\cdot r=\frac{p^2(2\cos\varphi-1)}{\sqrt{3}(2\cos\varphi+1)}.$$

Задача имеет решение при $0<\varphi<60°$ (тогда $2\cos\varphi-1>0$).

Задача 21. Найти площадь треугольника, в котором заданы медиана, проведенная из вершины C, и два прилежащих угла $A=\alpha$, $B=\beta$.

Решение. Задача будет решена, если мы найдем хотя бы одну сторону, например $AB=c$. Тогда

$$\text{пл. } ABC=\frac{AB^2\cdot\sin A\cdot\sin B}{2\sin C}=\frac{c^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}. \qquad (*)$$

Чтобы найти сторону AB, выразим через нее стороны AC и BC и воспользуемся соотношением между тремя сторонами треугольника и медианой. Имеем

$$AC=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\quad CB=\frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)};$$

$$2(AC^2+CB^2)-AB^2=4m_a^2,\text{ или }\frac{2c^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}-c^2=4m_a^2.$$

Решая последнее уравнение относительно c, находим

$$c^2=\frac{4m_a^2\sin^2(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Используя формулу (*), получаем

$$\text{пл. } ABC=\frac{2m_a^2\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Предоставляем читателю убедиться, что задача имеет решение для любых α и β при условии, что $\alpha+\beta<180°$.

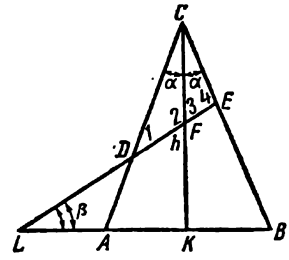


Рис. 160

Задача 22. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 2α. Прямая, проходящая через середину высоты и образующая с продолжением основания угол β, делит треугольник на две части. Найти отношение площадей этих частей.

Решение. Выразим площади треугольника DCE и четырехугольника $ADEB$ через высоту h и углы α и β (рис. 160). Легко подсчитать, что

$$\angle CDF=\angle 1=90°-(\alpha+\beta),\quad \angle DFC=\angle 2=90°+\beta,$$
$$\angle CFE=\angle 3=90°-\beta\quad\text{и}\quad\angle CEF=\angle 4=90°-(\alpha-\beta).$$

Для подсчета площади треугольника воспользуемся формулой (22).

1. пл. $CDE = S_1 =$ пл. $DCF +$ пл. $CFE = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin\alpha \cdot \sin \angle 2}{\sin \angle 1} + \right.$
$\left. + \frac{\sin\alpha \cdot \sin \angle 3}{\sin \angle 4}\right) = \frac{h^2}{8}\left(\frac{\sin\alpha \cdot \sin(90°+\beta)}{\sin(90°-\alpha-\beta)} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin(90°-\beta)}{\sin(90°-\alpha+\beta)}\right) =$
$= \frac{h^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos^2\beta}{4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

2. пл. $ADEB = S_2 =$ пл. $ABC -$ пл. $DCE =$ пл. $ABC - S_1 =$
$= AK \cdot CK - S_1 = h^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha - S_1$.

Следовательно,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{h^2 \operatorname{tg}\alpha}{S_1} - 1 = \frac{4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos^2\beta} - 1 =$$
$$= \frac{4\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta - 4\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta}{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta} - 1 = 3 - 4\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta.$$

(При этом $3 - 4\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta > 0$, так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AK}{h}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{2LK}$ и $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{AK}{2LK} < \frac{1}{2}$.)

При решении целого ряда геометрических задач, условия которых как будто бы не содержат ничего, связанного с тригонометрией, полезно применять аппарат тригонометрии. С этой целью вводят вспомогательные углы, которые затем из решения исключаются. Рассмотрим несколько таких задач.

Задача 23. Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон есть величина постоянная для данного треугольника.

Решение. Пусть M — произвольная точка основания, MD и MF — ее расстояния до боковых сторон (рис. 161). Введем угол

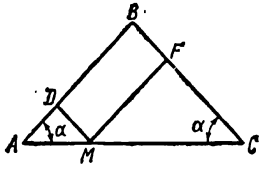


Рис. 161

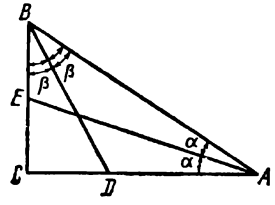


Рис. 162

$\alpha = \angle BAC = \angle BCA$. Тогда из прямоугольных треугольников ADM ($MD \perp AB$) и CMF ($MF \perp BC$) находим

$$DM = AM \cdot \sin\alpha, \quad MF = MC \cdot \sin\alpha$$

и

$$DM + MF = AM \cdot \sin\alpha + MC \cdot \sin\alpha = (AM + MC) \cdot \sin\alpha = AC \cdot \sin\alpha,$$

а это есть величина, постоянная для данного треугольника.

Задача 24. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с прямым углом C биссектрисы, проведенные из вершин A и B, связаны с его сторонами соотношением

$$al_a\sqrt{c+b} = bl_b\sqrt{c+a}.$$

Решение. Введем углы $\alpha = \angle CAE = \angle EAB$ и $\beta = \angle CBD = \angle ABD$. Выразим стороны $l_a = AE$ и $l_b = BD$ через катеты a и b и углы α и β (рис. 162). Из треугольников AEC и BCD находим

$$l_a = \frac{b}{\cos\alpha}, \quad l_b = \frac{a}{\cos\beta}.$$

Следовательно,

$$al_a \cos\alpha = bl_b \cos\beta. \qquad (*)$$

Так как

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1+\cos 2\beta}{1+\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1+\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}}} = \sqrt{\frac{c+a}{c+b}},$$

то согласно равенству (*) имеем

$$al_a = bl_b \frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c+b}}, \quad \text{или} \quad al_a\sqrt{c+b} = bl_b\sqrt{c+a}.$$

Задача 25. Доказать, что расстояния от любой точки окружности до вершин правильного вписанного в нее треугольника удовлетворяют соотношению

$$MA = MB + MC,$$

где M — точка окружности, а A — наиболее удаленная от точки M вершина (рис. 163).

Решение. Обозначим через α равные углы MBC и MAC (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $\overset{\frown}{MnC}$).

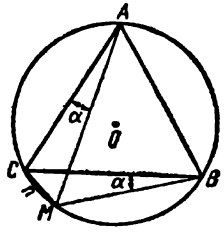


Рис. 163

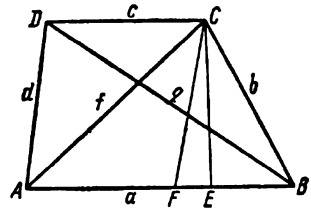


Рис. 164

Рассмотрим треугольники ABM и MAC, в которых $\angle ABM = 180° - \angle MCA$. Согласно теореме синусов имеем

$$\frac{AM}{\sin\angle ABM} = \frac{BM}{\sin\angle BAM}, \quad \text{или} \quad \frac{AM}{\sin(60°+\alpha)} = \frac{BM}{\sin(60°-\alpha)}$$

и

$$\frac{AM}{\sin(180°-\angle ABM)} = \frac{MC}{\sin\angle MAC}, \quad \text{или} \quad \frac{AM}{\sin(60°+\alpha)} = \frac{MC}{\sin\alpha}.$$

Тогда

$$\frac{AM}{\sin(60°+\alpha)} = \frac{BM}{\sin(60°-\alpha)} = \frac{MC}{\sin\alpha}$$

и по свойству равных отношений отсюда следует, что

$$\frac{AM}{\sin(60°+\alpha)}=\frac{BM+MC}{\sin(60°-\alpha)+\sin\alpha}. \qquad (*)$$

Так как $\sin(60°-\alpha)+\sin\alpha=2\sin 30°\cdot\cos(30°-\alpha)=\sin(60°+\alpha)$, то из равенства (*) вытекает искомое, т. е.

$$AM=BM+MC.$$

Задача 26. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна удвоенному произведению ее оснований, сложенному с суммой квадратов боковых сторон, т. е.

$$AC^2+BD^2=2AB\cdot CD+BC^2+AD^2.$$

Решение. Обозначим $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=f$ и $DB=q$ (рис. 164). Рассмотрим треугольники ADB и ACB. Согласно теореме косинусов имеем

$$DB^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A$$

и

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B,$$

или в наших обозначениях

$$q^2=a^2+d^2-2ad\cdot\cos A \text{ и } f^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos B.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$f^2+q^2=2a^2+b^2+d^2-2a(d\cos A+b\cos B). \qquad (*)$$

Из вершины C проведем прямую $CF\|AD$. В образовавшемся треугольнике FCB стороны $FB=a-c$, $CF=d$, $CB=b$. Высота CE делит основание на отрезки $FE=d\cos A$ и $BE=b\cos B$.

Следовательно, $FB=FE+BE=d\cos A+b\cos B$, или $a-c=d\cos A+b\cos B$. Таким образом, выражение, стоящее в скобках в равенстве (*), есть $a-c$. Поэтому имеем

$$f^2+q^2=2a^2+b^2+d^2-2a(a-c),$$

или

$$f^2+q^2=b^2+d^2+2ac,$$

что и требовалось доказать.

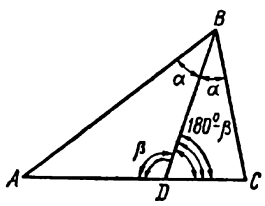


Рис. 165

Заметим, что используя методы тригонометрии, можно упростить доказательство некоторых теорем, рассматриваемых в курсе геометрии. Приведем, например, доказательство теоремы о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника.

Теорема. *Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам* (рис. 165), *т. е.*

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}.$$

Доказательство. Согласно теореме синусов имеем

$$\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{AB}{\sin\beta},\quad \text{или}\quad \frac{AD}{AB}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\qquad (\triangle ABD)$$

и

$$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin(180^\circ-\beta)},\ \text{или}\ \frac{DC}{BC}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\qquad (\triangle DBC).$$

Отсюда следует, что $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$, т. е. $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$, что и требовалось доказать.

Во многих случаях вместо «вспомогательных углов» целесообразно вводить площадь, используя при этом различные ее выражения через элементы треугольника. Так, например, решались задачи 3 и 4. Приведем еще две задачи этого типа.

Задача 27. Даны стороны b и c треугольника. Найти третью сторону, если она равна высоте, на нее опущенной. При каком соотношении между b и c решение существует?

Решение. Пусть S—площадь треугольника ABC и x—его третья сторона. Вычисляя площадь по формуле Герона, имеем

$$S=\sqrt{\frac{b+c+x}{2}\cdot\frac{b+c-x}{2}\cdot\frac{b+x-c}{2}\cdot\frac{x-b+c}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c)^2-x^2}{4}\cdot\frac{x^2-(b-c)^2}{4}}.\qquad (*)$$

С другой стороны,

$$S=\frac{1}{2}x\cdot x=\frac{1}{2}x^2.\qquad (**)$$

Сравнивая правые части равенств (*) и (**), получаем уравнение для определения x:

$$[(b+c)^2-x^2]\,[x^2-(b-c)]^2=4x^4,$$

или

$$5x^4-2x^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2=0.$$

Решая это биквадратное уравнение, находим

$$x=\sqrt{\frac{b^2+c^2\pm\sqrt{(b^2+c^2)^2-5\,(b^2-c^2)^2}}{5}}.$$

Задача имеет решение, если $(b^2+c^2)^2-5\,(b^2-c^2)^2\geqslant 0$. Предположим, что $b>c$ (при $b<c$ во второй скобке изменим знаки на противоположные). Тогда $b^2-c^2>0$ и данное неравенство равносильно неравенству

$$b^2+c^2\geqslant\sqrt{5}\,(b^2-c^2),$$

или

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2+1\geqslant\sqrt{5}\left(\frac{b}{c}\right)^2-\sqrt{5},$$

откуда получаем, что

$$\frac{b}{c} \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Учитывая наше предположение, что $b > c$, окончательно имеем $1 < \frac{b}{c} \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Если $b = c$, то $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\sqrt{b^2+c^2} = \frac{2b}{\sqrt{5}}$, если $b = \frac{c(\sqrt{5}+1)}{2}$, то $x = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{5}}$. В этих случаях задача имеет единственное решение. При $1 < \frac{b}{c} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ задача имеет два решения.

Итак,

$$1 \leqslant \frac{b}{c} \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Задача 28. Точка M лежит внутри треугольника на расстоянии x, y и z от его сторон BC, AC и AB (рис. 166). Доказать, что $\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1$, где h_a, h_b и h_c — высоты треугольника, проведенные из вершин A, B и C соответственно.

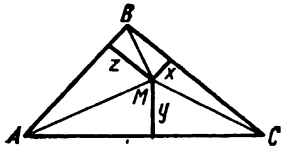


Рис. 166

Доказательство. Соединив точку M с вершинами A, B и C, получаем три треугольника BMC, AMC и ABM, высоты которых равны x, y и z соответственно. Обозначая через S площадь треугольника ABC, имеем

$$S = \frac{1}{2}(ax+by+cz). \qquad (*)$$

С другой стороны,

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}bh_b, \quad S = \frac{1}{2}ch_c. \qquad (**)$$

Комбинируя равенства (*) и (**), находим

$$1 = \frac{ax}{ah_a}+\frac{by}{bh_b}+\frac{cz}{ch_c},$$

т. е.

$$1 = \frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}.$$

ГЛАВА XVI

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основными понятиями в геометрии пространства (стереометрии) являются точка, прямая линия и плоскость. Как и прямая, плоскость определяется аксиоматически.

Определение. Множество точек P в пространстве называется *плоскостью*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям (аксиомам плоскости).

1. Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость.

2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки прямой принадлежат этой плоскости.

3. Если две различные плоскости имеют общую точку A, то они имеют и общую прямую, проходящую через A.

Таким образом, плоскость, как множество точек в пространстве, взаимно однозначно определяется тройкой точек, не лежащих на одной прямой.

Из этих аксиом вытекают такие следствия.

Следствие 1. *Через прямую p и точку C вне ее можно провести плоскость и притом только одну.*

Действительно, взяв на прямой p две точки A и B, мы получим три точки A, B и C, которые определяют единственную плоскость. Прямая p, имея с этой плоскостью две общие точки, целиком принадлежит плоскости.

Следствие 2. *Через две пересекающиеся прямые p и q можно провести плоскость и притом только одну.*

Действительно, взяв точку пересечения C, точку A на прямой p и точку B на прямой q, мы получим три точки A, B и C, которые определяют единственную плоскость. Каждая из прямых, имея с плоскостью по две общие точки, лежит в этой плоскости.

Следствие 3. *Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.*

В самом деле, так как две прямые параллельны, то они лежат в одной плоскости. Эта плоскость единственная, ибо две точки A и B на одной из прямых и точка C на второй прямой однозначно определяют как пару параллельных прямых, так и плоскость.

Две прямые в пространстве либо лежат в одной плоскости (тогда они или параллельны, или пересекаются), либо не лежат в одной плоскости.

Определение. Две прямые, не лежащие в одной плоскости, и, следовательно, не имеющие общих точек, называются *скрещивающимися*.

Скрещивающиеся прямые не образуют угла в обычном смысле, так как у них нет общей точки — вершины угла. Условились *углом между скрещивающимися прямыми* называть угол, образованный

двумя параллельными им полупрямыми, выходящими из одной точки.

Прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.

Две различные плоскости в пространстве либо не имеют ни одной общей точки (параллельные плоскости), либо имеют общую прямую (аксиома 3).

Прямая относительно плоскости может занимать три различных положения:

а) прямая *лежит в плоскости* (или плоскость проходит через прямую);

б) прямая и плоскость не имеют общих точек. В этом случае прямая называется *параллельной* плоскости;

в) прямая и плоскость имеют только одну общую точку. В этом случае говорят, что прямая *пересекает* плоскость.

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной к плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная к ней, называется *наклонной* к этой плоскости.

Прямая, соединяющая основания наклонной и перпендикуляра, опущенного из любой точки наклонной на плоскость, называется *проекцией* наклонной на плоскость (рис. 167).

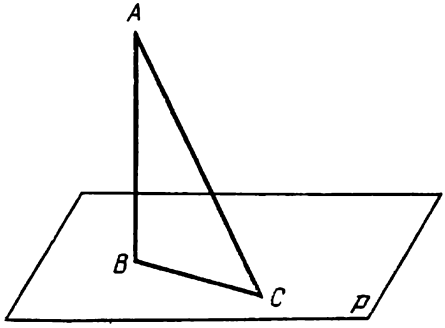


Рис. 167

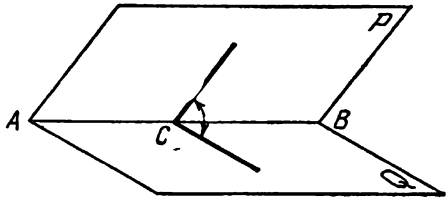


Рис. 168

Предоставляем читателю доказать следующие теоремы.

1. *Наклонные, имеющие равные проекции, равны и обратно, равные наклонные имеют равные проекции.*

2. *Из двух наклонных, имеющих неравные проекции, та больше, проекция которой больше, и наоборот.*

Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость (рис. 167).

Легко доказать, что угол между наклонной и ее проекцией на плоскость меньше угла, составленного этой наклонной и любой другой прямой, проведенной в данной плоскости.

Определение. Геометрическая фигура, состоящая из двух полуплоскостей, исходящих из одной прямой, называется *двугранным углом.*

Полуплоскости P и Q, образующие двугранный угол, называются его *гранями*, а их общая прямая AB — *ребром* двугранного угла (рис. 168).

Двугранный угол измеряется своим *линейным углом*, т. е. углом, образованным двумя перпендикулярами, восставленными к ребру из произвольной его точки C и лежащими на его гранях (рис. 168). Легко показать, что величина линейного угла не зависит от выбора точки C на ребре двугранного угла.

Двугранные углы называются *равными*, если их можно полностью совместить. Равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы и обратно.

Двугранный угол называется *прямым*, если его линейный угол равен 90°.

Определение. Две плоскости, образующие прямой двугранный угол, называются *взаимно перпендикулярными*.

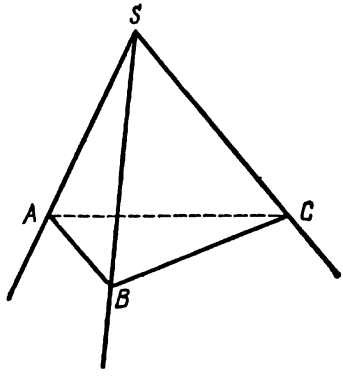


Рис. 169

Три плоскости, пересекающиеся в одной точке, образуют *трехгранный угол* (рис. 169). Точка пересечения этих плоскостей называется *вершиной*, части плоскостей, ограничивающие угол, — *гранями*, а прямые их пересечения — *ребрами* трехгранного угла.

Аналогично вводится *многогранный угол* при любом n.

Многогранный угол называется *выпуклым*, если все его грани лежат по одну сторону от плоскости любой его грани.

§ 2. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

1. Перпендикулярность прямых и плоскостей. Теорема 1 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если прямая p перпендикулярна к двум пересекающимся прямым m и n, лежащим в некоторой плоскости P, то она перпендикулярна этой плоскости ($p \perp P$).*

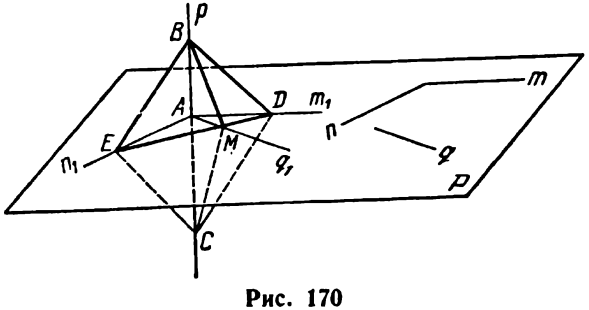


Рис. 170

Доказательство. Пусть прямая p пересекает плоскость P в точке A (рис. 170). Возьмем на плоскости P произвольную прямую q и проведем из точки A прямые $q_1 \| q$, $m_1 \| m$ и $n_1 \| n$. На прямой p по обе стороны от точ-

ки A отложим равные отрезки AB и AC, на прямых m_1 и n_1 — отрезки $AD=AE$ так, чтобы прямая DE пересекала прямую q_1. Точку пересечения прямой q_1 с DE обозначим через M. Проведем отрезки BE, BD, BM, CD, CE, CM и рассмотрим ряд образовавшихся при этом треугольников.

1) Равнобедренные треугольники DBE и DCE равны. Таким образом, $\angle BDE=\angle BED=\angle CDE=\angle CED$.

2) Отсюда следует, что $\triangle BME=\triangle CME$ ($BE=CE$, ME — общая, $\angle BEM=CEM$). Поэтому $BM=MC$.

3) Следовательно, треугольник BMC — равнобедренный и его медиана AM является одновременно и высотой, т. е. $AM\perp BC$, что и требовалось доказать.

Читателю, знакомому с векторной алгеброй, предлагается второе доказательство этой теоремы.

На прямой q_1 возьмем произвольную точку M и из нее проведем $MB\parallel m_1$ и $MC\parallel n_1$ (рис. 171). Четырехугольник $ABMC$ — параллелограмм, следовательно, $\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{AC}$. На прямой p возьмем вектор $\overline{AE}$. По условию $\overline{AE}\perp\overline{AB}$ и $\overline{AE}\perp\overline{AC}$. Поэтому скалярные произведения $\overline{AE}\cdot\overline{AB}=0$ и $\overline{AE}\cdot\overline{AC}=0$. В силу свойств скалярного произведения

$$\overline{AM}\cdot\overline{AE}=(\overline{AB}+\overline{AC})\cdot\overline{AE}=\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AC}\cdot\overline{AE}=0,$$

т. е. $\overline{AM}\perp\overline{AE}$, или, что то же самое, $p\perp q$.

Теорема 2 (теорема о трех перпендикулярах). *Прямая a, проведенная на плоскости P перпендикулярно наклонной AC,*

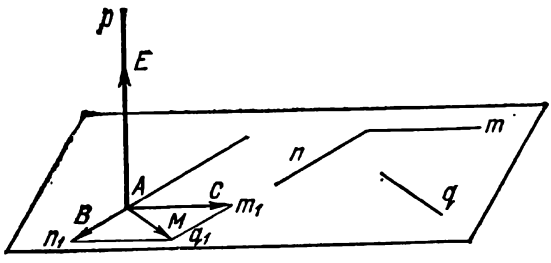


Рис. 171

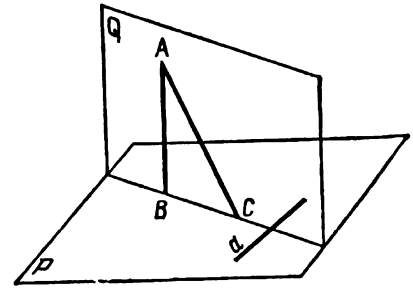


Рис. 172

перпендикулярна к проекции BC этой наклонной и обратно, прямая a, проведенная на плоскости перпендикулярно к проекции наклонной, перпендикулярна самой наклонной.

Доказательство. Проведем через наклонную AC и ее проекцию BC (рис. 172) плоскость, которую мы обозначим через Q. Прямая a, будучи перпендикулярной к двум пересекающимся прямым AC и AB плоскости Q, перпендикулярна к самой плоскости Q, в частности, $a\perp BC$.

Аналогично доказывается обратное утверждение теоремы: если $a\perp BC$, то $a\perp Q$, в частности, $a\perp AC$.

II. **Параллельность прямых и плоскостей. Теорема 1** (признак параллельности прямой и плоскости). *Если прямая a параллельна прямой q, лежащей в плоскости P, то она параллельна и самой этой плоскости* ($a \parallel P$).

Доказательство. Две параллельные прямые a и q лежат в одной плоскости. Обозначим ее через Q. Плоскости P и Q пересекаются по прямой q. Если бы прямая a пересекала плоскость P, то точка их пересечения лежала бы на прямой q, что невозможно, так как $a \parallel q$. Следовательно, прямая a не пересекает плоскость P, т. е. $a \parallel P$.

Теорема 2. *Если плоскость P проходит через прямую a, параллельную другой плоскости Q, и пересекает плоскость Q, то линия пересечения q этих плоскостей параллельна прямой a* (рис. 173).

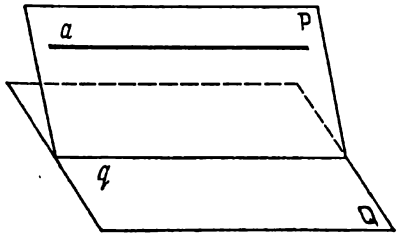


Рис. 173

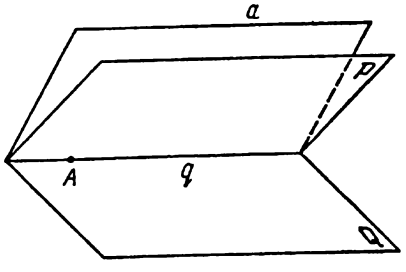


Рис. 174

Доказательство. Прямые a и q лежат в одной плоскости P. Допустив, что эти линии пересекаются, мы получим точку M их пересечения, принадлежащую как плоскости P, так и плоскости Q. Но это невозможно, так как $P \parallel Q$.

Следствие. *Если прямая a параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей P и Q, то она параллельна их линии пересечения q* (рис. 174).

Доказательство. Проведем плоскость через прямую a и произвольную точку A, лежащую на прямой q. Эта плоскость пересечет плоскости P и Q по прямым q_1 и q_2 соответственно; каждая из них параллельна a и проходит через точку A. Так как через точку A проходит лишь одна прямая, параллельная a, то q_1 и q_2 сливаются в одну прямую; эта прямая принадлежит и плоскости P, и плоскости Q. Следовательно, она совпадает с линией их пересечения q. Итак, $a \parallel q$.

Теорема 3 (признак параллельности двух плоскостей). *Две плоскости P и Q, перпендикулярные к одной и той же прямой a, параллельны* (рис. 175).

Доказательство. Допустим, что $P \nparallel Q$, т. е. что они пересекаются в некоторой точке M. Проведем через эту точку и прямую a плоскость R, которая пересечет плоскость P по прямой MA и плоскость Q — по прямой MB. Прямая a, будучи перпендикулярной к P и Q, будет перпендикулярна к прямым MA и MB. Следовательно, из точки M на прямую a опущены два перпенди-

куляра MA и MB, что невозможно. Итак, наше предположение, что $P \nparallel Q$, неверно.

Теорема 4 (признак параллельности двух плоскостей). *Если две пересекающиеся прямые AB и AC, лежащие в плоскости P, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым A_1B_1 и A_1C_1, лежащим в другой плоскости Q, то плоскости P и Q параллельны.*

Доказательство. Так как $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$, то AB и AC параллельны плоскости Q. Допустим, что $P \nparallel Q$, т. е. что они пересекаются по некоторой прямой MN. Тогда $AB \parallel MN$ и $AC \parallel MN$, т. е. через точку A на плоскости P проходят две различные прямые, параллельные прямой MN, что неверно. Следовательно, $P \parallel Q$.

Теорема 5. *Если две параллельные плоскости P и Q пересечь третьей плоскостью R, то получающиеся при этом линии пересечения a и q параллельны.*

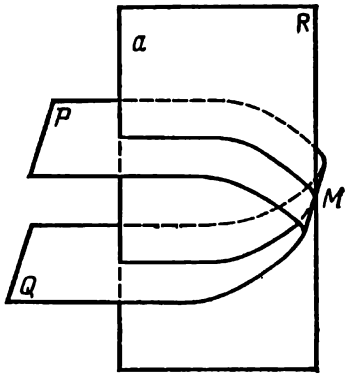


Рис. 175

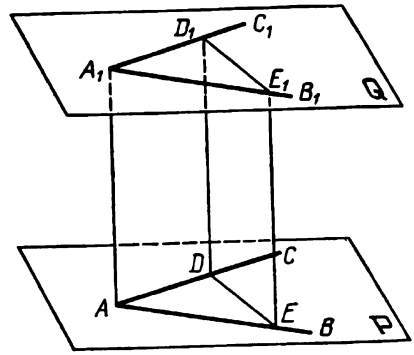


Рис. 176

Доказательство. Прямые a и q лежат в одной плоскости R. Допустим, что $a \nparallel q$. Тогда они пересекаются в некоторой точке, которая должна принадлежать как P, так и Q. Но это невозможно, так как $P \parallel Q$. Итак, $a \parallel q$.

Теорема 6. *Отрезки параллельных прямых AB и CD, заключенные между параллельными плоскостями P и Q, равны.*

Доказательство. Через параллельные прямые AB и CD проведем плоскость R, которая пересечется с P и Q по параллельным прямым AC и BD. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм, и потому $AB = CD$.

Теорема 7. *Два угла ($\angle BAC$ и $\angle B_1A_1C_1$) с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны* (рис. 176).

Доказательство. Проведем через пересекающиеся прямые AB и AC плоскость P, а через A_1B_1 и A_1C_1 — плоскость Q. Плоскости P и Q параллельны. Отложим на сторонах угла произвольные, но равные между собой отрезки $AD = AE = A_1D_1 = A_1E_1$ и проведем прямые AA_1, DD_1, EE_1 (рис. 176). Так как $AD \parallel A_1D_1$ и $AD = A_1D_1$, то ADD_1A_1 — параллелограмм, и поэтому отрезок AA_1

равен и параллелен DD_1. Аналогично получаем, что отрезок AA_1 равен и параллелен EE_1. Поэтому DD_1E_1E—параллелограмм и $ED=E_1D_1$. Значит, $\triangle ADE=\triangle A_1D_1E_1$ и $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$.

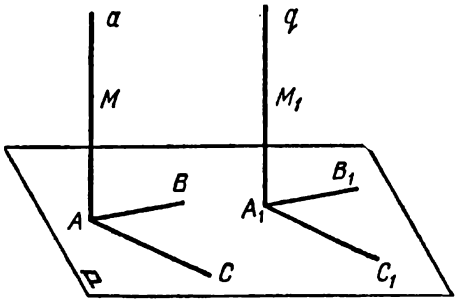


Рис. 177

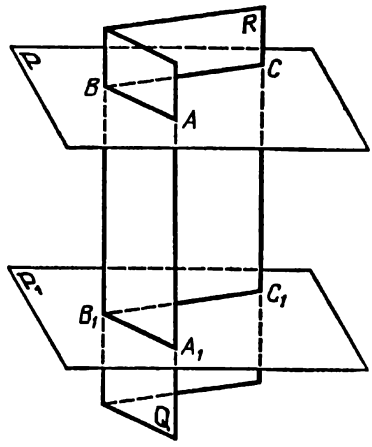


Рис. 178

III. **Связь между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей. Теорема 1.** *Плоскость, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых* (a), *перпендикулярна и к другой прямой* (q) (рис. 177).

Доказательство. Проведем в плоскости P через основание a две прямые AB и AC, а через основание q—параллельные им прямые A_1B_1 и A_1C_1: $AB\|A_1B_1$ и $AC\|A_1C_1$. По условию $a\perp AB$ и $a\perp AC$. Так как $\angle MAC=\angle M_1A_1C_1$, а $\angle MAB=\angle M_1A_1B_1$ как углы с параллельными и одинаково направленными сторонами, то $\angle M_1A_1C_1=\angle M_1A_1B_1=90°$, т. е. $q\perp P$.

Теорема 2 (обратная). *Две прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости* P, *параллельны.*

Теорема легко доказывается методом от противного.

Теорема 3. *Если прямая* a *перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей* (P), *то она перпендикулярна и к другой плоскости* (P_1).

Доказательство. Проведем через прямую a две произвольные плоскости Q и R (рис. 178), которые пересекут плоскость P по прямым AB и BC, а плоскость P_1—по прямым A_1B_1 и B_1C_1. При этом $AB\|A_1B_1$, $BC\|B_1C_1$. Так как $a\perp AB$ и $a\perp BC$, то прямая a также перпендикулярна к A_1B_1 и B_1C_1, т. е. $a\perp P_1$.

IV. **Перпендикулярность плоскостей. Теорема 1.** *Если плоскость* P *проходит через прямую* p, *перпендикулярную к плоскости* Q, *то плоскости* P *и* Q *взаимно перпендикулярны.*

Доказательство. Пусть A—основание перпендикуляра p на плоскости Q (рис. 179). Плоскости P и Q, имея общую точку A, пересекаются по некоторой прямой BC. Проведем в плоскости P прямую $AE\perp BC$. Очевидно, угол DAE является линейным углом двугранного угла $PBCQ$ и равен 90°. Следовательно, $P\perp Q$.

Теорема 2. *Любая прямая AD, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их линии пересечения, перпендикулярна и второй плоскости.*

Доказательство. Проведем через основание перпендикуляра AD прямую $AE \perp AD$ (рис. 179). Угол DAE является линейным углом прямого двугранного угла $PBCQ$ и, следовательно, равен 90°. Отсюда вытекает, что прямая p, будучи перпендикулярна к прямым BC и AE плоскости Q, перпендикулярна Q.

§ 3. СВОЙСТВА МНОГОГРАННЫХ УГЛОВ

Теорема 1. *В трехгранном угле любой плоский угол меньше суммы двух других его плоских углов и больше их разности.*

Доказательство. Пусть ASC — наибольший из плоских углов (рис. 180). На грани ASC построим угол CSD, равный углу CSB, и от вершины S отложим на ребрах SC, SB и CD отрезки

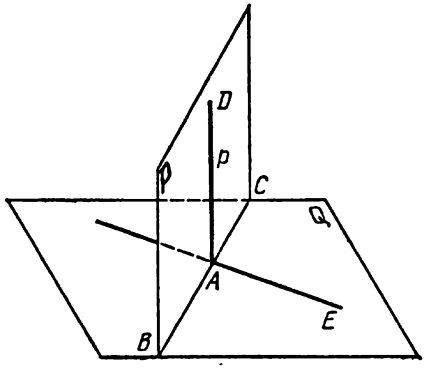


Рис. 179

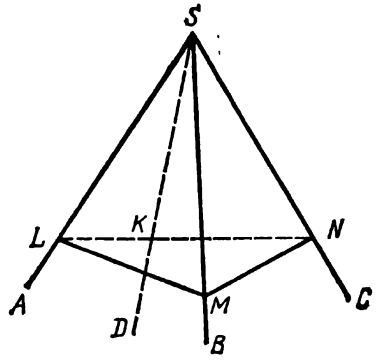


Рис. 180

$SN = SM = SK$. Через полученные точки N, M и K проведем плоскость, которая пересечет ребро SA в точке L. Из равенства треугольников SKN и SNM следует, что $KN = MN$. Так как в треугольнике LMN сторона $LN < LM + MN$, т. е. $LK + KN < LM + MN$, то $LK < LM$. Теперь, сравнивая треугольники SLK и LSM, замечаем, что угол LSK, лежащий против меньшей стороны LK, меньше угла LSM. Учитывая, что $\angle LSN = \angle LSK + \angle KSN$ и $\angle KSN = \angle NSM$, получаем, что

$$\angle LSN < \angle LSM + \angle NSM.$$

Вторая часть теоремы вытекает из полученного неравенства.

Теорема 2. *Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше* $4d$ (рис. 181).

Доказательство. Проведем плоскость P, пересекающую все его грани. В сечении получим многоугольник $ABCD\ldots$. Каждая из его вершин является вершиной трехгранного угла. На

основании теоремы 1 имеем:

$$\angle BAD < \angle SAD + \angle SAB,$$
$$\angle ABC < \angle ABS + \angle SBC,$$
$$\angle BCD < \angle SCB + \angle SCD,$$
$$\angle ADC < \angle ADS + \angle SDC,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Сложим правые и левые части этих неравенств. В правой части мы получим сумму всех внутренних углов треугольников ABS, BCS, ... без суммы углов с вершиной в точке S, т. е. $2dn - \sum$, где $\sum$—сумма всех плоских углов многогранного угла. В левой части неравенства мы имеем сумму всех внутренних углов многоугольников, равную $2dn - 4d$. Таким образом, $2dn - 4d < 2dn - \sum$, откуда

$$\sum < 4d.$$

§ 4. ПЛОЩАДЬ ПРОЕКЦИИ

Теорема. *Площадь проекции любой плоской фигуры F на некоторую плоскость равна площади проектируемой фигуры F, умноженной на косинус угла φ между плоскостью фигуры F и плоскостью проекций:*

$$\text{пл. } F_{\text{пр}} = \text{пл. } F \cdot \cos\varphi.$$

Доказательство. 1. Пусть проектируемая фигура F есть треугольник ABC, сторона AC которого лежит на плоскости проекций P (рис. 182). Проведем в треугольнике ABC высоту BD и точку D соединим с $B_1 (BB_1 \perp P)$. Тогда $DB_1 \perp AC$ является высотой треугольника AB_1C; $\angle BDB_1 = \varphi$. Так как

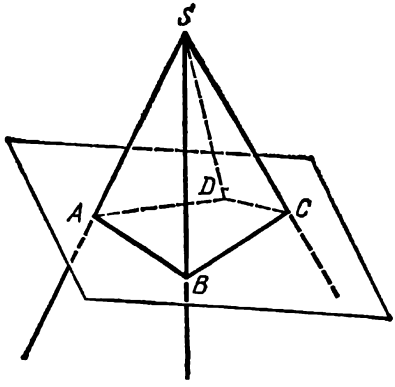


Рис. 181

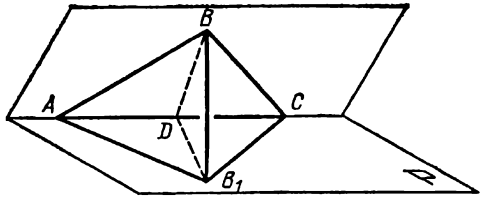


Рис. 182

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \quad S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot DB_1 = \frac{1}{2} AC \cdot DB \cdot \cos\varphi,$$

то

$$S_{AB_1C} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi, \text{ или пл. } F_{\text{пр}} = \text{пл. } F \cdot \cos\varphi.$$

2. Предположим теперь, что ABC — произвольный треугольник, лежащий в плоскости Q (рис. 183). Проведем через вершину A прямую AE, параллельную линии пересечения плоскостей P и Q. Затем через прямую AE проведем плоскость $P_1 \parallel P$. Очевидно, проекции треугольника ABC на плоскости P и P_1 равны. Треугольник ABC разбился на два треугольника — ABE и AEC, сторона AE которых лежит в плоскости P_1. Согласно п. 1 $S_{AEC_1} = S_{AEC} \cdot \cos\varphi$,

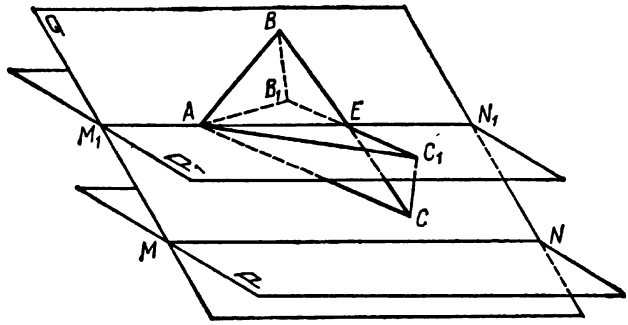


Рис. 183

$S_{AB_1E} = S_{ABE} \cdot \cos\varphi$, следовательно,

$$S_{AB_1C_1} = S_{AEC_1} + S_{AB_1E} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi,$$

или

$$\text{пл. } F_{\text{пр}} = \text{пл. } F \cdot \cos\varphi.$$

3. Пусть F — многоугольник. Разбивая его диагоналями на треугольники и используя п. 2, получим:

$$\text{пл. } (ABCDE)_{\text{пр}} = \text{пл. } (ABC)_{\text{пр}} + \text{пл. } (ACD)_{\text{пр}} + \text{пл. } (ADE)_{\text{пр}} = \text{пл. } ABC \cdot \cos\varphi + \text{пл. } ACD \cdot \cos\varphi + \text{пл. } ADE \cdot \cos\varphi = \text{пл. } ABCDE \cdot \cos\varphi.$$

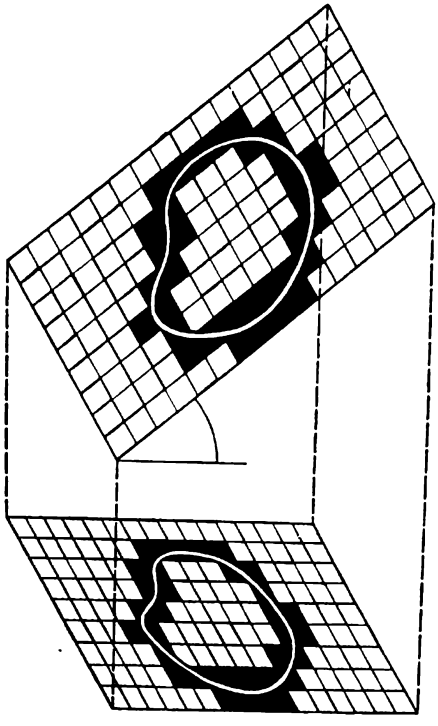


Рис. 184

4. Пусть теперь P — произвольная плоская фигура (рис. 184). Покроем F квадратной сеткой ранга n (сторона квадрата равна $\frac{1}{10^n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$) и составим систему входящих фигур $\underline{F}_n$ и выходящих фигур $\overline{F}_n$ с площадями $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$ соответственно. По определению

$$\text{пл. } F = \lim_{n \to \infty} \underline{S}_n = \lim_{n \to \infty} \overline{S}_n.$$

Проектируя фигуры $\underline{F}_n$ и $\overline{F}_n$ на плоскость проекций, получим фигуры $(\underline{F}_n)_{\text{пр}}$ и $(\overline{F}_n)_{\text{пр}}$, которые будут соответственно входящими и выходящими фигурами для $F_{\text{пр}}$.

Так как $\underline{F}_n$ и $\overline{F}_n$ — многоугольники, то согласно п. 3 площади их проекций $(\underline{S}_n)_{\text{пр}}$ и $(\overline{S}_n)_{\text{пр}}$ соответственно равны:

$$(\underline{S}_n)_{\text{пр}} = \text{пл.}\,(\underline{F}_n)_{\text{пр}} = \text{пл.}\,\underline{F}_n \cdot \cos\varphi = \underline{S}_n \cdot \cos\varphi,$$

$$(\overline{S}_n)_{\text{пр}} = \text{пл.}\,(\overline{F}_n)_{\text{пр}} = \text{пл.}\,\overline{F}_n \cdot \cos\varphi = \overline{S}_n \cdot \cos\varphi.$$

Так как $\cos\varphi$ не зависит от n, то

$$\lim_{n\to\infty} (\underline{S}_n)_{\text{пр}} = \cos\varphi \cdot \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \cos\varphi \cdot \text{пл.}\,F$$

и

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{S}_n)_{\text{пр}} = \cos\varphi \cdot \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \cos\varphi \cdot \text{пл.}\;F.$$

Из последних равенств имеем

$$\text{пл.}\;F_{\text{пр}} = \text{пл.}\,F \cdot \cos\varphi,$$

что и требовалось доказать.

ГЛАВА XVII

МНОГОГРАННИКИ. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ТЕЛА И КОНУСЫ. ШАР

В школьном курсе математики изучаются призма, пирамида, цилиндр, конус, шар и части шара. Призма и пирамида относятся к многогранникам, цилиндр является представителем класса цилиндрических тел, конус — представителем класса конических тел. Однако очень удобно рассматривать призму как цилиндрическое, а пирамиду — как коническое тело.

Шар можно рассматривать как тело вращения. Телами вращения являются также прямые круговые цилиндр и конус и т. д.

§ 1. МНОГОГРАННИКИ

Определение. *Многогранником* называется геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника.

Грани многогранника, имеющие общие стороны (ребра), называются *смежными*. Две смежные грани образуют двугранный угол. *Диагональю* многогранника называется отрезок прямой, соединяющий две вершины многогранника, не лежащие на одной грани. Многогранник обозначают его вершинами или диагональю, например, многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ или многогранник AC_1 (рис. 185).

Многогранник, имеющий четыре грани, называется *четырехгранником*, пять граней — *пятигранником* и т. д.

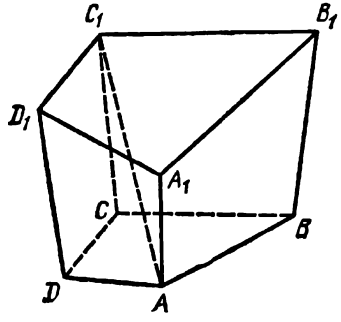


Рис. 185

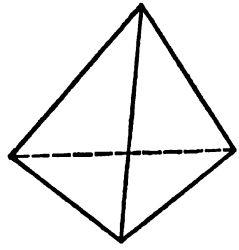


Рис. 186

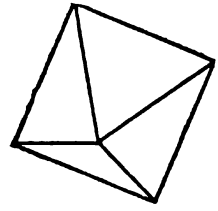


Рис. 187

Многогранник называется *правильным*, если все его грани — равные между собой правильные многоугольники и все многогранные углы равны.

В каждой вершине многогранника сходятся не менее трех граней, плоские углы которых равны между собой и в сумме составляют меньше 360°. Если гранями правильного многогранника яв-

ляются правильные треугольники, то в каждой вершине многогранника может сходиться либо три треугольника ($60° \cdot 3 < 360°$), либо четыре треугольника ($60° \cdot 4 < 360°$), либо пять треугольников ($60° \cdot 5 < 360°$). Шесть правильных треугольников не могут образовать многогранного угла, так как $60° \cdot 6 = 360°$.

Таким образом, существуют лишь три типа правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники.

1. *Правильный четырехугольник (тетраэдр)*, поверхность которого составлена из четырех правильных треугольников (рис. 186), сходящихся по три в каждой вершине. Тетраэдр имеет 4 вершины и 6 ребер.

2. *Правильный восьмигранник (октаэдр)*, поверхность которого составлена из восьми правильных треугольников (рис. 187), сходящихся по четыре в каждой вершине. Октаэдр имеет 6 вершин и 12 ребер.

3. *Правильный двадцатигранник (икосаэдр)*, поверхность которого состоит из 20 правильных треугольников, сходящихся по пять в каждой вершине. Икосаэдр имеет 20 вершин и 30 ребер (рис. 188).

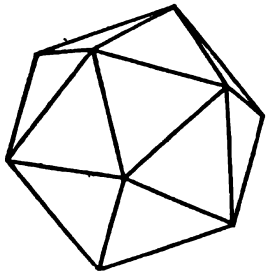


Рис. 188

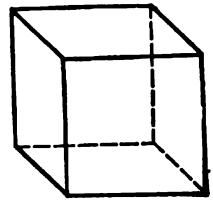


Рис. 189

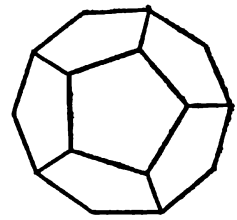


Рис. 190

Рассмотрим теперь многогранник, составленный из правильных четырехугольников, т. е. квадратов. Так как $90° \cdot 4 = 360°$, то четыре квадрата не составляют многогранный угол. Следовательно, существует лишь один тип правильного многогранника, грани которого являются квадратами. Это *куб (гексаэдр)*. Гексаэдр имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер (рис. 189).

Из правильных пятиугольников можно составить лишь один правильный многогранник, в каждой вершине которого сходятся по три грани ($108° \cdot 3 < 360°$, $108° \cdot 4 > 360°$). Этот многогранник называется *додекаэдром*. Он имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер (рис. 190).

Из правильных шестигранников нельзя составить даже трехгранного угла, так как $120° \cdot 3 = 360°$.

Итак, мы показали, что гранями правильных многогранников могут служить лишь правильные треугольники, квадраты и правильные пятиугольники и что существует лишь пять видов правильных многогранников: тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб и додекаэдр.

§ 2. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ. ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ТЕЛО

Пусть MN — линия, лежащая в плоскости P, и l — прямая, пересекающая эту плоскость (рис. 191).

Определение 1. *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, образованная движением прямой AB, которая непрерывно перемещается параллельно прямой l вдоль линии MN.

Движущаяся прямая называется *образующей*, а линия MN — *направляющей* цилиндрической поверхности.

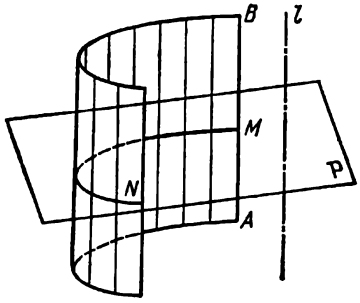


Рис. 191

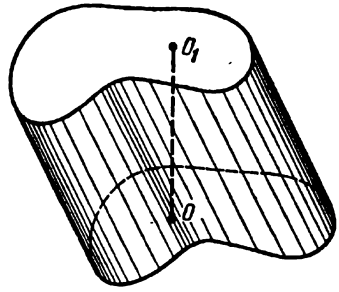


Рис. 192

Направляющая MN может быть замкнутой и незамкнутой В зависимости от этого и соответствующая цилиндрическая поверхность называется *замкнутой* или *незамкнутой*.

Цилиндрические поверхности различаются по виду направляющей и по расположению прямой l относительно плоскости P, в которой лежит направляющая.

Если направляющая MN — прямая, то соответствующая цилиндрическая поверхность есть, очевидно, плоскость.

Цилиндрическая поверхность называется *круговой*, если ее направляющая есть окружность, а образующая перпендикулярна к плоскости этой окружности.

Цилиндрическая поверхность называется *призматической*, если ее направляющая есть ломаная, замкнутая или незамкнутая.

Определение 2. *Цилиндрическим телом* называется тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя пересекающими ее параллельными плоскостями (рис. 192).

Части секущих параллельных плоскостей, выделяемые цилиндрической поверхностью, называются *основаниями* цилиндрического тела, а часть цилиндрической поверхности, заключенная между основаниями, — его *боковой поверхностью*.

Очевидно, что все сечения цилиндрического тела плоскостями, параллельными основаниям, равны между собой.

Высотой цилиндрического тела называется перпендикуляр O_1O, проведенный из любой точки одного основания на плоскость другого основания (рис. 192).

Цилиндрическое тело называется *прямым* или *наклонным* смотря по тому, перпендикулярны или наклонны к плоскостям оснований его образующие.

Рассмотрим некоторые виды цилиндрических тел.

1. Цилиндрическое тело, в основаниях которого лежат круги, называется *круговым цилиндром* (рис. 193).

Круговой цилиндр, образующие которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется *прямым круговым цилиндром* (рис. 194).

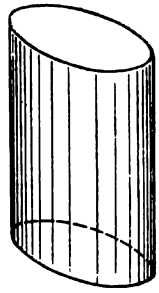


Рис. 193

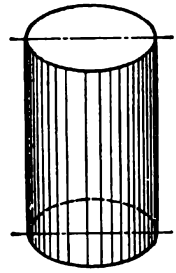


Рис. 194

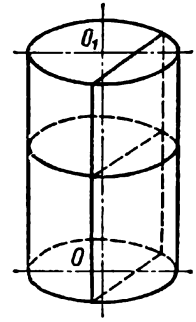


Рис. 195

Очевидно, что: 1) в сечении боковой поверхности прямого кругового цилиндра плоскостями, параллельными основаниям, получаются равные между собой круги; 2) в сечении оснований и боковой поверхности прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельной его образующей, получается прямоугольник, сторонами которого служат образующие цилиндра и хорды (в частности, диаметры) окружностей оснований (рис. 195).

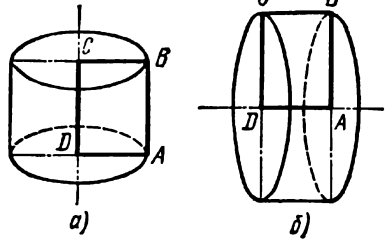


Рис. 196

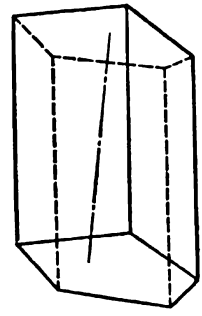


Рис. 197

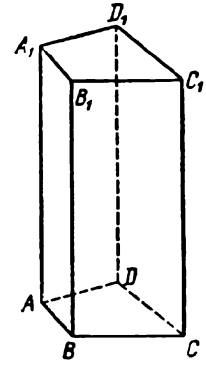


Рис. 198

Прямой круговой цилиндр можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг одной из его сторон — оси вращения (рис. 196). При этом сторона, параллельная оси, описывает боковую поверхность цилиндра и является его образующей. Смежные к оси стороны описывают круги — основания цилиндра.

Сторона прямоугольника, вокруг которой происходит вращение, называется *осью* цилиндра.

Цилиндрическое тело, в основаниях которого лежат многоугольники, называется *призмой* (рис. 197). Боковая поверхность призмы (призматическая поверхность) состоит из четырехугольников. Поэтому призма является также и многогранником.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра (образующие) перпендикулярны плоскостям оснований (рис. 198).

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания — правильные многоугольники.

Легко доказать, что основаниями призмы являются равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а ее боковыми гранями — параллелограммы.

Действительно, боковые ребра призмы являются образующими призматической поверхности и, стало быть, параллельны. При пересечении этих образующих параллельными плоскостями получаются равные отрезки. Из равенства и параллельности боковых ребер вытекает, что боковые грани — параллелограммы. Отсюда следует равенство и параллельность сторон основания. Так же просто доказывается равенство соответствующих углов при основаниях.

В прямой призме все боковые грани — прямоугольники.

Призма, основаниями которой служат параллелограммы, называется *параллелепипедом* (рис. 199).

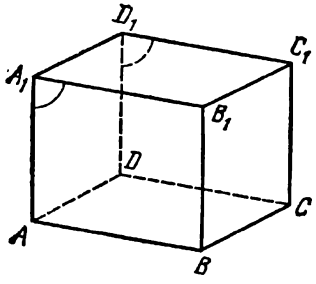


Рис. 199

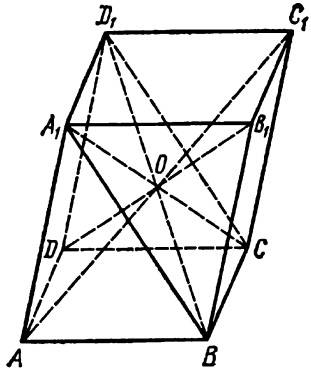


Рис. 200

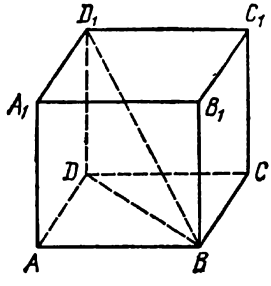


Рис. 201

Прямой параллелепипед, в основаниях которого лежат прямоугольники, называется *прямоугольным*. Следовательно, в прямоугольном параллелепипеде все грани — прямоугольники.

Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, сходящихся в одной вершине, называются его *измерениями*. Прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны между собой, называется *кубом*.

Теорема 1. *В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ противоположные грани равны и параллельны* (рис. 199).

Доказательство. Так как все шесть граней параллелепипеда — параллелограммы, то отрезок AA_1 равен и параллелен

DD_1, отрезок DD_1 равен и параллелен CC_1 и т. д. Следовательно, грани AA_1B_1B и DD_1C_1C параллельны в силу того, что две пересекающиеся прямые A_1A и A_1B_1 одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым D_1D и D_1C_1 другой. Эти грани также и равны как два параллелограмма, у которых, кроме указанного равенства сторон, $\angle AA_1B_1 = \angle DD_1C_1$ (углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами).

Теорема 2. *Диагонали AC_1, BD_1, DB_1 и CA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам* (рис. 200).

Доказательство. Соединим точки A_1 с B и D_1 с C. Полученная фигура A_1D_1CB — параллелограмм, так как стороны A_1D_1 и BC равны и параллельны. Диагонали A_1C и BD_1 параллелепипеда служат диагоналями полученного параллелограмма, следовательно, в точке пересечения O они делятся пополам. Точно так же, взяв одну из этих двух диагоналей, например, диагональ BD_1, и третью диагональ, например AC_1, докажем, что они, являясь диагоналями параллелограмма AD_1C_1B, делятся в точке пересечения пополам. Следовательно, диагональ AC_1 проходит через ту же точку O — середину диагонали BD_1. Наконец, так как DB_1 (четвертая диагональ) и AC_1 служат диагоналями параллелограмма ADC_1B_1, то они, делясь в точке пересечения пополам, проходят через ту же точку O — середину диагонали AC_1.

Итак, все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

Теорема 3. *Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений* (рис. 201).

Доказательство. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро D_1D перпендикулярно к плоскости основания, а потому треугольник D_1DB — прямоугольный. Следовательно, $BD_1^2 = D_1D^2 + DB^2$, а из прямоугольного треугольника DAB находим, что $DB^2 = AD^2 + AB^2$. Отсюда

$$BD_1^2 = DD_1^2 + AD^2 + DC^2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *В прямоугольном параллелепипеде все четыре диагонали равны между собой.*

§ 3. КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ. КОНУС

Определение 1. *Конической поверхностью* называется поверхность, образованная движением прямой AB, которая непрерывно перемещается, проходя постоянно через неподвижную точку S и пересекая при этом плоскую линию MN (рис. 202).

Прямая AB называется *образующей*, точка S — *вершиной*, а линия MN — *направляющей* конической поверхности. Направляющая MN может быть замкнутой и незамкнутой.

Определение 2. *Конусом* называется тело, которое ограничено частью замкнутой конической поверхности, расположенной по

одну сторону от вершины S, и плоскостью P, пересекающей эту поверхность (рис. 203).

Часть секущей плоскости, выделенная конической поверхностью, называется *основанием* конуса. Часть конической поверхности, заключенная между его вершиной и основанием, называется *боковой поверхностью* конуса. *Высотой* конуса называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины конуса на плоскость его основания.

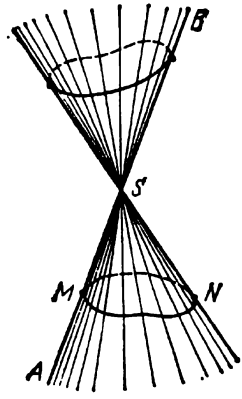


Рис. 202

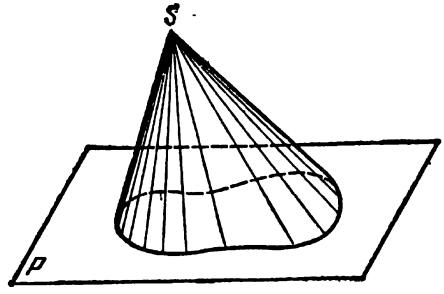


Рис. 203

Рассмотрим следующие виды конусов.

1. Конус, в основании которого лежит многоугольник, называется *пирамидой* (рис. 204). Боковая поверхность пирамиды состоит из треугольников с общей вершиной S.

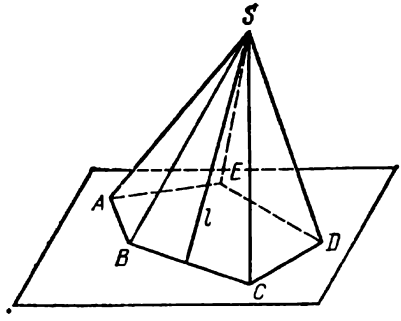


Рис. 204

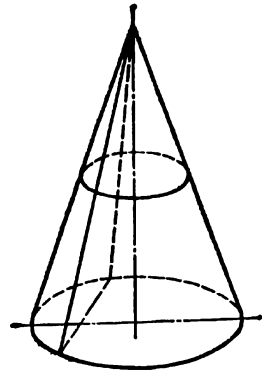


Рис. 205

Пирамида называется *правильной*, если в ее основании лежит правильный многоугольник и высота проходит через центр основания.

2. Конус, в основании которого лежит круг и высота проходит через центр круга, называется *прямым круговым* (рис. 205).

Прямой круговой конус можно рассматривать как тело, полученное от вращения прямоугольного треугольника AOS вокруг

его катета (рис. 206). При этом гипотенуза AS описывает коническую боковую поверхность, каждая точка гипотенузы — окружность, катет — круг (основание конуса). Поэтому в сечении прямого кругового конуса плоскостями, параллельными основанию, получаются круги. При пересечении прямого кругового конуса плоскостью, проходящей через его вершину S и пересекающей его основание, получается треугольник. Сторонами этого треугольника являются образующие конуса и хорда (в частности, диаметр) его основания. Сечение, проходящее через высоту (ось) кругового конуса, называется *осевым* (см. рис. 205).

Теорема 1. *Если конус T пересечь плоскостью, параллельной его основанию, то его образующая SA и высота SO разделятся этой плоскостью на пропорциональные части, т. е.*

$$\frac{SB}{BA}=\frac{SO_1}{O_1O}.$$

Доказательство. Соединим точки O и A, O_1 и B (рис. 207), при этом $O_1B \parallel OA$, как прямые, полученные при пересечении па-

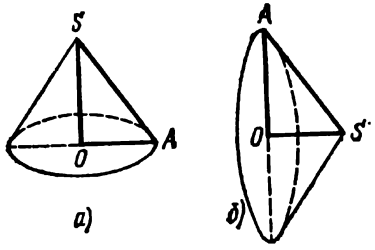


Рис. 206

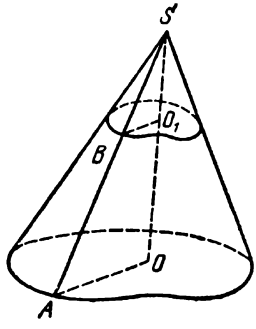


Рис. 207

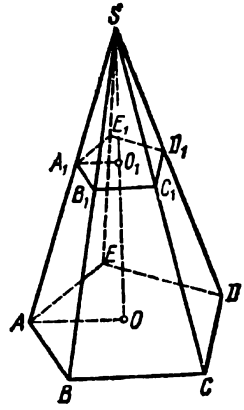


Рис. 208

раллельных плоскостей P и Q третьей плоскостью ASO. В силу теоремы о параллельных прямых, пересекающих стороны угла, имеем

$$\frac{SB}{BA}=\frac{SO_1}{O_1O},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной ее основанию, то ее боковые ребра и высота разделятся этой плоскостью на пропорциональные части.*

Теорема 2. *Если пирамиду $SABCDE$ пересечь плоскостью, параллельной ее основанию, то:*

1) *в сечении получится многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный основанию пирамиды $ABCDE$;*

2) *площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды* (рис. 208).

Доказательство. 1) $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, ..., как отрезки, полученные при пересечении параллельных плоскостей P и Q плоскостями боковых граней. Поэтому $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$, $\angle B_1C_1D_1 = \angle BCD$, ...

Из подобия треугольников ABS и A_1B_1S, BCS и B_1C_1S, ... имеем

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1S}{BS}; \quad \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC}; \ldots,$$

откуда следует, что

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA}.$$

Итак, у многоугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ соответственные углы равны и стороны пропорциональны. Следовательно,

$$A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE.$$

2. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон:

$$\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1}{\text{пл. } ABCDE} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}.$$

Но $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{SO_1}{SO}$ и поэтому

$$\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1}{\text{пл. } ABCDE} = \frac{SO_1^2}{SO^2}.$$

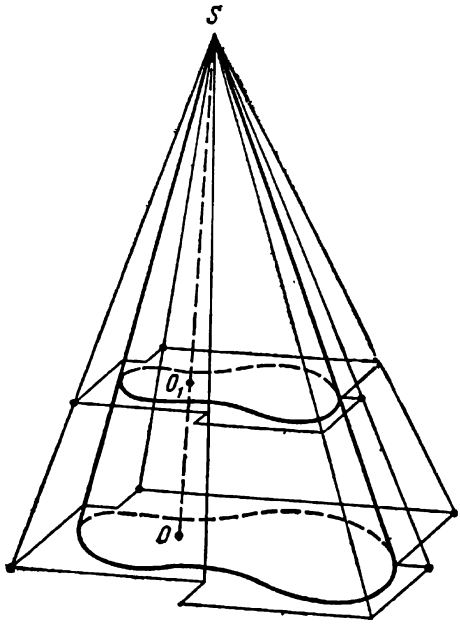


Рис. 209

Справедлива более общая теорема.

Теорема 3. *Если произвольный конус K пересечь плоскостью P, параллельной его основанию F, то площадь сечения Φ и площадь основания относятся как квадраты их расстояний от вершины конуса*, т. е.

$$\frac{\text{пл. } \Phi}{\text{пл. } F} = \frac{SO_1^2}{SO^2}.$$

Доказательство. Покроем основание F квадратной сеткой ранга n и выделим входящую фигуру $\underline{F}_n$ и выходящую фигуру $\overline{F}_n$ (рис. 209), составленные из квадратов этой сетки. При неограниченном возрастании n площади этих фигур, $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$, стремятся к площади F:

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S}_n = \lim_{n \to \infty} \overline{S}_n = \text{пл. } F. \qquad (*)$$

На фигурах $\underline{F}_n$ и $\overline{F}_n$, как на основаниях, построим пирамиды $\underline{T}_n$ и $\overline{T}_n$ с общей вершиной S. Сечения этих пирамид плоскостью P, параллельной плоскости их оснований, обозначим соответственно через $\underline{\Phi}_n$ и $\overline{\Phi}_n$. Ясно, что $\underline{\Phi}_n$ лежит в Φ, а Φ — в $\overline{\Phi}_n$. Поэтому сечения $\underline{\Phi}_n$ и $\overline{\Phi}_n$ будут входящей и выходящей фигурой для Φ и согласно определению (§ 4 гл. XV)

$$\lim_{n\to\infty}(\text{пл. }\underline{\Phi}_n)=\lim_{n\to\infty}(\text{пл. }\overline{\Phi}_n)=\text{пл. }\Phi. \qquad (**)$$

По теореме 2 о площадях параллельных сечений пирамиды

$$\frac{\text{пл.}\underline{\Phi}_n}{\text{пл.}\underline{F}_n}=\frac{SO_1^2}{SO^2} \quad \text{и} \quad \frac{\text{пл.}\overline{\Phi}_n}{\text{пл.}\overline{F}_n}=\frac{SO_1^2}{SO^2}.$$

Поэтому

$$\text{пл. }\underline{\Phi}_n=\frac{SO_1^2}{SO^2}\cdot\underline{S}_n \quad \text{и} \quad \text{пл. }\overline{\Phi}_n=\frac{SO_1^2}{SO^2}\cdot\overline{S}_n.$$

Пусть n неограниченно возрастает. Так как отношение $\frac{SO_1^2}{SO^2}$ не зависит от n, то по свойству предела

$$\lim_{n\to\infty}(\text{пл.}\underline{\Phi}_n)=\frac{SO_1^2}{SO^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\underline{S}_n=\frac{SO_1^2}{SO^2}\cdot\text{пл. }F$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(\text{пл.}\overline{\Phi}_n)=\frac{SO_1^2}{SO^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n=\frac{SO_1^2}{SO^2}\cdot\text{пл. }F.$$

Отсюда и из равенств (*) и (**) следует, что

$$\text{пл. }\Phi=\frac{SO_1^2}{SO^2}\cdot\text{пл. }F,$$

или

$$\frac{\text{пл.}\Phi}{\text{пл.}F}=\frac{SO_1^2}{SO^2}.$$

§ 4. УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 210). *Основаниями* усеченного конуса называются: основание полного конуса, из которого получен усеченный, и часть секущей плоскости, выделяемая из нее конической поверхностью. *Образующей* усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями усеченного конуса. *Высотой* усеченного конуса называется часть отрезка перпендикуляра, заключенного между его основаниями.

Усеченная пирамида является частным случаем усеченного конуса, т. е. это — часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 211). Основа-

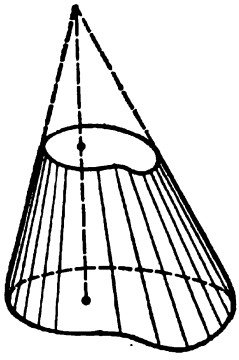


Рис. 210

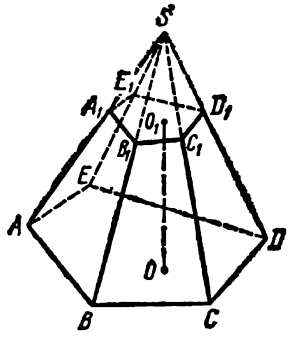


Рис. 211

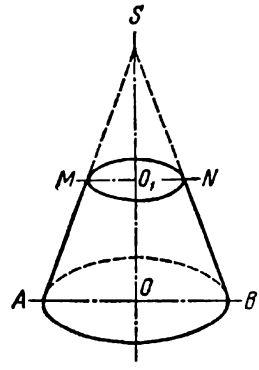


Рис. 212

ния усеченной пирамиды — подобные многоугольники (по теореме 2 § 3).

Правильной усеченной пирамидой называется такая усеченная пирамида, у которой оба основания — правильные многоугольники, а прямая, соединяющая центры оснований, перпендикулярна к плоскости оснований.

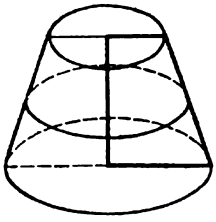


Рис. 213

В усеченном прямом круговом конусе оба основания — круги, а прямая, соединяющая центры этих кругов, перпендикулярна к их плоскостям (рис. 212). Прямой круговой усеченный конус может быть образован вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям (рис. 213). Вторая боковая сторона трапеции является при этом образующей и описывает боковую поверхность усеченного конуса. Параллельные стороны трапеции описывают круги — основания прямого кругового усеченного конуса.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ШАРА

Шаровой поверхностью, или *сферой* называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки, называемой *центром* сферы или шара. Часть пространства, ограниченная сферой, называется *шаром*.

Шар может быть получен вращением полукруга вокруг ограничивающего его диаметра. При этом полуокружность описывает шаровую поверхность.

Отрезок, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, называется *радиусом* шара.

Отрезок, соединяющий две любые точки на сфере, называется *хордой* шара. Хорда шара, проходящая через его центр, называется *диаметром* шара.

Теорема. *Сечение сферы любой пересекающей ее плоскостью есть окружность.*

Доказательство. Опустим из центра шара O перпендикуляр ON на секущую плоскость (рис. 214). Пусть $ON=h$, где $0\leqslant h<R$. Тогда для любой точки M, принадлежащей как секущей плоскости, так и сфере, имеем

$$MN=\sqrt{OM^2-ON^2}=\sqrt{R^2-h^2},$$

т. е. любая точка пересечения сферы с плоскостью удалена от точки N на одно и то же расстояние, а это означает, что точка M лежит на окружности.

Если секущая плоскость проходит через центр шара, то $h=0$ и в сечении мы получим окружность, радиус которой равен радиусу шара.

Плоскость, имеющая с шаром одну и только одну общую точку, называется *касательной* плоскостью к шаровой поверхности.

Теорема 2. *Плоскость P, перпендикулярная к радиусу шара и проведенная в его конце, есть касательная плоскость.*

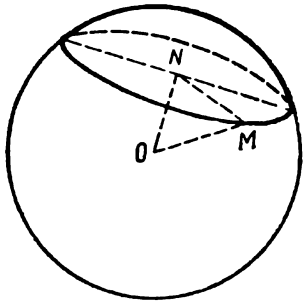


Рис. 214

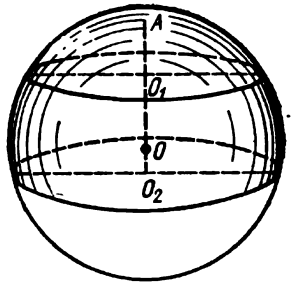


Рис. 215

Доказательство. Плоскость P и шаровая поверхность имеют общую точку A — конец радиуса OA. Для любой другой точки M, взятой на плоскости P, очевидно, $OM>OA$, так как OM, будучи наклонной к плоскости P, длиннее перпендикуляра OA. Следовательно, точка M лежит вне шара, т. е. A — единственная общая точка плоскости P и шаровой поверхности.

Тело, отсекаемое от шара плоскостью (рис. 215), называется *шаровым сегментом*. Отрезок радиуса O_1A, перпендикулярный к секущей плоскости и заключенный между этой плоскостью и сферой, называется *высотой* сегмента.

Тело, отсекаемое от шара двумя параллельными плоскостями, называется *шаровым слоем*, а сферическая поверхность шарового слоя — *шаровым поясом* (рис. 215). Отрезок O_1O_2 диаметра, перпендикулярного к секущим плоскостям, называется *высотой* шарового слоя.

Шаровой сегмент можно рассматривать как частный случай шарового слоя, когда одна из секущих плоскостей есть касательная

плоскость. Если обе секущие плоскости занимают положение параллельных касательных плоскостей, то шаровой слой переходит в шар. Высота такого шарового слоя равна диаметру шара.

Шаровой пояс и поверхность шарового сегмента можно получить вращением дуги полуокружности вокруг ее диаметра.

Тело, полученное вращением кругового сектора вокруг диаметра, лежащего в его плоскости и не пересекающего внутренность сектора, называется *шаровым сектором*.

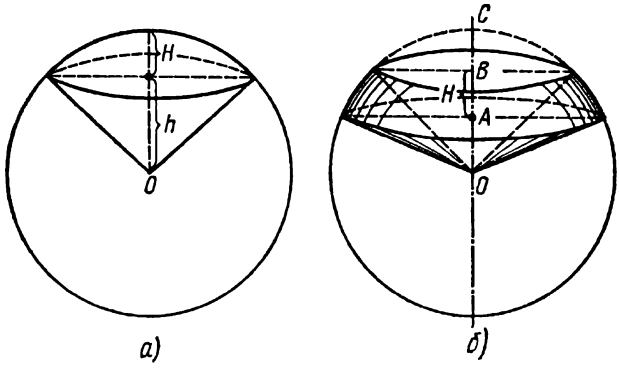


Рис. 216

На рис. 216, *а* изображен *простой*, или *сплошной* шаровой сектор. Он получается в том случае, когда радиус, ограничивающий соответствующий круговой сектор, лежит на оси вращения. В противном случае получается *полый* шаровой сектор (рис. 216, *б*). Простой шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. Высота этого шарового сегмента называется также *высотой* шарового сектора.

Полый шаровой сектор ограничен двумя коническими поверхностями и шаровым поясом. Высота полого шарового сектора совпадает с высотой этого шарового пояса.

ГЛАВА XVIII

ОБЪЕМЫ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ МНОГОГРАННИКОВ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, КОНУСОВ, ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

§ 1. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ОБЪЕМОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

При измерении объема измеряемое тело сравнивают с единичным кубом, объем которого принимают за единицу (1 см^3, 1 м^3 и т. д.). При этом измерение объемов должно удовлетворять следующим трем условиям:

1. Равные тела имеют равные объемы.
2. Если тело T содержится в теле G, то

$$\text{об. } T \leqslant \text{об. } G.$$

3. Если тело T составлено из двух тел P и G, то

$$\text{об. } T = \text{об. } P + \text{об. } G.$$

Поэтому если тело T состоит из n примыкающих друг к другу единичных кубов, то естественно считать, что об. $T = n$ ед^3.

Рассуждая так же, как и в § 5 гл. XV, получаем, что объем куба со стороной $\frac{p}{q}$ (p и q — целые) равен $\left(\frac{p}{q}\right)^3$ ед^3.

Пусть дано геометрическое тело T. Наложим на него пространственную кубическую решетку, состоящую из смежных кубов со стороной $\frac{1}{10^n}$ (решетка ранга n). Тело, образованное из всех кубов решетки ранга n, содержащихся в T, назовем *входящим телом* ранга n и обозначим $\underline{T}_n$. Объем $\underline{T}_n$ в силу условия 3 равен сумме объемов всех составляющих его кубов и есть $\underline{V}_n$.

Тело, образованное из всех кубов решетки, имеющих с T хотя бы одну общую точку, называется *выходящим телом* $\overline{T}_n$ ранга n. Обозначим его объем через $\overline{V}_n$.

Будем давать n последовательно значения 1, 2, 3, ... Если при некотором значении n входящее тело $\underline{T}_n$ (а, следовательно, и выходящее $\overline{T}_n$) совпадет с телом T, то принимаем, что

$$\text{об. } T = \text{об. } \underline{T}_n = \underline{V}_n \text{ (или } \overline{V}_n, \text{ так как } \overline{V}_n = \underline{V}_n).$$

Если такого n не существует, то процесс измельчения решетки продолжается неограниченно, и мы получаем две числовые последовательности объемов входящих и выходящих тел

$$\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3, \ldots, \underline{V}_n, \ldots \text{ и } \overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots, \overline{V}_n, \ldots .$$

Так как каждое входящее тело ранга k содержит в себе все входящие тела меньшего ранга и все они содержатся в $\overline{T}_1$, то

$$\underline{V}_m \leqslant \underline{V}_k \ (m < k) \text{ и } \underline{V}_k \leqslant \overline{V}_1;\ k = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, последовательность $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \ldots, \underline{V}_n, \ldots$ монотонно возрастает и ограничена, а потому имеет конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{V}_n$.

Аналогично показывается, что вторая последовательность также имеет конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{V}_n$, так как она монотонно убывает и ограничена:

$$\overline{V}_m \geqslant \overline{V}_k \ (m < k) \quad \text{и} \quad \overline{V}_k \leqslant \underline{V}_1;\ k = 1, 2, \ldots.$$

Если оба предела совпадают:

$$\lim_{n \to \infty} \underline{V}_n = \lim_{n \to \infty} \overline{V}_n = V,$$

то число V, выраженное в соответствующих кубических единицах, и принимают за объем тела T:

$$\text{об.}\, T = V.$$

Определенный таким способом объем тела удовлетворяет всем трем условиям, сформулированным в начале параграфа.

Замечание. Очевидно, что при измерении объема тело T можно сравнивать не только с кубом или с телом, составленным из кубов, но также и с любыми телами, объемы которых нам известны.

Тела, имеющие одинаковые объемы, называются *равновеликими*.

§ 2. ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Теорема. *Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDD_1C_1B_1A_1$ равен произведению трех его измерений:*

$$V = AB \cdot AD \cdot AA_1. \tag{1}$$

Доказательство. Случай 1. Все три измерения выражаются рациональными числами (или, в частности, целыми): $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

Пусть $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, $c = \frac{r}{s}$, m, n, p, q, r, s—целые. Приведем эти дроби к общему знаменателю:

$$a = \frac{mqs}{nqs},\ b = \frac{pns}{nqs},\ c = \frac{rnq}{nqs}.$$

На сторонах AB, AD и AA_1, начиная от точки A, отложим отрезки длиной $\frac{1}{nqs}$. На ребре AB, равном $\frac{mqs}{nqs}$, отложится mqs таких отрез-

ков, на ребре AD, равном $\frac{pns}{nqs}$, — pns таких отрезков и на ребре AA_1 — rnq отрезков. Через концы отрезков проведем плоскости, перпендикулярные соответственно сторонам AB, AD и AA_1. Эти плоскости разобьют параллелепипед на кубы со стороной, равной $\frac{1}{nqs}$. Весь параллелепипед будет содержать $mqs \cdot pns \cdot rnq$ таких кубов. Так как объем каждого куба равен $\left(\frac{1}{nqs}\right)^3$ ед^3, то согласно свойству 3 объем параллелепипеда

$$V = \frac{1}{(nqs)^3} \cdot mqs \cdot nps \cdot rnq = abc \text{ ед}^3.$$

Случай 2. Некоторые или все измерения параллелепипеда выражаются иррациональными числами. Каждое иррациональное число может быть приближенно выражено рациональными числами с любой степенью точности. Пусть $\underline{a}_n$ и $\overline{a}_n$ — десятичные приближения числа a с недостатком и избытком с точностью до $\frac{1}{10^n}$; $\underline{b}_n$ и $\overline{b}_n$ — аналогичные приближения числа b; $\underline{c}_n$ и $\overline{c}_n$ — аналогичные приближения числа c. Числа $\underline{a}_n$, $\overline{a}_n$, $\underline{b}_n$, $\overline{b}_n$, $\underline{c}_n$ и $\overline{c}_n$ — рациональные, причем $\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \overline{a}_n$, $\underline{b}_n \leqslant b \leqslant \overline{b}_n$, $\underline{c}_n \leqslant c \leqslant \overline{c}_n$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a,$$
$$\lim_{n\to\infty} \underline{b}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{b}_n = b,$$
$$\lim_{n\to\infty} \underline{c}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{c}_n = c.$$

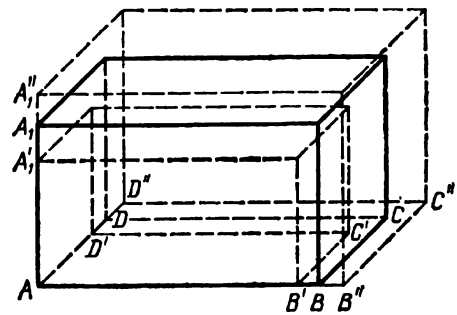


Рис. 217

Отложим на прямой AB отрезки $AB' = \underline{a}_n$ и $AB'' = \overline{a}_n$, на прямой AD — отрезки $AD' = \underline{b}_n$ и $AD'' = \overline{b}_n$, на прямой AA_1 — отрезки $AA_1' = \underline{c}_n$ и $AA_1'' = \overline{c}_n$ и построим два прямоугольных параллелепипеда с ребрами AB', AD', AA_1' и AB'', AD'', AA_1'' (рис. 217). Очевидно, первый параллелепипед будет входящим, а второй — выходящим телом. Их измерения выражаются рациональными числами и по доказанному (случай 1), для их объемов $\underline{V}_n$ и $\overline{V}_n$ имеем:

$$\underline{V}_n = \underline{a}_n \cdot \underline{b}_n \cdot \underline{c}_n \quad \text{и} \quad \overline{V}_n = \overline{a}_n \cdot \overline{b}_n \cdot \overline{c}_n.$$

Если неограниченно увеличивать n, то по свойству предела произведения

$$\lim_{n\to\infty} \underline{V}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \cdot \lim_{n\to\infty} \underline{b}_n \cdot \lim_{n\to\infty} \underline{c}_n = abc,$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{V}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n \cdot \lim_{n\to\infty} \overline{b}_n \cdot \lim_{n\to\infty} \overline{c}_n = abc.$$

Так как пределы объемов входящих и выходящих тел совпадают, то по определению, данному в § 1, этот общий предел и принимаем за объем данного параллелепипеда, т. е.

$$V_{\text{пар}} = abc.$$

Любую грань прямоугольного параллелепипеда можно принять за основание: тогда $AB \cdot AD = S_{\text{осн}}$, а AA_1 есть высота.

Следствие. *Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.*

§ 3. ОБЪЕМ ПРЯМОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Теорема. *Объем прямого цилиндрического тела T равен произведению площади его основания F на высоту H:*

$$V_{\text{цил. тела}} = \text{пл. } F \cdot H. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть F и Ф — основания цилиндрического тела T. Построим систему входящих $\underline{T}_n$ и выходящих $\overline{T}_n$ тел и покажем, что при неограниченно возрастающем n их объемы $\underline{V}_n$ и $\overline{V}_n$ имеют равные пределы.

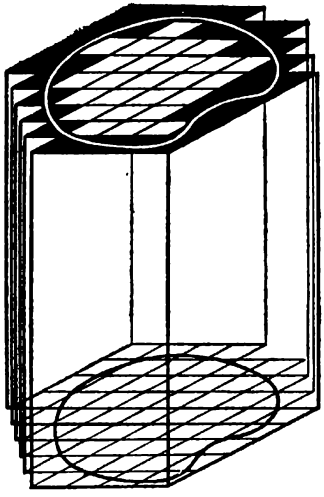


Рис. 218

Для построения тел $\underline{T}_n$ и $\overline{T}_n$ покроем фигуру F — основание цилиндрического тела — квадратной сеткой ранга n и выделим входящую фигуру $\underline{F}_n$ и выходящую фигуру $\overline{F}_n$ ранга n (рис. 218). Согласно определению § 4 гл. XV для их площадей $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$ имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S}_n = \lim_{n \to \infty} \overline{S}_n = \text{пл. } F.$$

На многоугольниках $\underline{F}_n$ и $\overline{F}_n$ построим прямые цилиндрические тела с высотой, равной H, которые обозначим соответственно через $\underline{T}_n$ и $\overline{T}_n$ (рис. 218). Ясно, что тело $\underline{T}_n$ будет входящим, а $\overline{T}_n$ — выходящим. Их объемы легко подсчитать. В самом деле, плоскостями, проходящими через прямые квадратной сетки и перпендикулярными к плоскости F, тела $\underline{T}_n$ и $\overline{T}_n$ разбиваются на равные прямоугольные параллелепипеды. Высота каждого такого параллелепипеда равна H, основанием является квадрат со стороной $\frac{1}{10^n}$. Следовательно, его объем равен $\frac{1}{10^{2n}} \cdot H$. Согласно свойству 3 объем входящего тела $\underline{T}_n$

равен сумме объемов всех параллелепипедов, составляющих это тело, т. е.

$$\underline{V}_n = \text{об.}\,\underline{T}_n = \underline{S}_n \cdot H.$$

Аналогично

$$\overline{V}_n = \text{об.}\,\overline{T}_n = \overline{S}_n \cdot H.$$

При неограниченном возрастании n имеем

$$\lim_{n\to\infty} \underline{V}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n \cdot H = \text{пл.}\, F \cdot H$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \overline{V}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n \cdot H = \text{пл.}\, F \cdot H.$$

Следовательно, объем тела T равен пл. $F \cdot H$, что и требовалось доказать.

С помощью формулы (2) можно находить объемы таких прямых цилиндрических тел, площади оснований которых мы умеем вычислять. Такими цилиндрическими телами являются, например, прямые призмы, в основании которых лежат многоугольники, прямой круговой цилиндр (в основании — круг) и т. д.

Следствие 1. *Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту:*

$$V_{\text{пр}} = S_{\text{осн}} \cdot H. \tag{3}$$

Следствие 2. *Объем прямого кругового цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.*

Если R — радиус основания цилиндра, а H — высота, то

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 \cdot H. \tag{4}$$

§ 4. ОБЪЕМ НАКЛОННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Теорема. *Объем наклонного цилиндрического тела равен произведению площади его основания на высоту.*

Доказательство. Пусть T — наклонный цилиндр, F и Φ — его основания, $BE = H$ — высота. Требуется доказать, что

$$\text{об.}\; T = \text{пл.}\, F \cdot H. \tag{5}$$

Через концы образующей AB проведем две перпендикулярные к ней плоскости P и Q (рис. 219, *а* и *б*). Тело, ограниченное этими плоскостями и продолженной боковой поверхностью, является прямым цилиндрическим, так как $P \parallel Q$, а все образующие им перпендикулярны. Обозначим это прямое цилиндрическое тело через T_1, а его нижнее и верхнее основания через F_1 и Φ_1.

Тело T_1 и тело ADM, ограниченное сечениями F и F_1, соприкасаются по F_1 и вместе составляют тело $ADNB$. Поэтому, согласно свойству 2 объема, имеем

$$\text{об.}\; ADNB = \text{об.}\; T_1 + \text{об.}\; ADM. \tag{a}$$

Но это же тело $ADNB$ составлено из данного наклонного цилиндрического тела T и тела BCN, ограниченного сечениями Ф и Φ_1. Поэтому

$$\text{об. } ADNB = \text{об. } T + \text{об. } BCN. \qquad (б)$$

Покажем, что тела ADM и BCN равны. С этой целью передвинем тело ADM вдоль образующих на длину AB. При этом точка A совместится с B, точка D—с точкой C, точка M—с точкой N. Фигура F совместится с равной и параллельной ей фигурой Ф, а фигура F_1—с фигурой Φ_1.

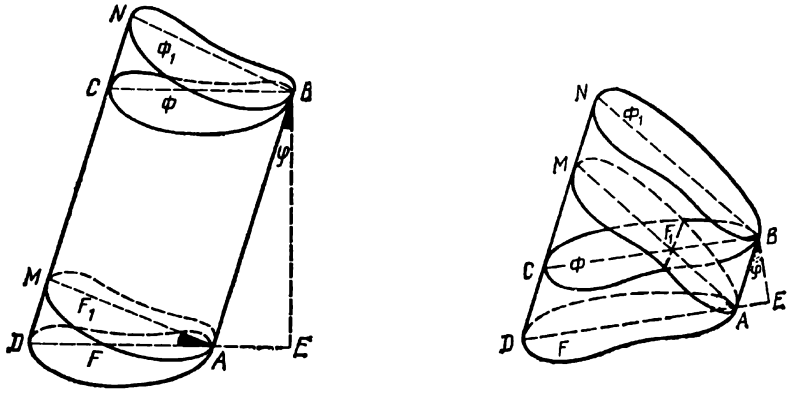


Рис. 219

Таким образом, тела ADM и BCN полностью совместятся, следовательно, они равны, а тем самым и равновелики, т. е.

$$\text{об. } ADM = \text{об. } BCN. \qquad (в)$$

Сравнивая теперь соотношения (а) и (б) и учитывая равенство (в), получаем

$$\text{об. } T = \text{об. } T_1.$$

Согласно теореме § 3 об. $T_1 = $ пл. $F_1 \cdot AB$.

Обозначим через φ линейный угол двугранного угла между плоскостями, в которых лежат основания F и F_1. Очевидно, этот угол равен углу ABE между высотой BE и образующей AB. Так как F_1 является проекцией F на плоскость P, то по лемме о площади проекции пл. $F_1 = $ пл. $F \cdot \cos\varphi$ и

$$\text{об. } T_1 = \text{пл. } F \cdot \cos\varphi \cdot AB. \qquad (г)$$

Учитывая, что $AB \cdot \cos\varphi = H$, из равенства (г) получаем

$$\text{об. } T = \text{об. } T_1 = \text{пл. } F \cdot H,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Объем наклонной призмы равен произведению площади ее основания на высоту:*

$$V_{\text{пр}} = S_{\text{осн}} \cdot H. \qquad (6)$$

Следствие 2. *Объем наклонного цилиндра, в основании которого лежит круг, равен произведению площади круга на высоту.*

Если R — радиус основания, а H — высота, то

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 H. \tag{7}$$

Сопоставляя результаты § 3 и 4, мы получаем единую формулу для вычисления объема любого цилиндрического тела.

Объем любого цилиндрического тела равен произведению площади его основания на высоту.

§ 5. ОБЪЕМ КОНУСА

Теорема. *Объем любого конуса K равен одной трети произведения площади его основания на высоту:*

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H. \tag{8}$$

Доказательство. Разделим высоту H на n равных отрезков и через точки деления O_1, O_2, ..., O_{n-1} (считаем от вершины S) проведем плоскости, параллельные основанию F (рис. 220). Полученные сечения обозначим через F_1, F_2, ..., F_{n-1}, а их площади соответственно через S_1, S_2, ..., S_{n-1}. Принимая каждое из сечений за верхнее основание, построим цилиндрические тела с равными высотами $h = \frac{H}{n}$ (рис. 220). Мы получим ступенчатое

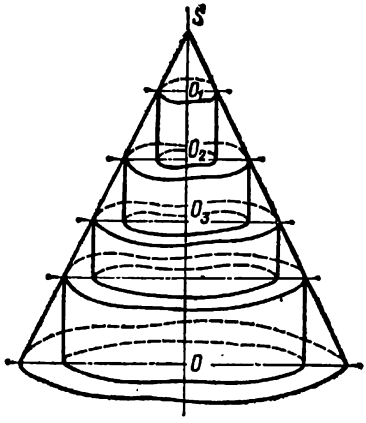


Рис. 220

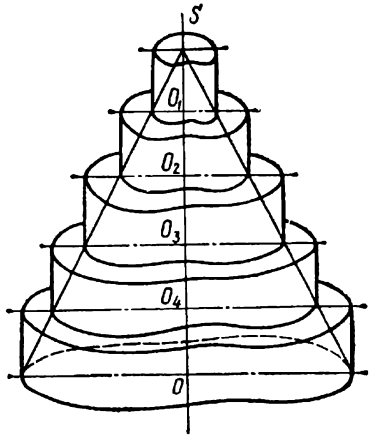


Рис. 221

тело $\underline{K}_n$, содержащееся внутри K. Следовательно, это входящее тело. Его объем $\underline{V}$ легко подсчитать.

Так как

$$SO_1 = h,\ SO_2 = 2h,\ \ldots,\ SO_{n-1} = (n-1)h,$$

то согласно свойству параллельных сечений конуса (теорема 3 § 3

гл. XVII)

$$S_1=\frac{h^2}{H^2}\text{ пл. }F=\frac{1}{n^2}\text{ пл. }F,\quad S_2=\frac{2^2}{n^2}\text{ пл. }F,\ \ldots,\ S_{n-1}=\frac{(n-1)^2}{n^2}\text{ пл. }F.$$

Объем $\underline{K}_n$ равен сумме объемов цилиндрических тел:

$$\text{об.}\underline{K}_n=\underline{V}_n=S_1\cdot h+S_2\cdot h+\ldots+S_{n-1}\cdot h=\frac{\text{пл. }F}{n^2}\cdot\frac{H}{n}[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2].$$

Используя формулу § 6 гл. V

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

и полагая в ней $k=n-1$, находим

$$\underline{V}_n=\frac{\text{пл. }F}{n^3}\cdot H\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{1}{6}\text{ пл. }F\cdot H\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

Чтобы получить выходящее тело $\overline{K}_n$, построим на основании конуса и на каждом сечении, как на нижнем основании, цилиндрические тела с равными высотами $h=\frac{H}{n}$ (рис. 221). Вычислим объем полученного тела:

$$\text{об. }\overline{K}_n=\overline{V}_n=\text{пл. }F\cdot h+S_1h+S_2h+\ldots+S_{n-1}\cdot h=\text{пл. }F\cdot\frac{H}{n}+$$
$$+\frac{1}{6}\text{ пл. }F\cdot H\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\text{пл. }F\cdot\frac{H}{n}+\underline{V}_n.$$

Пусть теперь n неограниченно возрастает. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\text{пл. }F\cdot\frac{H}{n}\right)=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\underline{V}_n=\lim_{n\to\infty}\overline{V}_n=\frac{1}{6}\text{ пл. }F\cdot H\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{3}\text{ пл. }F\cdot H.\ (*)$$

Согласно определению объема тела (§ 1), из равенства (*) имеем

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\text{ пл. }F\cdot H,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если высота SO лежит вне конуса, то вместо прямых цилиндрических тел будем строить наклонные цилиндрические тела, как это показано на рис. 222. Все остальные рассуждения доказательства остаются без изменения.

Следствие 1. *Конусы, имеющие равновеликие основания и равные высоты, равновелики.*

С помощью формулы (8) можно находить объемы таких конусов, площади оснований которых мы умеем вычислять. К таким конусам относятся, например пирамиды, в основании которых лежат многоугольники, круговые конусы и др.

Следствие 2. *Объем пирамиды равен произведению площади основания на треть высоты:*

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H. \tag{9}$$

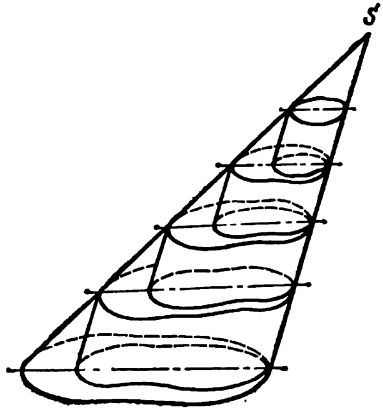


Рис. 222

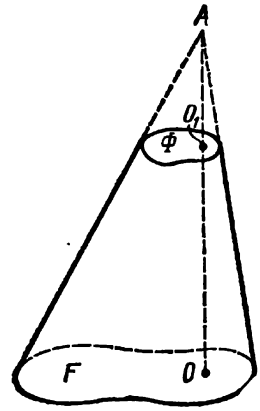


Рис. 223

Следствие 3. *Объем кругового конуса равен произведению площади круга, лежащего в основании, на треть высоты:*

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \tag{10}$$

где R — радиус основания, а H — высота.

§ 6. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Теорема. *Объем усеченного конуса, площади оснований которого равны S_1 и S_2, а высота равна H, находится по формуле*

$$V_{\text{ус. кон}} = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}). \tag{11}$$

Доказательство. Усеченный конус дополним до полного (рис. 223). Тогда объем усеченного конуса равен разности объемов двух конусов с общей вершиной A и основаниями F и Φ.

Обозначая высоту AO_1 дополнительно построенного конуса через x, имеем

$$V_{\text{ус.кон}} = \frac{1}{3} S_1 (H + x) - \frac{1}{3} S_2 x = \frac{1}{3} [S_1 H + (S_1 - S_2) x]. \tag{*}$$

В этом равенстве величина x нам неизвестна. Для ее нахождения воспользуемся формулой $\frac{S_1}{S_2} = \frac{(H+x)^2}{x^2}$, откуда, извлекая из обеих

частей равенства квадратный корень, получим $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}=\frac{H+x}{x}$. Применяя свойство производной пропорции, находим

$$\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}}=\frac{H}{x},$$

откуда

$$x=\frac{H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}.$$

Заменим в формуле (*) x найденным значением:

$$V_{\text{ус.кон}}=\frac{1}{3}\left[S_1H+(S_1-S_2)\frac{H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}\right]=\frac{H}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}),$$

что и требовалось доказать.

Полученная формула позволяет находить объемы таких усеченных конусов, площади оснований которых мы умеем вычислять. К таким усеченным конусам относятся, например, усеченная пирамида, усеченный круговой конус и т. д.

Следствие 1. *Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле*

$$V_{\text{усеч.пир}}=\frac{H}{3}(A+B+\sqrt{AB}), \tag{12}$$

где A и B — площади многоугольников, лежащих в ее основаниях, а H — высота.

Следствие 2. *Объем усеченного кругового конуса вычисляется по формуле*

$$V_{\text{усеч.кон}}=\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr), \tag{13}$$

где R и r — радиусы оснований, а H — высота.

§ 7. ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Теорема 1. *Объем шарового сегмента вычисляется по формуле*

$$V_{\text{шар. сегм}}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right), \tag{14}$$

где R — радиус шара, а H — высота сегмента.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $H\leqslant R$. Разделим высоту сегмента AB на n равных частей $\left(h=\frac{H}{n}\right)$ и через точки деления O_1, O_2, ..., O_{n-1} (считая от точки A) проведем плоскости, перпендикулярные высоте AB. В сечении этих плоскостей с шаром образуются круги с радиусами

$$r_1=O_1A_1,\ r_2=O_2A_2,\ \ldots,\ r_{n-1}=O_{n-1}A_{n-1}.$$

На этих кругах построим цилиндры с высотой $h=\frac{H}{n}$, как это показано на рис. 224. Эти цилиндры образуют ступенчатое тело, содержащееся внутри данного шарового сегмента. Его объем

$$\underline{V}_n=\pi\frac{H}{n}(r_1^2+r_2^2+\ldots+r_{n-1}^2). \qquad (*)$$

Величина r_k^2 есть средняя пропорциональная между отрезками $AO_k=\frac{H}{n}k$ и $O_kC=2R-\frac{H}{n}k$ (рис. 225). Следовательно,

$$r_k^2=\frac{H}{n}k\left(2R-\frac{H}{n}k\right)$$

и

$$\underline{V}_n=\pi\frac{H^2}{n^2}\left\{2R\left[1+2+\ldots(n-1)\right]-\frac{H}{n}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]\right\}=$$

$$=\pi\frac{H^2}{n^2}\left[2R\cdot\frac{n(n-1)}{2}-\frac{H}{n}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]=$$

$$=\pi H^2\left[R\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{H}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right].$$

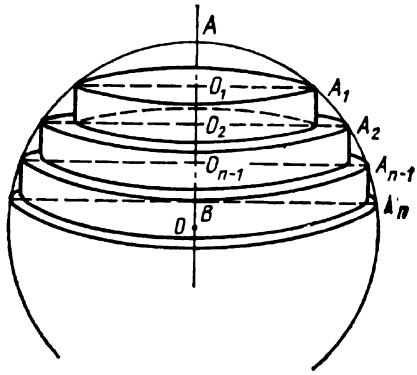


Рис. 224

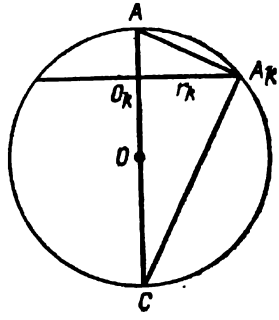


Рис. 225

Будем неограниченно увеличивать n. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\underline{V}_n=\lim_{n\to\infty}\pi H^2\left[R\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{H}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

Ступенчатое тело, состоящее из цилиндров с высотами $\frac{H}{n}$ и радиусами оснований r_1, r_2, ..., r_{n-1}, $r_n=BA_n$ (рис. 226), содержит данный шаровой сегмент. Его объем

$$\bar{V}_n=\pi\frac{H}{n}(r_1^2+r_1^2+\ldots+r_{n-1}^2+BA_n^2)=\underline{V}_n+\frac{\pi H}{n}\cdot BA_n^2.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi H}{n}\cdot BA_n^2=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\bar{V}_n=\lim_{n\to\infty}\underline{V}_n=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

По определению объема тела отсюда следует, что

$$V_{\text{шар. сегм}} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right).$$

Следствие. *Объем шара вычисляется по формуле*

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3. \qquad (15)$$

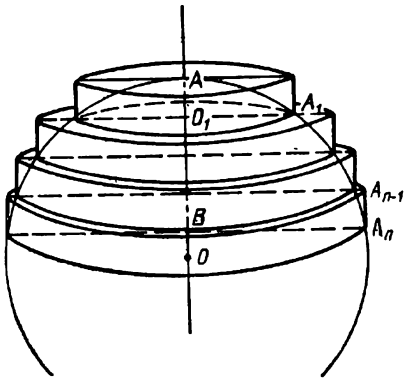


Рис. 226

Действительно, полагая в формуле (14) $H = R$, получим объем полушара. Поэтому

$$V_{\text{шара}} = 2\pi R^2 \left(R - \frac{R}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Замечание. Теперь можно показать, что формула (14) справедлива и в том случае, когда высота сегмента $H > R$.

Объем V такого шарового сегмента можно получить как разность между объемом шара и объемом V_1 сегмента с высотой $2R - H = h$, где $h < R$. Тогда

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 - \pi (2R - H)^2 \left(R - \frac{2R - H}{3} \right) =$$

$$= \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right).$$

Теорема 2. *Объем шарового сектора вычисляется по формуле*

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H, \qquad (16)$$

где H — высота этого сектора.

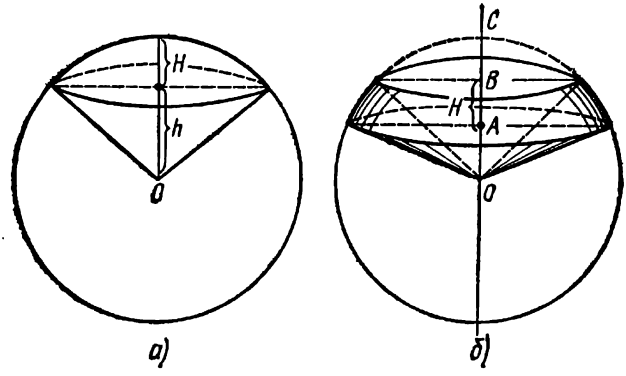


Рис. 227

Доказательство. Объем простого шарового сектора равен сумме объемов шарового сегмента и конуса (рис. 227, *а*):

$$V_{\text{шар. сект}} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right) + \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

где

$$h = R - H,\ r^2 = H(2R - H).$$

Поэтому

$$V_{\text{шар. сект}} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) + \frac{1}{3}\pi H(2R - H)(R - H) = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Объем полого шарового сектора равен разности объемов двух простых секторов (рис. 227, *б*):

$$V_{\text{шар. сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 AC - \frac{2}{3}\pi R^2 AB = \frac{2}{3}\pi R^2 (AC - AB) = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

§ 8. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ МНОГОГРАННИКОВ, ЦИЛИНДРОВ И КОНУСОВ

Поверхность многогранника состоит из плоских граней — многоугольников. Поэтому площадь поверхности многогранника равна сумме площадей всех его граней.

Для цилиндрических и конических тел вводятся понятия *площади боковой поверхности и площади полной поверхности.*

Площадь боковой поверхности призмы и пирамиды равна сумме площадей всех их боковых граней.

Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра определяется как общий предел площадей боковых поверхностей правильных вписанных и соответственно описанных призм, когда число сторон основания этих призм неограниченно удваивается.

Аналогично вводится понятие площади боковой поверхности конуса и усеченного конуса. *Площадью боковой поверхности прямого кругового конуса* называется общий предел, к которому стремятся площади боковых поверхностей правильных пирамид, вписанных и соответственно описанных около конуса, когда число сторон основания этих пирамид неограниченно удваивается.

Площадь полной поверхности этих тел складывается из площади их боковых поверхностей и площади оснований.

Приведем основные формулы для вычисления площадей поверхностей указанных тел.

Теорема 1. *Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту.*

Доказательство. Боковые грани такой призмы — прямоугольники с общей высотой H, равной высоте призмы. Обозначая стороны основания призмы через a, b, c, ..., q, получим

$$S_{\text{бок пр}} = aH + bH + cH + \ldots + qH = (a + b + c + \ldots + q)\ H = P \cdot H, \quad (17)$$

где P — периметр основания призмы.

Теорема 2. *Площадь боковой поверхности пирамиды, боковые грани которой имеют равные между собой апофемы, равна произведению полупериметра ее основания на высоту.*

Доказательство. Боковая поверхность такой пирамиды состоит из треугольников с равными высотами. Обозначая через l

апофему, а через a, b, c, ..., q — стороны основания, имеем

$$S_{\text{бок. пир}} = \frac{1}{2}al + \frac{1}{2}bl + \ldots + \frac{1}{2}ql = \frac{1}{2}(a+b+\ldots+q)\cdot l = p\cdot l, \quad (18)$$

где p — полупериметр основания.

Следствие. *Площадь боковой поверхности пирамиды с равными апофемами боковых граней равна площади ее основания, деленной на косинус угла наклона ее боковых граней к плоскости основания:*

$$S_{\text{бок. пир}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}. \quad (19)$$

Доказательство. Из равенства апофем вытекает равенство их проекций r на плоскости основания и равенство двугранных углов при основании, причем апофема $l = \frac{r}{\cos\varphi}$. По теореме 2

$$S_{\text{бок. пир}} = \frac{p\cdot r}{\cos\varphi} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi},$$

так как $p\cdot r = S_{\text{осн}}$.

Замечание. Теорема 2 и следствие справедливы, в частности, для любой правильной пирамиды. Требование равенства апофем можно заменить равенством двугранных углов при основании пирамиды и другими эквивалентными условиями.

Теорема 3. *Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды с равными апофемами боковых граней равна произведению суммы полупериметров ее оснований на апофему.*

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра равна произведению длины окружности его основания на высоту.*

Доказательство. Впишем в цилиндр правильную n-угольную призму. Площадь ее боковой поверхности $s_n = P_n\cdot H$, где P_n — периметр многоугольника ее основания, а H — образующая цилиндра. При неограниченном удвоении числа сторон основания

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} P_n\cdot H = 2\pi R\cdot H.$$

Площадь S_n боковой поверхности правильной n-угольной призмы, описанной около цилиндра, равна $Q_n\cdot H$, где Q_n — периметр n-угольника, описанного вокруг основания цилиндра:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} Q_n\cdot H = 2\pi R\cdot H.$$

Согласно определению площади боковой поверхности цилиндра

$$S_{\text{бок. цил}} = 2\pi R\cdot H. \quad (20)$$

Теорема 5. *Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна половине произведения длины окружности его основания на образующую*:

$$S_{\text{бок. кон}} = \pi R l. \tag{21}$$

Доказательство. Площадь боковой поверхности правильной n-угольной вписанной пирамиды $s_n = \frac{1}{2} P_n \cdot l_n$, площадь боковой поверхности правильной n-угольной описанной пирамиды $S_n = \frac{1}{2} Q_n \cdot l$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R l$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot l$, то по определению

$$S_{\text{бок. кон}} = \pi R l.$$

Замечание. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = R$, а $l_n = \sqrt{H^2 + r_n^2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \sqrt{H^2 + R^2} = l$.

Площадь боковой поверхности прямого кругового усеченного конуса можно получить как разность площадей боковых поверхностей двух конусов.

Теорема. *Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы периметров его оснований на образующую*:

$$S_{\text{бок. ус. кон}} = \pi (R + r) l. \tag{22}$$

Доказательство. Достроим усеченный конус до полного и обозначим через x образующую достроенной части. Тогда

$$S_{\text{бок. ус. кон}} = \pi R (l + x) - \pi r x = \pi R l + \pi (R - r) x. \tag{*}$$

Для определения величины x составим пропорцию

$$\frac{R}{r} = \frac{l + x}{x},$$

откуда $(R - r) x = r l$. Возвращаясь к соотношению (*), находим

$$S_{\text{бок. ус. кон}} = \pi R l + \pi r l = \pi (R + r) l.$$

§ 9. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Определение. *Площадью поверхности тела, образованного вращением дуги окружности вокруг непересекающего ее диаметра, называется предел, к которому стремится площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг той же оси правильной ломаной, вписанной в указанную дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно удваивается.*

Теорема. *Площадь поверхности шарового слоя, а также шарового сегмента равна произведению их высоты на длину большого круга шара*:

$$S_{\text{шар. слоя}} = 2\pi R H; \quad S_{\text{шар. сегм}} = 2\pi R H. \tag{23}$$

Доказательство. Шаровой пояс образован вращением дуги AB вокруг диаметра MN (если точки M и A совпадают, то получается шаровой сегмент).

Впишем в дугу AB правильную ломаную. При ее вращении вокруг MN звенья ломаной могут описывать либо боковую поверхность усеченного конуса (например, AE), либо боковую поверхность кругового конуса (если конец звена совпадает с концом оси), либо боковую поверхность кругового цилиндра (рис. 228).

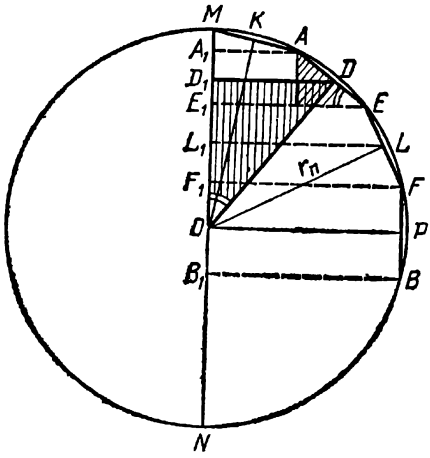


Рис. 228

Проведем апофемы OD, OK, ... Длину апофем обозначим через r_n: $OD = OK = \ldots = r_n$. Найдем площадь поверхности, которую описывает произвольное звено, например AE. Так как D_1D — средняя линия трапеции EE_1A_1A ($DD_1 \perp MN$), то

$$S_{AE} = \pi (A_1A + E_1E) \cdot AE =$$

$$= \pi \cdot 2D_1D \cdot A_1E_1 \cdot \frac{1}{\sin \angle AEE_1} =$$

$$= 2\pi OD \cdot \sin \angle D_1OD \cdot \frac{A_1E_1}{\sin \angle AEE_1} =$$

$$= 2\pi r_n \cdot A_1E_1.$$

Мы использовали равенство углов AEE_1 и D_1OD. Вывод остается верным для любого звена взятой ломаной. Тогда площадь боковой поверхности, образованной вращением всей ломаной,

$$S_{\text{лом}} = 2\pi r_n MA_1 + 2\pi r_n A_1E_1 + 2\pi r_n E_1F_1 + 2\pi r_n \cdot F_1B_1 = 2\pi r_n \cdot H,$$

где

$$H = MA_1 + A_1E_1 + E_1F_1 + F_1B_1 = A_1B_1.$$

При неограниченном удвоении числа звеньев ломаной апофема неограниченно приближается к радиусу окружности. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} S_{\text{лом}} = \lim_{n \to \infty} 2\pi r_n H = 2\pi RH,$$

и, согласно определению,

$$S_{\text{шар. слоя}} = 2\pi RH.$$

Следствие. *Площадь поверхности шара вычисляется по формуле*

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2. \qquad (24)$$

Действительно, полагая в предпоследнем равенстве $H = 2R$, получим формулу (24).

ГЛАВА XIX

ОБЗОР ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

В этой главе мы рассмотрим некоторые типовые задачи и методы их решения.

Важнейшим и, можно сказать, необходимым условием правильного решения является грамотно выполненный чертеж, на котором должны быть точно указаны все элементы, участвующие в решении, например, углы, высоты, точки касания и т. д. Все построения должны быть строго обоснованы ссылками на соответствующие теоремы и определения. Построение чертежа во многих случаях является самой трудной частью решения задачи. Рассмотрим несколько таких задач, которые становятся совсем легкими после правильно построенного чертежа. Решение этих задач основано на следующих трех свойствах, которые необходимо запомнить.

1. Если пирамида имеет равные боковые ребра или же эти ребра образуют равные углы с плоскостью основания, то ее высота проходит через центр окружности, описанной около основания пирамиды.

2. Если апофемы боковых граней равны или эти грани образуют равные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

3. Если боковое ребро образует с прилежащими ребрами основания равные углы, то проекция этого ребра является биссектрисой плоского угла, образованного этими ребрами основания.

Доказательство этих фактов несложно и предоставляется читателю.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна высоте пирамиды. Найти углы между боковыми ребрами и плоскостью основания, если известно, что боковые ребра равны.

Решение. Задача становится чрезвычайно простой, если правильно выполнить чертеж.

Так как боковые ребра равны, то высота пирамиды SD проходит через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Следовательно, точка D лежит на середине гипотенузы AB (рис. 229); $SD \perp$ пл. ABC, поэтому CD — проекция ребра SC. Далее, $\angle SAD = \angle SCD = \angle SBD$. В прямоугольном треугольнике SCD катет $SD = AB = 2CD$. Это означает, что $\frac{SD}{CD} = 2 = \operatorname{tg} \angle SCD$. Итак,

$$\angle SCD = \angle SBD = \angle SAD = \operatorname{arctg} 2.$$

Задача 2. Противоположные ребра основания четырехугольной пирамиды попарно параллельны, а ее боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами φ. Найти объем пирамиды, если диагонали ее основания равны a и b.

Решение. Так как боковые грани равнонаклонены к плоскости основания, то высота SO проходит через центр окружности,

вписанной в четырехугольник $ABCD$ (рис. 230). Так как $AB \| CD$ и $AD \| CB$, то $ABCD$ является параллелограммом, в который, кроме того, можно вписать окружность. Следовательно, $ABCD$ — ромб и O — точка пересечения его диагоналей. Построим один из линейных углов данных двугранных углов. Для этого в плоскости осно-

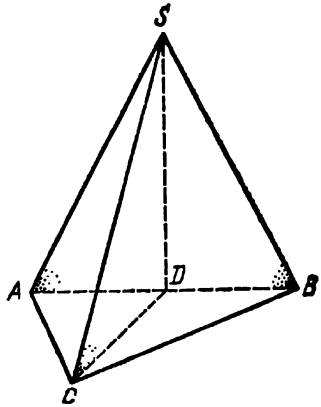


Рис. 229

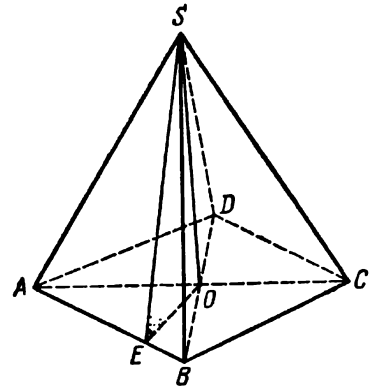


Рис. 230

вания проведем $OE \perp AB$ и E соединим с S. По теореме о трех перпендикулярах $AB \perp$ пл. SEO, т. е. $\angle SEO$ есть линейный угол φ.

Перейдем к вычислительной части задачи. Имеем $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{6} abH$. Высоту пирамиды $SO = H$ мы найдем из треугольника SEO,

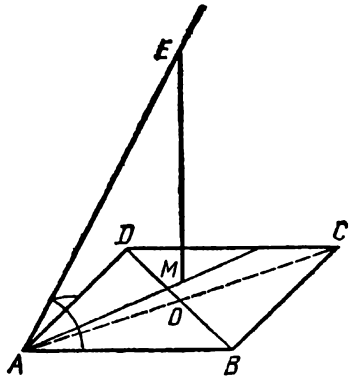


Рис. 231

если предварительно вычислим катет EO ($\angle SEO = \varphi$, $\angle SOE = 90°$; рис. 230). Для нахождения катета EO рассмотрим ромб $ABCD$; EO является половиной высоты ромба: $AO = \frac{a}{2}$, $OB = \frac{b}{2}$; $AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Так как $AO \cdot OB = AB \cdot OE$, то $OE = \frac{AO \cdot OB}{AB} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$. Возвращаясь к треугольнику SOE, находим $OS = H = OE \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{ab \cdot \operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$ и

$$V_{\text{пир}} = \frac{a^2 b^2 \operatorname{tg} \varphi}{12\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Задача 3. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ проведена вне его плоскости прямая, образующая со сторонами AB и AD равные острые углы. На какие части проекция этой прямой на плоскость $ABCD$ делит диагональ BD, если $AB = a$, $BC = b$?

Решение. Проекция прямой на плоскость $ABCD$ является биссектрисой угла A (см. п. 3 на стр. 475). Следовательно, задача

состоит в том, чтобы найти части, на которые делится диагональ BD биссектрисой угла A (рис. 231).

Рассмотрим треугольник ADB. По свойству биссектрисы внутреннего угла имеем $\frac{DM}{MB}=\frac{AD}{AB}$. По условию $AD=b$, $AB=a$, $DB=\sqrt{a^2+b^2}$. Составляя производную пропорцию

$$\frac{DM+MB}{MB}=\frac{a+b}{a}, \text{ или } \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{MB}=\frac{a+b}{a},$$

находим

$$MB=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \text{ и } DM=DB-MB=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

После этих предварительных замечаний рассмотрим следующие типы задач.

§ 1. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ. ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ. ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ

Выполнив чертеж, рассматриваем тот треугольник, который содержит искомый угол. Если число данных в этом треугольнике недостаточно для его решения, то эти недостающие данные находим из других треугольников, примыкающих к рассматриваемому.

Задача 1. Гипотенуза прямоугольного треугольника с острым углом α лежит в плоскости P. Найти углы, которые составляют с этой плоскостью его катеты, если угол между плоскостью P и плоскостью треугольника равен φ.

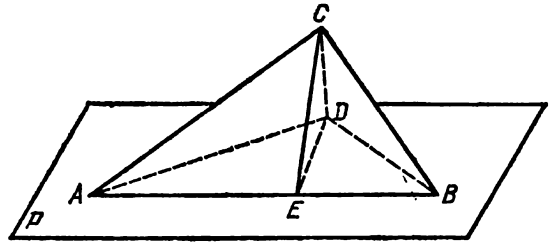


Рис. 232

Решение. Опустим из вершины прямого угла C перпендикуляр CD на плоскость P (рис. 232) и в плоскости P проведем $DE\perp AB$. Точки C и E соединим. Так как $AB\perp CD$ и $AB\perp DE$, то $AB\perp$ пл. CDE, т. е. $\angle CED=\varphi$ как линейный угол данного двугранного угла.

Так как AD — проекция AC, BD — проекция BC на плоскость P, то углы CAD и CBD — искомые. Эти углы принадлежат треугольникам ADC и CDB соответственно. Найдем длины катетов в этих треугольниках.

Катеты AC и CB находим из треугольника ABC ($\angle BAC=\alpha$). Обозначая его гипотенузу $AB=c$, имеем: $AC=c\cos\alpha$ и $BC=c\sin\alpha$, $CE\cdot AB=AC\cdot CB$, откуда

$$CE=\frac{c^2\cos\alpha\sin\alpha}{c}=c\cos\alpha\cdot\sin\alpha.$$

Сторону DC находим из треугольника DCE: $DC=CE\cdot\sin\angle DEC=$ $=c\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi$. Возвращаясь к треугольникам ACD и DCB,

окончательно получаем

$$\sin\angle CAD=\frac{CD}{AC}=\frac{c\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi}{c\cos\alpha}=\sin\alpha\cdot\sin\varphi,$$

$$\sin\angle CBD=\frac{CD}{BC}=\frac{c\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi}{c\sin\alpha}=\cos\alpha\cdot\sin\varphi,$$

т. е.

$$\angle CAD=\arcsin(\sin\alpha\cdot\sin\varphi)\text{ и }\angle CBD=\arcsin(\cos\alpha\cdot\sin\varphi).$$

Задача 2. Через точку, лежащую на ребре двугранного угла, равного 45°, проходят два луча, расположенные в различных его полуплоскостях. Один из лучей перпендикулярен к ребру, а другой образует с ребром угол в 30°. Найти угол между данными лучами.

Решение. Отложим на луче, перпендикулярном ребру MN, отрезок $AB=a$ и из точки B опустим на плоскость второй грани перпендикуляр BO (рис. 233). Из точки O проведем в этой плоскости $OC\perp AC$. Соединим точки O и A, C и B. Так как $MN\perp AB$ и $MN\perp BO$, то $MN\perp$ пл. ABO; следовательно, $\angle BAO$ — линейный угол данного двугранного угла, т. е. $\angle BAO=45°$. Кроме того, $\angle CAO=90°-\angle CAN=90°-30°=60°$ ($AO\perp MN$).

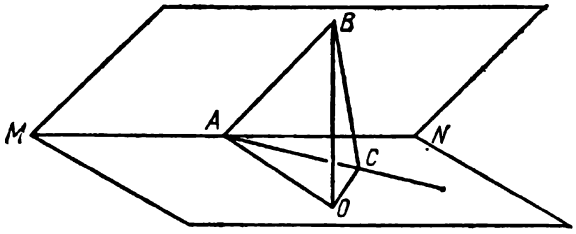


Рис. 233

Искомый угол BAC мы найдем из треугольника ABC. В этом треугольнике $\angle BCA=90°$ ($OC\perp AC$, следовательно, и $BC\perp AC$) и $AB=a$. Чтобы найти один из его катетов (AC), рассмотрим треугольники ABO ($AB=a$, $\angle BAO=45°$, $\angle BOA=90°$) и AOC ($\angle CAO=60°$, $\angle OCA=90°$).

Из первого находим $AO=BO=\frac{a}{\sqrt{2}}$, тогда из второго получаем $AC=AO\cdot\cos 60°=\frac{a}{2\sqrt{2}}$. Возвращаясь к треугольнику ABC, окончательно получаем

$$\cos\angle BAC=\frac{AC}{AB}=\frac{a}{2\sqrt{2}a}=\frac{1}{2\sqrt{2}};\ \angle BAC=\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Задача 3. Две грани треугольной пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и ABD с общей гипотенузой AB — образуют двугранный угол α ($\alpha<90°$). Найти двугранный угол, ребром которого является катет BD.

Решение. Из вершины C опустим перпендикуляр CO на гипотенузу AB и точку O соединим с D (рис. 234). Так как треугольники ACB и ADB равнобедренные, то O — середина AB и $DO\perp AB$. Следовательно, $\angle DOC=\alpha$ как линейный угол данного двугранного

угла. Построим линейный угол искомого двугранного угла при ребре BD. Для этого из вершины C опустим на плоскость ABD перпендикуляр CE, который лежит в плоскости треугольника COD (пл. $COD \perp$ пл. ABD). Из точки E проведем $EF \perp BD$ и точки F и C соединим. Так как $BD \perp CE$ и $BD \perp EF$, то $\angle CFE$ — искомый линейный угол. Его мы найдем из треугольника CEF ($\angle E = 90°$), если предварительно вычислим два его элемента.

Пусть $AB = a$. Тогда $CO = \frac{a}{2}$, $CE = CO \cdot \sin\alpha = \frac{a}{2}\sin\alpha$, $OE = \frac{a}{2}\cos\alpha$. Чтобы найти EF, рассмотрим треугольник EDF, в кото-

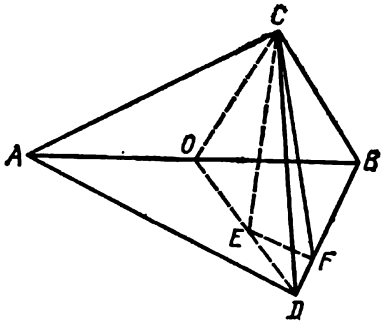


Рис. 234

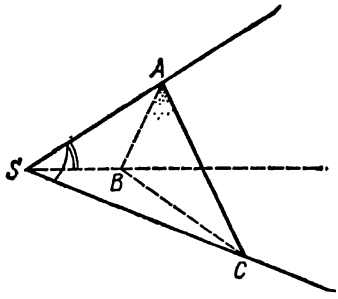


Рис. 235

ром $\angle EDF = 45°$, $\angle EFD = 90°$ и $ED = OD - OE = \frac{a}{2}(1 - \cos\alpha) = a\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $EF = ED \cdot \sin 45° = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Возвращаясь к треугольнику CFE, находим

$$\operatorname{tg}\angle CFE = \frac{CE}{EF} = \frac{\sqrt{2}\,a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{a\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

т. е.

$$\angle CFE = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Задача 4. Два плоских угла трехгранного угла равны α и β. Найти третий плоский угол, если противолежащий ему двугранный угол — прямой ($\alpha < 90°$ и $\beta < 90°$).

Решение. Через точку A, взятую на ребре прямого двугранного угла, проведем плоскость, перпендикулярную этому ребру (рис. 235). Эта плоскость пересечет грани трехгранного угла по прямым $AC \perp SA$, $AB \perp SA$ и BC. Имеем $\angle BAC = 90°$, $\angle ASC = \alpha$, $\angle ASB = \beta$. Требуется определить угол BSC. Этот угол мы найдем из треугольника BSC, если предварительно вычислим все его стороны.

1) Из $\triangle BAS$ (положим $SA = a$; $\angle BAS = 90°$, $\angle ASB = \beta$) имеем $AB = a\operatorname{tg}\beta$, $SB = \frac{a}{\cos\beta}$.

2) Из $\triangle SAC$ ($\angle SAC = 90°$, $\angle ASC = \alpha$, $SA = a$) имеем $AC = a \operatorname{tg} \alpha$, $SC = \frac{a}{\cos \alpha}$.

3) Из $\triangle ABC$ находим $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}$.

Возвращаясь к треугольнику SBC, получаем

$$\cos \angle BSC = \frac{SB^2 + SC^2 - BC^2}{2SB \cdot SC} =$$

$$= \frac{\frac{a^2}{\cos^2 \beta} + \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} - a^2 (\operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\frac{2a^2}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Следовательно, $\angle BSC = \arccos (\cos \alpha \cdot \cos \beta)$.

Задача 5. Один из плоских углов трехгранного угла равен 60°. Прилежащие к нему двугранные углы равны 30° и 45°. Найти два других плоских угла, если известно, что они острые.

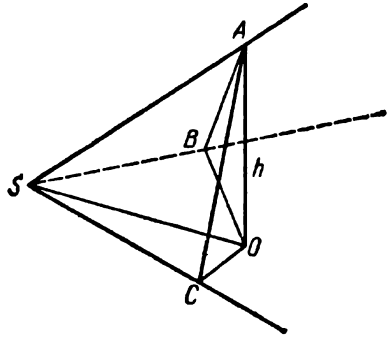


Рис. 236

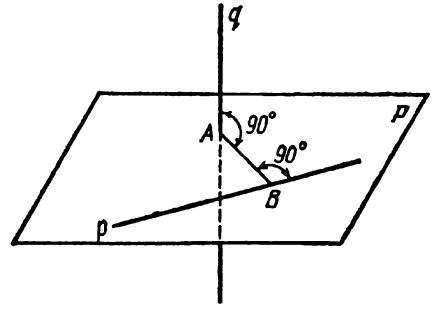


Рис. 237

Решение. Из произвольной точки A ребра, противолежащего грани известного плоского угла, опустим на эту грань перпендикуляр AO и проведем $OB \perp SB$ и $OC \perp SC$ (рис. 236). Точки B и C соединим с A. Так как $SB \perp OB$ и $SB \perp AO$, то $SB \perp$ пл. ABO, т. е. $\angle ABO = 45°$ как линейный угол данного двугранного угла. Аналогично получаем, что $\angle ACO = 30°$. Искомые углы ASB и ASC найдем из одноименных треугольников. Обозначая $AO = h$, рассмотрим последовательно ряд треугольников.

1) Из $\triangle ABO$ ($\angle AOB = 90°$, $\angle OBA = 45°$, $AO = h$) находим $BO = AO = h$, $AB = h\sqrt{2}$.

2) Из $\triangle ACO$ ($\angle AOC = 90°$, $\angle OCA = 30°$, $AO = h$) находим $AC = \frac{h}{\sin 30°} = 2h$, $OC = h \operatorname{ctg} 30° = h\sqrt{3}$.

3) В четырехугольнике $OBSC$ (OB и OC известны, $\angle S = 60°$, $\angle B = \angle C = 90°$) проведем OS и рассмотрим треугольники SBO и SCO. Имеем

$$OS = \frac{OB}{\sin \angle OSB} = \frac{h}{\sin x}, \quad OS = \frac{OC}{\sin \angle OSC} = \frac{h\sqrt{3}}{\sin (60° - x)},$$

откуда для определения x получаем уравнение

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(60^\circ-x)},$$

решая которое, находим

$$(2\sqrt{3}+1)\sin x=\sqrt{3}\cos x,$$

т. е.

$$\operatorname{ctg} x=\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \text{ и } \operatorname{ctg}(60^\circ-x)=\frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

Теперь можно найти BS и CS. Из треугольника SBO находим $BS=BO\cdot\operatorname{ctg} x=\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}h$, из треугольника SCO находим $CS=$ $=OC\cdot\operatorname{ctg}(60^\circ-x)=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}h$.

Возвращаясь к треугольникам ASB и ASC, окончательно получаем

$$\operatorname{tg}\angle ASB=\frac{AB}{SB}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+1},\ \operatorname{tg}\angle ASC=\frac{AC}{SC}=\frac{6}{2\sqrt{3}+3}.$$

§ 2. УГОЛ И РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Как известно, за один из углов между скрещивающимися прямыми p и q принимают угол, образованный двумя лучами OA и OB, выходящими из одной точки O и соответственно параллельными данным прямым: $OA\parallel p$ и $OB\parallel q$. Точка O выбирается произвольно и, в частности, может быть взята на одной из скрещивающихся прямых. Вообще, выбор точки O зависит от конкретной задачи. Если через одну из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, перпендикулярную другой, то эти прямые образуют угол в 90°. В этом случае легко построить их общий перпендикуляр. Для этого достаточно из точки A пересечения прямой q с перпендикулярной ей плоскостью P (рис. 237) опустить перпендикуляр AB на прямую p, лежащую в плоскости P. Длина этого перпендикуляра и есть расстояние между прямыми p и q (см. задачу 1). В общем случае, чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми p и q, нужно через одну из них (например q) провести плоскость Q, параллельную другой (p). Тогда расстояние от любой точки прямой p до параллельной ее плоскости Q и есть искомое расстояние между скрещивающимися прямыми p и q.

Задача 1. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найти угол и расстояние между его скрещивающимися ребрами.

Решение. Найдем угол и расстояние между ребрами BC и AS. Из точки A опустим на ребро BC перпендикуляр AD и соединим D с S (рис. 238). Так как $BC\perp SO$ (SO — высота) и $BC\perp AD$, то $BC\perp$ пл. ASD и, следовательно, $BC\perp AS$.

Чтобы найти расстояние между AS и BC, проведем в плоскости ASD прямую $DE \perp AS$. Так как $DE \perp BC$ и $DE \perp AS$, то DE является общим перпендикуляром скрещивающихся прямых BC и AS. Кроме того, ED — высота в треугольнике ASD, в котором $AD = DS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $AS = a$. Поэтому

$$DE = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AS}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 2. В кубе, ребро которого равно a, найти угол и расстояние:

1) между ребром и скрещивающейся с ним диагональю куба;

2) между диагональю грани и скрещивающейся с ней диагональю куба;

3) между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней.

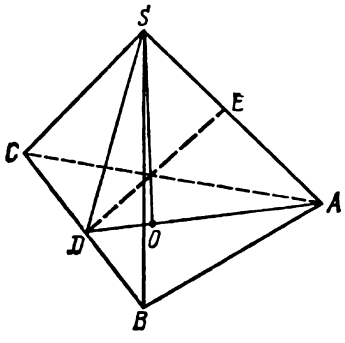


Рис. 238

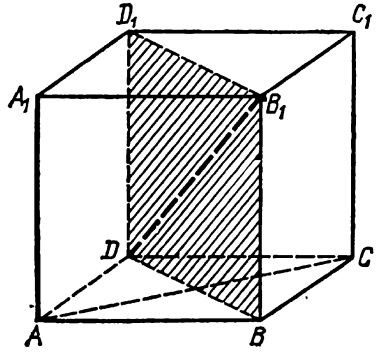


Рис. 239

Решение. 1) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рассмотрим ребро AA_1 и диагональ DB_1 (рис. 239). Так как $AA_1 \parallel BB_1$, то угол DB_1B равен искомому углу между скрещивающимися прямыми AA_1 и DB_1 и легко находится из треугольника DB_1B, в котором $BB_1 = a$, $DB = a\sqrt{2}$, $\angle B_1BD = 90°$. Поэтому $\operatorname{tg} \angle DB_1B = \frac{BD}{B_1B} = \sqrt{2}$.

Для определения расстояния между прямыми AA_1 и DB_1 заметим, что прямая AA_1 параллельна плоскости BDD_1B_1, в которой лежит прямая DB_1. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой AA_1 на эту плоскость. Проведем диагональ AC. Так как $AC \perp BD$ и $AC \perp BB_1$, то $AC \perp$ пл. BDD_1B_1 и $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и есть искомое расстояние.

2) Решим задачу относительно прямых AD_1 и DB_1 (рис. 240). Рассмотрим сечение A_1DCB_1, в котором лежит прямая DB_1. Так как $AD_1 \perp A_1D$ и $AD_1 \perp A_1B_1$, то $AD_1 \perp$ пл. A_1DCB_1, в частности, $AD_1 \perp DB_1$, т. е. угол между AD_1 и B_1D равен 90°.

Из точки E пересечения AD_1 с сечением A_1DCB_1 проведем в плоскости сечения $EF \perp DB_1$ (рис. 240). Отрезок EF является

общим перпендикуляром прямых AD_1 и DB_1 и легко находится из треугольника DEK. В самом деле, $DE=\frac{A_1D}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $EK=\frac{DC}{2}=\frac{a}{2}$ и $DK=\frac{DB_1}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Но $EF\cdot DK=DE\cdot EK$, поэтому $EF\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=$ $=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}$, откуда $EF=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

3) Возьмем диагонали AD_1 и DC_1. Так как $AD_1\parallel BC_1$ (рис. 241), то угол между прямыми AD_1 и DC_1 равен углу DC_1B. Так как треугольник DC_1B равносторонний, то $\angle DC_1B=60°$.

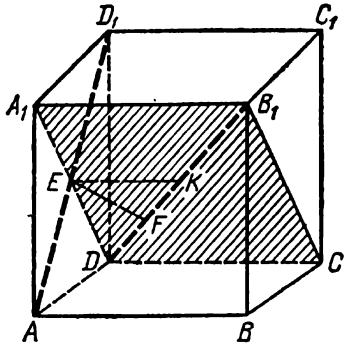


Рис. 240

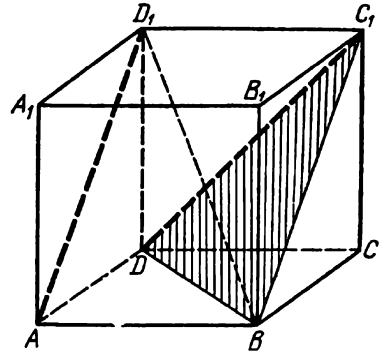


Рис. 241

Расстояние между AD_1 и DC_1 равно расстоянию от прямой AD_1 до параллельной ей плоскости DC_1B. Опустим из точки D_1 перпендикуляр D_1O на плоскость DC_1B. Соединив вершины D, B и C_1 с точкой D_1, получим пирамиду D_1DBC_1, в которой D_1O является высотой (рис. 242). В основании пирамиды лежит правильный треугольник DC_1B ($DB=BC_1=DC_1=a\sqrt{2}$), ребра $D_1C_1=D_1D=a$ и $D_1B=a\sqrt{3}$. Так как $D_1C_1=D_1D$, то основание высоты лежит на биссектрисе угла B.

Рассмотрим треугольник BD_1E, в котором D_1O является высотой. В нем нам известны все стороны: $BE=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $D_1E=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $D_1B=$ $=a\sqrt{3}$. Заметим, что $D_1B^2>BE^2+D_1E^2$, т. е. треугольник D_1BE — тупоугольный (рис. 242). Определив угол D_1BE:

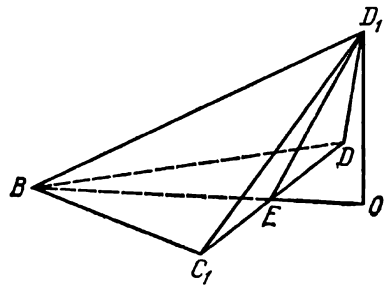


Рис. 242

$$\cos\angle D_1BE=\frac{D_1B^2+BE^2-ED_1^2}{2D_1B\cdot BE}=\frac{3a^2+\frac{3a^2}{2}-\frac{a^2}{2}}{2a\sqrt{3}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}},$$

найдем OD_1:

$$OD_1=D_1B\cdot\sin\angle D_1BE=a\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 3. В правильном тетраэдре $SABC$ отрезок MN соединяет середины ребер AB и SC, а отрезок PQ соединяет середину ребра AS с центром грани ABC. Найти угол между MN и PQ.

Решение. Через ребро CS и точку M проведем плоскость, которая в пересечении с тетраэдром образует треугольник SMC. В этом треугольнике $MC=MS=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $CS=a$, где a — ребро тетраэдра (рис. 243). Отсюда

$$MN=\sqrt{MC^2-CN^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Проведем в плоскости CMS прямую $QE \parallel MN$. Образовавшийся при этом угол PQE и есть искомый. Его можно найти из треугольника PQE, если предварительно вычислить стороны EQ, PQ и PE.

1) $\triangle MNC \sim \triangle QEC$; $\frac{MN}{QE}=\frac{CM}{CQ}$, $QE=\frac{CQ}{CM}\cdot MN=\frac{2}{3}\cdot a\frac{\sqrt{2}}{2}=$ $=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. Далее, $\frac{CN}{CE}=\frac{CM}{CQ}$; $CE=\frac{CQ}{CM}\cdot CN=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{3}$.

2) PQ является медианой прямоугольного треугольника AQS, проведенной из вершины прямого угла. Следовательно, $PQ=\frac{AS}{2}=\frac{a}{2}$.

3) PE является стороной треугольника PSE, в котором $\angle PSE=60°$, $PS=\frac{a}{2}$, $SE=SC-EC=\frac{2}{3}a$. По теореме косинусов

$$PE=\sqrt{PS^2+SE^2-2PS\cdot SE\cos 60°}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Теперь в треугольнике PEQ нам известны все три стороны. Снова используя теорему косинусов, находим

$$\cos\angle PQE=\frac{PQ^2+QE^2-PE^2}{2PQ\cdot QE}=\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{2a^2}{9}-\frac{13a^2}{36}}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{3\sqrt{2}},$$

откуда

$$\angle PQE=\arccos\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

§ 3. ЗАДАЧИ НА СЕЧЕНИЯ

Пусть пространственное тело пересекается некоторой плоскостью. В пересечении секущей плоскости с телом мы получим плоскую фигуру, которая называется *сечением*. В частности, если пространственное тело является многогранником, то сечение есть многоугольник. Обычно основные трудности при решении задач, связанных с сечением, состоят в определении формы этого сечения.

Чтобы определить сечение в случае многогранника, нужно найти прямые пересечения секущей плоскости с гранями многогранника.

Для этого достаточно (если это возможно) определить точки пересечения секущей плоскости с его ребрами.

Если секущая плоскость параллельна какому-нибудь ребру многогранника, то она пересекается с плоскостью грани, содержащей это ребро, по прямой, параллельной ребру.

Задача 1. В произвольной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено два сечения. Первое сечение проходит через AB и середину A_1C_1, а второе — через A_1B_1 и середину CC_1. Найти отношение длины отрезка линии пересечения этих сечений, заключенного внутри призмы, к длине отрезка AB.

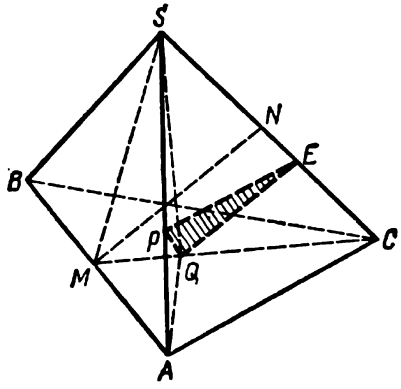


Рис. 243

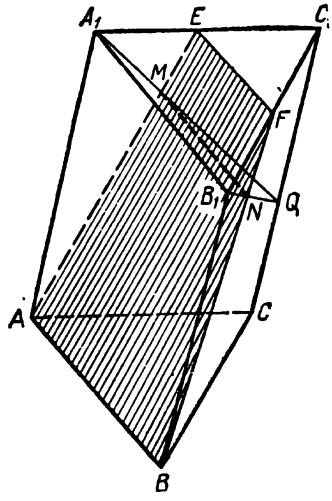


Рис. 244

Решение. Построим каждое из указанных сечений. Первое сечение пересекает грань AA_1C_1C по прямой AE, где E — середина отрезка A_1C_1 (рис. 244). Так как $AB \parallel A_1B_1$, то секущая плоскость параллельна прямой A_1B_1 и, следовательно, пересекает основание $A_1B_1C_1$ по прямой $EF \parallel A_1B_1$. Соединив точки F и B, получим прямую пересечения грани BCC_1B_1 с секущей плоскостью. Таким образом первое сечение есть трапеция $ABFE$. Второе сечение — треугольник A_1QB_1. Так как плоскость $ABFE$ параллельна прямой A_1B_1, то оба сечения пересекаются по прямой, параллельной A_1B_1: $MN \parallel A_1B_1$.

Чтобы найти искомое отношение $\frac{MN}{AB}$ или $\frac{MN}{A_1B_1}$, рассмотрим подобные треугольники A_1B_1Q и MNQ. Имеем

$$\frac{MN}{A_1B_1} = \frac{MQ}{A_1Q}. \qquad (*)$$

Отрезки A_1Q и MQ принадлежат грани ACC_1A_1 (рис. 245). Проведя $Q_1Q \parallel AC$, получим подобные треугольники A_1ME и PMQ, в которых

$$\frac{MQ}{A_1M} = \frac{PQ}{A_1E}, \quad \text{или} \quad \frac{A_1M + MQ}{MQ} = \frac{A_1E + PQ}{PQ},$$

т. е.

$$\frac{A_1Q}{MQ}=\frac{A_1E+PQ}{PQ} \qquad (**)$$

По условию $A_1E=\frac{1}{2}A_1C_1$, $Q_1P=\frac{1}{2}A_1E=\frac{1}{4}A_1C_1$ (Q_1P — средняя линия треугольника AA_1E). Следовательно, $PQ=\frac{3}{4}A_1C_1$. Теперь из пропорции (**) имеем

$$\frac{A_1Q}{MQ}=\frac{\frac{1}{2}A_1C_1+\frac{3}{4}A_1C_1}{\frac{3}{4}A_1C_1}=\frac{5}{3}$$

и из равенства (*) находим искомое отношение

$$\frac{MN}{A_1B_1}=\frac{3}{5}.$$

Задача 2. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной a. Ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и равно h (рис. 246). Через вершину A параллельно диагонали основания BD проведено сечение, которое делит SC в отношении 2:1, считая от S. Найти площадь сечения.

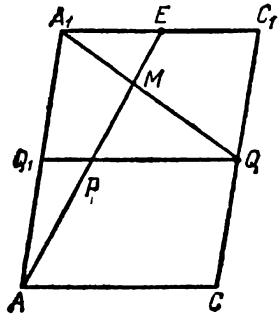


Рис. 245

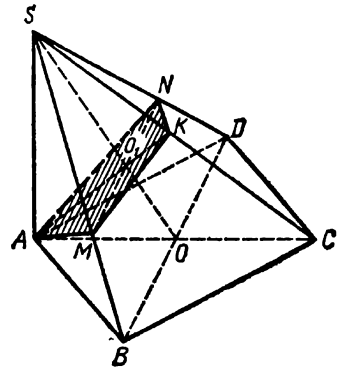


Рис. 246

Решение. Пусть K лежит на ребре CS и $SK:KC=2:1$. Сечение проходит через прямую AK и параллельно диагонали BD. Следовательно, плоскость SBD пересекает это сечение по некоторой прямой MN, параллельной BD. Высота SO треугольника SBD пересекает отрезок MN в точке O_1, причем $MO_1=O_1N$ ($\triangle SBD$ — равнобедренный). Так как точка O_1 лежит и на прямой AK, то она может быть получена как пересечение прямой AK с высотой SO треугольника SBD. Получив точку O_1, проводим через нее в плоскости SBD прямую, параллельную BD. Она пересечет ребра SB и SD в точках N и M соответственно. Соединив последовательно точки A, N, K и M, получим четырехугольник $ANKM$. Так как $BD\perp$ пл. ASC ($BD\perp AC$ и $BD\perp AS$), а $MN\parallel BD$, то $MN\perp$ пл. ASC,

в частности, $MN \perp AK$, т. е. диагонали полученного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Поэтому $S_{ANKM} = \frac{1}{2} MN \cdot AK$.

Величину AK найдем из треугольника SAC, где $\angle A = 90°$, $AC = a\sqrt{2}$, $AS = h$ и $SK : KC = 2 : 1$ (рис. 247). Проведем $KE \perp AC$. Очевидно, $AE : EC = 2 : 1$ и $AS : KE = 3 : 1$. Следовательно, $AE = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} a\sqrt{2}$, $KE = \frac{h}{3}$ и $AK = \sqrt{AE^2 + KE^2} = \frac{1}{3}\sqrt{8a^2 + h^2}$. Диагональ MN найдем из треугольника BSD, где $BS = SD$, $BD = a\sqrt{2}$. Так как $MN \parallel BD$, то $\frac{BD}{MN} = \frac{SO}{SO_1}$ и

$$MN = \frac{BD \cdot SO_1}{SO}. \qquad (*)$$

Из треугольника ASO находим $SO = \sqrt{AS^2 + AO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 2a^2}$. Чтобы найти SO_1, проведем $OL \parallel AS$ (рис. 247) до пересечения с прямой AK; $\triangle AO_1S \sim \triangle OO_1L$, откуда

$$\frac{AS}{OL} = \frac{SO_1}{OO_1}, \text{ или } \frac{AS + OL}{AS} = \frac{SO_1 + O_1O}{SO_1},$$

или

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{AS}{AS + OL}. \qquad (**)$$

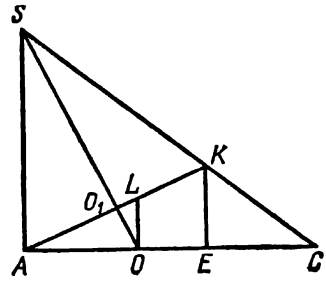


Рис. 247

Но $\frac{OL}{KE} = \frac{AO}{AE}$, т. е. $OL = \frac{AO \cdot KE}{AE} = \frac{h}{4}$. Теперь из пропорции (**) находим $\frac{SO_1}{SO} = \frac{h}{h + \frac{h}{4}} = \frac{4}{5}$. Тогда из равенства (*) следует, что $MN = a\sqrt{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5} a$ и

$$S_{ANKM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{8a^2 + h^2} = \frac{2a}{15}\sqrt{16a^2 + 2h^2}.$$

Укажем другой путь построения сечения.

Секущая плоскость по условию проходит через точки A и K параллельно диагонали BD. Чтобы построить сечение, достаточно указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами SB и SD. Рассмотрим эту секущую плоскость за пределами пирамиды. Так как плоскость проходит через точку A и параллельна BD, то ей будет принадлежать прямая PQ, проходящая через точку A и параллельная BD (рис. 248).

Продолжим ребра основания CB и CD до пересечения с прямой PQ в точках E и F. Точки E и K принадлежат как секущей плоскости, так и плоскости грани SBD. Следовательно, прямая KE является линией пересечения секущей плоскости с плоскостью боковой грани CSB. Эта прямая пересекает ребро SB в точке M

(а грань CSB — по отрезку KM). Аналогично получаем точку N на ребре SD, как точку пересечения этого ребра с прямой KF. Итак, сечением является четырехугольник $AMKN$.

Заметим, что его площадь можно получить как разность между площадью треугольника EKF и площадями двух равных треугольников AME и ANF (рис. 249).

Рассмотренный способ продолжения секущей плоскости за пределы многогранника является весьма удобным, а иногда и единственным методом для построения сечений. Так как он используется учащимися крайне редко, то рассмотрим еще две задачи, связанные с сечениями и решаемые указанным методом продолжения секущей плоскости.

Задача 3. В правильной шестиугольной пирамиде боковые грани образуют с плоскостью основания углы в 60°, ребро основания равно a. Через ребро нижнего основания перпендикулярно к противолежащей ему боковой грани проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

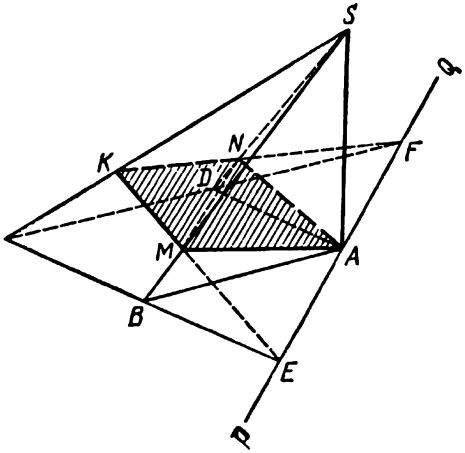


Рис. 248

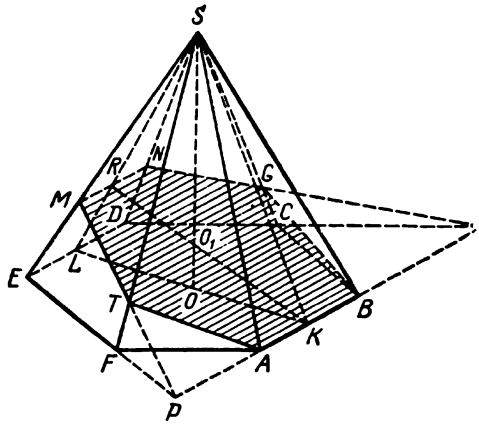


Рис. 249

Решение. Пусть секущая плоскость проходит через ребро AB. Построим высоту пирамиды SO и из середины ребра AB проведем прямую KO до пересечения с ребром ED в точке L (рис. 249). Точку L соединим с S. Очевидно, $AB \perp$ пл. KLS, так как $AB \perp SO$ и $AB \perp KL$. В треугольнике KLS проведем $KR \perp SL$. Прямая KR лежит в секущей плоскости, которая пересекает грань DES по прямой $MN \parallel ED$ (так как $AB \parallel ED$). Таким образом, мы нашли точки пересечения секущей плоскости с ребрами SE и SD.

Для того чтобы найти точки пересечения секущей плоскости с ребрами SF и SC, продолжим ребра основания EF и DC до их пересечения с продолжением ребра AB в точках P и Q; P соединим с M, а Q — с N. Прямая PM пересечет ребро SF в точке T, а прямая QN — ребро SC в точке G. Соединив T с A и G с B, получим искомое сечение — шестиугольник $ABGNMT$. Его площадь равна разности

между площадью трапеции $PMNQ$ и площадью двух равных треугольников PTA и BGQ (рис. 249). Далее $PQ=3a$, так как треугольники AFP и BGQ — равносторонние ($\angle PAF=\angle AFP=60°$); поэтому $AP=AF=a$ и $BQ=a$. Высоту трапеции RK найдем из треугольника RLK, в котором $LK=a\sqrt{3}$, $\angle LRK=90°$ и $\angle RLK=60°$. Следовательно, $RK=LK\cdot\sin 60°=\frac{3}{2}a$, $RL=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Теперь легко вычислить верхнее основание MN. В треугольнике DES высота $LS=LK=a\sqrt{3}$, $RL=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}SL$, поэтому $MN=\frac{1}{2}DE=\frac{a}{2}$. Следовательно, площадь трапеции

$$S_{PMNQ}=\frac{1}{2}(PQ+MN)\,RK=\frac{21}{8}a^2.$$

Вычислим площадь треугольника PTA. Так как $TG\parallel PQ$, то высота этого треугольника равна длине отрезка O_1K, где O_1 — точка пересечения высоты пирамиды SO с плоскостью сечения. Из треугольника O_1OK $\left(\angle OKO_1=30°,\ \angle O_1OK=90°,\ OK=\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ находим $O_1K=\frac{OK}{\cos 30°}=a$, затем $S_{APT}=\frac{1}{2}a^2$ и окончательно подсчитываем площадь сечения:

$$S_{\text{сеч}}=\frac{21}{8}a^2-a^2=\frac{13}{8}a^2.$$

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через вершину A, середину ребра BC и центр грани CDD_1C_1 проведена секущая плоскость. Найти отношение объемов тел, на которые куб делится секущей плоскостью.

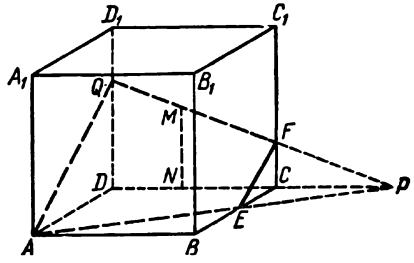


Рис. 250

Решение. Секущая плоскость пересекает основание куба по отрезку AE, где E — середина ребра BC. Продолжим ребро DC до пересечения в точке P с продолжением отрезка AE (рис. 250). Точки P и M принадлежат и секущей плоскости, и плоскости грани CDD_1C_1, поэтому прямая PQ, проходящая через P и M, является линией пересечения этих плоскостей. Она встречает ребро CC_1 в точке F, а ребро DD_1 — в точке Q. Соединив последовательно точки E, F, Q и A, получим искомое сечение.

Уточним положение точек F и Q. В треугольнике ADP отрезок $CE\parallel AD$ и $CE=\frac{1}{2}AD$. Следовательно, $CD=CP=a$ (примем ребро куба за a). Пусть $MN\parallel DD_1$. В треугольнике MNP имеем: $MN=\frac{a}{2}$,

$NC=\frac{a}{2}$, $CP=a$. Из пропорции $\frac{MN}{FC}=\frac{NP}{CP}$ находим $FC=\frac{MN\cdot CP}{NP}=\frac{a}{3}$.

Далее, $\frac{DQ}{MN}=\frac{DP}{PN}$, откуда $DQ=\frac{2}{3}a$.

Найдем объем многогранника $AQDEFC$. Его можно получить как разность объемов двух пирамид — пирамиды $PADQ$ и пирамиды $PEFC$:

$$V_1=\frac{1}{3}S_{ADQ}\cdot PD=\frac{2a^3}{9},$$

$$V_2=\frac{1}{3}S_{ECF}\cdot PC=\frac{a^3}{36},$$

$$V_{AQDEFC}=\frac{2a^3}{9}-\frac{a^3}{36}=\frac{7a^3}{36}.$$

Тогда объем части куба, лежащей над сечением, равен $a^3-\frac{7a^3}{36}=\frac{29a^3}{36}$. Следовательно, секущая площадь делит объем куба в отношении 7:29.

§ 4. ЗАДАЧИ НА КОМБИНАЦИИ ВПИСАННЫХ ДРУГ В ДРУГА ТЕЛ

Призма называется *вписанной в цилиндр*, если ее основания — многоугольники, вписанные в основания цилиндра, а боковые ребра — образующие цилиндра. Призма, вписанная в прямой круговой цилиндр, является также прямой. Ее основания — многоугольники, которые можно вписать в окружность.

Цилиндр называется *вписанным в призму*, если основания цилиндра вписаны в многоугольники оснований призмы, а каждая боковая грань призмы касается боковой поверхности цилиндра. Прямой круговой цилиндр можно вписать только в прямую призму, основания которой — многоугольники, в которые можно вписать окружность.

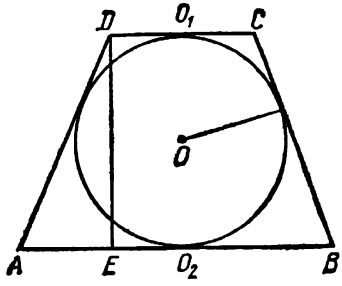


Рис. 251

Задача 1. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция с острым углом α. При каком α боковая поверхность призмы в k раз больше боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму?

Решение. Пусть r — радиус основания цилиндра, $2a$ и $2b$ $(a>b)$ — основания трапеции. Так как $S_{\text{бок. цил}}=2\pi rH$, а $S_{\text{бок. пр}}=P_{\text{осн}}\cdot H$, то задача сводится к отысканию угла α, при котором периметр трапеции в k раз больше длины вписанной окружности.

Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 251), DE — высота. Очевидно, $DE=2r$, $AD=\frac{2r}{\sin\alpha}$. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Следовательно, $DC+AB=AD+CB$, или $a+b=\frac{2r}{\sin\alpha}$. Отсюда $P_{\text{осн}}=$

$=\frac{8r}{\sin\alpha}$ и согласно условию $\frac{8r}{\sin\alpha}=2\pi kr$, или $\sin\alpha=\frac{4}{k\pi}$. Задача имеет решение для любых положительных k, если $k\geqslant\frac{4}{\pi}$.

Цилиндр вписан в пирамиду, если его нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды, а верхнее основание касается всех боковых граней пирамиды. В сечении пирамиды плоскостью, проходящей через верхнее основание цилиндра, образуется многоугольник, подобный многоугольнику основания. Если в пирамиду вписан прямой круговой цилиндр, то в этом сечении образуется многоугольник, в который можно вписать окружность. Следовательно, и в многоугольник основания пирамиды также можно вписать окружность. При этом надо помнить, что нижнее основание цилиндра не вписано в основание пирамиды.

Цилиндр вписан в конус, если одно из оснований цилиндра вписано в боковую поверхность конуса, а другое основание цилиндра лежит на основании конуса. Прямой круговой цилиндр может быть вписан лишь в прямой круговой конус. При этом ось цилиндра должна лежать на высоте конуса.

Пирамида вписана в цилиндр, если ее основание вписано в одно из оснований цилиндра, а вершина лежит на другом основании цилиндра.

Конус вписан в цилиндр, если основание конуса совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина лежит на другом основании цилиндра.

Аналогично определяются *конус и пирамида, вписанные в призму*. Основание вписанного кругового конуса есть круг, вписанный в многоугольник основания призмы. Основание вписанной в призму пирамиды совпадает с одним из оснований призмы. Вершины конуса и пирамиды должны лежать в плоскости второго основания призмы.

Призма вписана в конус (*пирамиду*), если все вершины верхнего основания призмы лежат на боковой поверхности конуса (пирамиды), а нижнее основание призмы лежит на основании конуса (пирамиды). Если призма вписана в пирамиду, то вершины ее верхнего основания могут лежать как на ребрах, так и на боковых гранях пирамиды. В соответствующих задачах эти условия задаются дополнительно.

Задача 2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с основанием угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что его вершины лежат на апофемах пирамиды. Ребро куба равно a. Определить объем пирамиды.

Решение. Обозначим сторону основания пирамиды через x, ее высоту через h и рассмотрим сечение, проходящее через диагональ основания BD и вершину S пирамиды (рис. 252). Из треугольника SOB имеем: $SO=BO\cdot\operatorname{tg}\alpha$, или $h=\frac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$ и тогда

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h=\frac{\sqrt{2}}{6}x^3\operatorname{tg}\alpha. \qquad (*)$$

Чтобы найти x, рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через верхнее основание куба (рис. 252). Это квадрат $A_1B_1C_1D_1$, плоскость которого параллельна плоскости основания пирамиды и удалена от нее на расстояние a, равное ребру куба. Из этого сечения находим, что $B_1D_1 = 2a$. Теперь рассмотрим треугольник BSD, в котором $BD = x\sqrt{2}$, $B_1D_1 = 2a$, $SO = h = \frac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $OO_1 = a$. Из подобия треугольников BSD и B_1SD_1 следует, что

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{SO_1}{SO}, \text{ или } \frac{2a}{x\sqrt{2}} = \frac{\frac{x\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}} - a}{\frac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha},$$

откуда $x = \frac{a\sqrt{2}(\operatorname{tg}\alpha + 1)}{\operatorname{tg}\alpha}$ и согласно равенству (*)

$$V_{\text{пир}} = \frac{2a^3(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}{3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Задача 3. В прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен R, вписана пирамида. Ее основание — правильный треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а третья образует с ней угол α. Найти полную поверхность пирамиды.

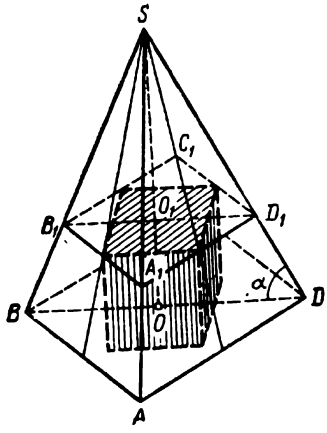


Рис. 252

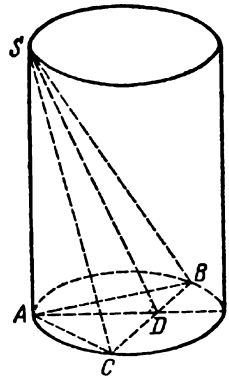


Рис. 253

Решение. Две грани, перпендикулярные к плоскости основания, пересекаются по ребру SA, перпендикулярному к плоскости основания и, следовательно, являющемуся образующей цилиндра (рис. 253). Поэтому вершина пирамиды S лежит на окружности верхнего основания. Опустим из точки A перпендикуляр AD на ребро BC и точку D соединим с S. Ребро $BC \perp$ пл. ADS, следовательно, $\angle ADS = \alpha$. Обозначая сторону основания пирамиды через a, имеем

$$S_{\text{полн.пир}} = S_{\text{осн}} + 2S_{ASC} + S_{BSC}.$$

Так как $S_{BSC}=\frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$, $S_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $S_{ASC}=\frac{a}{2}AS$, то

$$S_{полн.пир}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)+a\cdot AS.$$

Учитывая, что $a=R\sqrt{3}$, $AS=AD\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}R\operatorname{tg}\alpha$, имеем

$$S_{полн.пир}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)+R\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}R\operatorname{tg}\alpha=$$
$$=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}(1+\cos\alpha+2\sin\alpha).$$

Конус вписан в пирамиду, если их вершины совпадают, а основание конуса вписано в основание пирамиды. В случае кругового конуса его основание — круг, вписанный в многоугольник основания пирамиды. Если в пирамиду вписан прямой круговой конус, то высоты пирамиды и конуса совпадают. Очевидно, грани пирамиды касаются боковой поверхности конуса по его образующим.

Прямой круговой конус можно вписать в любую пирамиду, боковые грани которой равнонаклонены к плоскости основания.

Пирамида вписана в конус, если их вершины совпадают, а основание пирамиды — многоугольник, вписанный в основание конуса. Боковые ребра пирамиды являются образующими конуса.

В прямой круговой конус может быть вписана любая пирамида, боковые ребра которой равны между собой.

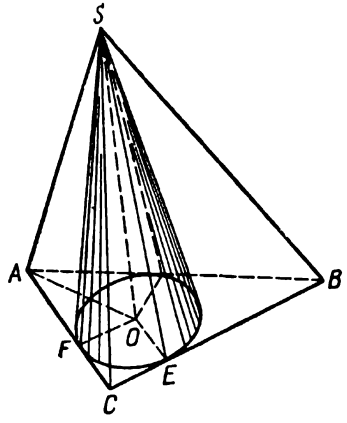


Рис. 254

Задача 4. Радиус основания прямого кругового конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Около конуса описана пирамида, имеющая в основании прямоугольный треугольник с острым углом α. Найти объем пирамиды.

Решение. Высота пирамиды совпадает с высотой конуса и проходит через центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC (рис. 254). Апофемы пирамиды, равные между собой, образуют с плоскостью основания угол φ: $\angle SEO=\varphi$. Имеем

$$V_{пир}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO=\frac{1}{6}AC\cdot BC\cdot SO. \qquad (*)$$

Найдем катеты треугольника ABC и высоту SO пирамиды. В треугольнике ABC имеем:

$$AF=OF\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$AC = AF + FC = r\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$BC = AC \cdot \operatorname{tg}\alpha = r\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Высоту SO найдем из треугольника EOS, в котором $\angle SEO = \varphi$, $\angle SOE = 90°$, $EO = r$. Имеем $SO = EO \cdot \operatorname{tg}\varphi = r\operatorname{tg}\varphi$.

Используя равенство (*), находим

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} r^3 (1 + \operatorname{ctg}\alpha)^2 \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{4r^3 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}\varphi}{3 \sin 2\alpha}.$$

Приведем задачу, в которой рассматривается круговой, но не прямой конус.

Задача 5. В основании пирамиды лежит прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и равно H, боковая грань SBC наклонена к плоскости основания под углом α. Найти объем кругового конуса, описанного около этой пирамиды, если острый угол между диагоналями основания равен φ.

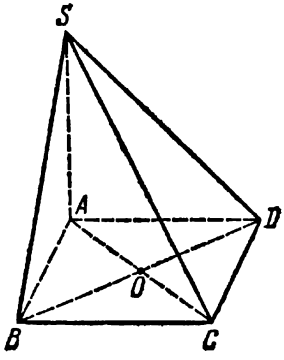


Рис. 255

Решение. Высота конуса совпадает с ребром SA (конус не прямой); $BC \perp$ пл. ABS, поэтому $\angle SBA = \alpha$ как линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями SBC и $ABCD$ (рис. 255). Имеем

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3}\pi \cdot BO^2 \cdot H.$$

Радиус BO основания кругового конуса найдем из треугольников ASB и AOB. Из $\triangle ASB$ находим, что $AB = AS \cdot \operatorname{ctg}\alpha = H\operatorname{ctg}\alpha$, а из $\triangle AOB$ — что $BO = \dfrac{AB}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{H\operatorname{ctg}\alpha}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Следовательно,

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \frac{\pi H^2 \operatorname{ctg}^2\alpha}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} \cdot H = \frac{\pi H^3 \operatorname{ctg}^2\alpha}{12\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Рассмотрим теперь различные комбинации шара с другими телами.

Шар называется *вписанным в прямой круговой цилиндр или в прямую призму*, если он касается их оснований и их боковых поверхностей. Ясно, что высота цилиндра или призмы равна диаметру вписанного шара.

Шар, вписанный в цилиндр (прямой, круговой), касается его боковой поверхности по окружности большого круга, параллельной основанию цилиндра. Значит, диаметр основания цилиндра равен

диаметру вписанного шара, т.е. высоте цилиндра. Следовательно, цилиндр должен быть равносторонним (его осевое сечение — квадрат).

Шар, вписанный в призму, касается каждой ее грани. В сечении плоскостью, проходящей через центр вписанного шара параллельно плоскостям оснований призмы, получается многоугольник, равный основанию призмы, в который вписан большой круг шара. Следовательно, в прямую призму можно вписать шар в том и только в том случае, если ее основание — многоугольник, в который можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте призмы.

Прямой круговой цилиндр вписан в шар, если окружности его оснований лежат на сфере. Очевидно, центр шара лежит на середине оси цилиндра. В шар можно вписать бесчисленное множество прямых круговых цилиндров и около любого прямого кругового цилиндра можно описать шар.

Прямая призма вписана в шар, если все ее вершины лежат на сфере. В сечениях плоскостями, проходящими через основания призмы, получаются многоугольники, вписанные в равные и параллельные малые круги шара. Следовательно, прямую призму можно вписать в шар в том и только в том случае, если ее основания — многоугольники, которые можно вписать в окружность.

Центр описанного вокруг призмы шара лежит на середине высоты призмы, соединяющей центры окружностей, описанных около ее оснований.

Задача 6. В шар вписана прямая четырехугольная призма, ребра оснований которой равны a. Найти радиус шара, если известно, что отношение боковой поверхности призмы к поверхности шара равно k.

Решение. Пусть H — высота призмы, R — радиус описанного шара. Тогда $S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$, $S_{\text{бок. пр}} = 4aH$. По условию

$$\frac{4aH}{4\pi R^2} = k. \qquad (*)$$

Выразим H через a и k. Основание призмы — четырехугольник с равными сторонами, т. е. ромб. Так как около него можно описать окружность, то этот ромб является квадратом. Радиус круга r, описанного около квадрата со стороной a, равен $\frac{a\sqrt{2}}{2}$: $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Теперь в треугольнике BOE, в котором гипотенуза $OB = R$, $BE = r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $OE = \frac{H}{2}$, имеем $\frac{H^2}{4} = R^2 - \frac{a^2}{2}$. Используя соотношение (*) и последний результат, получаем уравнение для определения

$$2a\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}} = \pi R^2 k,$$

откуда

$$R = \frac{a}{\pi k}\left(\sqrt{1 + \frac{\pi k}{\sqrt{2}}} + \sqrt{1 - \frac{\pi k}{\sqrt{2}}}\right).$$

Задача имеет решение, если $k \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

Усеченный прямой круговой конус вписан в шар, если окружности его оснований лежат на поверхности шара. При этом осевое сечение усеченного конуса есть равнобочная трапеция, вписанная в большой круг шара.

Так как любую равнобочную трапецию можно вписать в круг, то следовательно, любой усеченный прямой круговой конус можно вписать в шар.

Усеченная пирамида называется *вписанной в шар*, если все ее вершины лежат на поверхности шара. Основания такой пирамиды являются многоугольниками, вписанными в круги шара, лежащие в параллельных плоскостях. Следовательно, центр шара лежит на прямой OO_1, где O и O_1 — центры указанных кругов. Легко доказать, что любая правильная усеченная пирамида может быть вписана в шар. Центр описанного шара может лежать как внутри, так и вне усеченной пирамиды или конуса.

Шар вписан в прямой круговой усеченный конус (*усеченную пирамиду*), если он касается как оснований, так и боковой поверхности этого усеченного конуса (усеченной пирамиды). При этом в осевом сечении усеченного конуса получается равнобочная трапеция, в которую вписан большой круг шара.

Задача 7. Доказать, что в усеченный прямой круговой конус можно вписать шар в том и только в том случае, если высота усеченного конуса есть среднее геометрическое между диаметрами его оснований.

Решение. 1. Пусть в усеченный конус можно вписать шар. Обозначим через R радиус вписанного шара, через r и ρ — радиусы оснований конуса. Тогда осевое сечение конуса есть трапеция с основаниями $AB=2r$, $DC=2\rho$, в которую вписан круг радиуса R (рис. 256). Следовательно, $H=2R$, $AD+CB=AB+CD=2(r+\rho)$, или $AD=r+\rho$.

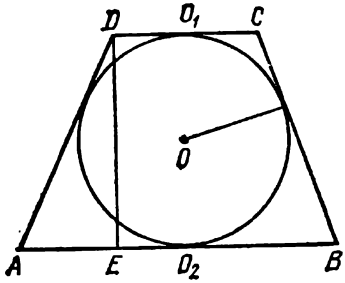


Рис. 256

В прямоугольном треугольнике ADE имеем $AD^2=AE^2+DE^2$, или $(r+\rho)^2-(r-\rho)^2=4R^2$, откуда и вытекает соотношение $(2R)^2=4r\rho$, или $H^2=AB\cdot CD$, что и требовалось доказать.

2. Пусть в усеченном прямом круговом конусе

$$H^2=AB\cdot CD, \qquad (*)$$

где H — его высота, а AB и CD — диаметры оснований (рис. 256). Покажем, что в такой усеченный конус можно вписать шар. Очевидно, для этого достаточно показать, что в его осевое сечение — равнобочную трапецию $ABCD$ — можно вписать круг, т. е. $AB+CD=AD+BC$.

В силу соотношения (*)

$$AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4AB\cdot CD+(AB-CD)^2},$$

откуда $2AD=AB+CD$, или $AD+BC=AB+CD$, что и требовалось доказать.

Задача 8. В усеченную четырехугольную пирамиду вписан шар. Доказать, что объемы шара и усеченной пирамиды относятся как их полные поверхности.

Решение. Пусть R — радиус вписанного шара, P и p — площади оснований пирамиды. Так как $V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi R^3$, $S_{\text{шара}}=4\pi R^2$, $V_{\text{пир}}=\frac{2R}{3}(P+p+\sqrt{Pp})$, а $S_{\text{полн.пир}}=P+p+S_{\text{бок. пир}}$, то требуется доказать, что

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{2}{3}R(P+p+\sqrt{Pp})}=\frac{4\pi R^2}{P+p+S_{\text{бок. пир}}},$$

или что

$$S_{\text{бок. пир}}=P+p+2\sqrt{Pp}. \qquad (*)$$

Основания пирамиды — подобные многоугольники, следовательно, $AB=k\cdot A_1B_1$, $BC=k\cdot B_1C_1$, $CD=k\cdot C_1D_1$ и $DA=k\cdot D_1A_1$, $P=k^2p$, где k — коэффициент подобия. Поэтому соотношение (*), которое нужно доказать, можно переписать в виде

$$k^2p+p+2kp=S_{\text{бок. пир}},$$

или

$$S_{\text{бок. пир}}=(1+k)^2p. \qquad (**)$$

Подсчитаем

$$S_{\text{бок. пир}}=S_{ABB_1A_1}+S_{BCC_1B_1}+S_{CDD_1C_1}+S_{DAA_1D_1}.$$

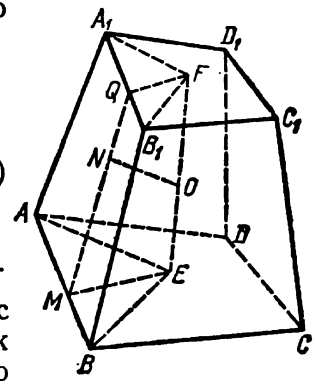


Рис. 257

Пусть E и F — точки касания шара с плоскостями оснований (рис. 257); отрезок EF перпендикулярен этим плоскостям, а его середина O — центр вписанного шара.

Проведем отрезок $FQ\perp A_1B_1$. Плоскость, проходящая через FQ и EF, пересечет грань ABB_1A_1 по прямой MQ. Соединим точки M и E и рассмотрим четырехугольник $EFQM$. Поскольку $A_1B_1\perp$ пл. $EFQM$ ($A_1B_1\perp FQ$ и $A_1B_1\perp EF$), QM является высотой трапеции ABB_1A_1. Так как грань ABB_1A_1 перпендикулярна плоскости $EFQM$ ($\angle FQB_1=90°$ — линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями), то точка N касания шара с гранью ABB_1A_1 лежит на прямой MQ; $FQ=NQ$ и $EM=MN$ как отрезки касательных к шару, проведенные из точек Q и M соответственно. Из рассмотрения подобных треугольников ABE и A_1B_1F следует, что $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{FQ}{EM}$, где EM и FQ — их высоты. Поэтому $EM=k\cdot FQ$, или $EM=kh$, где $h=FQ$ и k — коэффициент подобия; тогда $QM=QN+NM=FQ+EM=h(1+k)$. Подсчитаем площадь боковой

грани ABB_1A_1:

$$S_{ABB_1A_1}=\frac{1}{2}(AB+A_1B_1)\cdot QM=(1+k)^2\cdot\frac{A_1B_1\cdot h}{2}=(1+k)^2\cdot S_{A_1B_1F}.$$

Аналогичные результаты справедливы для остальных трех граней:

$S_{BCC_1B_1}=(1+k)^2 S_{B_1C_1F}$, $S_{CDD_1C_1}=(1+k)^2 S_{C_1D_1F}$, $S_{ADD_1A_1}=(1+k)^2 S_{D_1A_1F}$.

Суммируя эти четыре равенства и учитывая, что $S_{A_1B_1F}+S_{B_1C_1F}+S_{C_1D_1F}+S_{D_1A_1F}=p$, получаем $S_{\text{бок.пир}}=(1+k)^2 p$, что и требовалось доказать.

Прямой круговой конус вписан в шар, если его вершина лежит на поверхности шара, а основание является малым или большим кругом шара. Центр шара лежит на высоте конуса или на ее продолжении. В осевом сечении конуса, вписанного в шар, получается равнобедренный треугольник, вписанный в большой круг шара.

Шар вписан в прямой круговой конус, если он касается основания и боковой поверхности конуса. Очевидно, что шар касается боковой поверхности конуса по окружности малого круга шара.

Центр вписанного шара лежит всегда внутри конуса, на его высоте. В осевом сечении получается равнобедренный треугольник, в который вписан большой круг шара.

В любой конус можно вписать шар и около любого конуса можно описать шар.

Задача 9. В прямой круговой конус вписан шар радиуса R. Линия касания шара и конуса делит площадь его боковой поверхности в отношении 5:4 (считая от основания). Найти объем и полную поверхность конуса.

Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 258). Пусть $O_1B=r$, $O_2D=\rho$, S_1 и S_2—площади частей боковой поверхности (считая от основания). Тогда $\frac{S_1}{S_2}=\frac{5}{4}$, или $\frac{S_1+S_2}{S_2}=\frac{9}{4}$, т. е.

$$\frac{S_{\text{бок.кон}}}{S_2}=\frac{9}{4}. \qquad (*)$$

Так как $S_{\text{бок.кон}}=\pi r\cdot SB$, а $S_2=\pi\rho\cdot SD$ и $SB:SD=r:\rho$, то из равенства (*) следует, что

$$\frac{9}{4}=\frac{\pi r\cdot SB}{\pi\rho\cdot SD}=\frac{r^2}{\rho^2},$$

т. е.

$$\frac{r}{\rho}=\frac{3}{2}. \qquad (**)$$

Очевидно, $\angle O_1BD=\angle O_2OD$. Обозначая его через α и учитывая, что OB—биссектриса угла O_1BD, получим два соотношения

$$\sin\alpha=\frac{\rho}{R} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{R}{r}.$$

Перемножим эти равенства. На основании равенства (**) получаем

$$\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3},\ \text{или}\ \frac{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{3},$$

откуда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и, следовательно, $r=R\sqrt{2}$.

Зная r и угол α, легко найдем $S_{\text{бок.кон}}$ и $V_{\text{кон}}$. Так как $l=SB=$ $=\frac{r}{\cos\alpha}=3R\sqrt{2}$, а $H=SO_1=r\operatorname{tg}\alpha=4R$, то

$$S_{\text{бок.кон}}=\pi rl=6\pi R^2$$

и

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{8}{3}\pi R^3.$$

Пирамида вписана в шар, если все ее вершины лежат на поверхности шара. Это означает, что центр шара — точка, равноудаленная от всех вершин пирамиды. Теоретически центр шара определяется как точка пересечения всех плоскостей, проведенных через середины ребер пирамиды перпендикулярно к ним. На практике положение центра описанного шара можно определить из следующих рассуждений. Основание вписанной в шар пирамиды — многоугольник, вписанный в большой или малый круг шара. Следовательно, центр шара должен лежать на перпендикуляре, проведенном к плоскости этого круга через его центр O_1 (рис. 259).

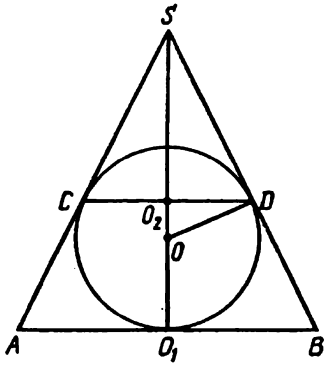


Рис. 258

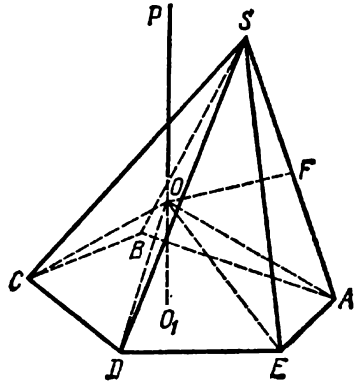


Рис. 259

Любая точка этого перпендикуляра равноудалена от всех вершин основания. Поэтому достаточно указать ту точку этого перпендикуляра, которая равноудалена от вершины пирамиды и любой вершины его основания. Чтобы получить такую точку, через середину бокового ребра, например AS, проведем плоскость, перпен-

дикулярную AS. Эта плоскость встретит перпендикуляр O_1P в центре шара O. Действительно, $OA=OS$, но $OA=OB=OC=\ldots$, следовательно,

$$OS=OA=OB=OC=\ldots .$$

Из этих рассуждений также следует, что в шар может быть вписана такая и только такая пирамида, основание которой можно вписать в круг. В частности, любая треугольная пирамида может быть вписана в шар. Заметим, что центр описанного около пирамиды шара может лежать как внутри, так и вне пирамиды. Весьма поучительна следующая задача.

Задача 10. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ($AB=AC$). Ребро AS перпендикулярно к плоскости основания. Найти полную поверхность пирамиды, если известно, что двугранный угол при ребре BC равен β, двугранный угол при ребре AS равен α и радиус описанного около пирамиды шара равен R.

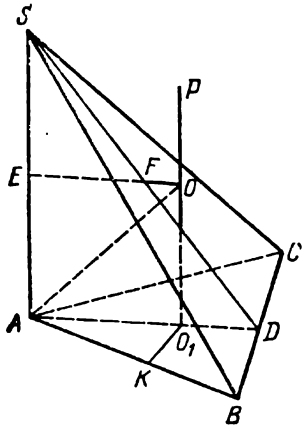


Рис. 260

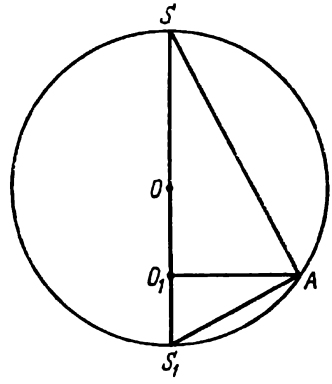


Рис. 261

Р е ш е н и е. Так как $AS \perp$ пл. ABC, то $\angle BAC=\alpha$ как линейный угол двугранного угла при ребре AS (рис. 260).

Проведем $AD \perp BC$ и соединим точки D и S. По теореме о трех перпендикулярах $BC \perp$ пл. ADS и, следовательно, $\angle ADS=\beta$ как линейный угол двугранного угла при ребре BC. Определим положение центра O описанного шара. Для этого из центра O_1 круга, описанного вокруг основания ABC, проведем перпендикуляр O_1P до пересечения с плоскостью, проходящей через середину ребра AS (точку E) перпендикулярно AS.

Покажем, что точка O лежит вне пирамиды. Рассмотрим сечение, проходящее через ребро AS и прямую AD. Очевидно, $EO \parallel AD$. Центр O лежит на средней линии треугольника ADS или на ее продолжении. Средняя линия $EF=\frac{1}{2}AD$, $EO=AO_1$, где AO_1 — радиус круга, описанного около треугольника ABC. Так как

$AO_1 > \frac{AD}{2}$, то и $EO > \frac{AD}{2}$, т. е. $EO > EF$. Последнее означает, что O лежит вне треугольника ADS, а следовательно, и вне пирамиды

Площадь поверхности пирамиды равна сумме площадей всех ее граней. Замечая, что $S_{ASB} = S_{ASC}$ и $S_{BSC} = \frac{1}{\cos\beta} \cdot S_{ABC}$, имеем

$$S_{\text{полн.пир}} = 2S_{ASB} + S_{ABC}\left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right) = AB \cdot AS + AD \cdot BD\left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right) =$$

$$= \frac{AD}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot AD \cdot \operatorname{tg}\beta + AD^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right) =$$

$$= AD^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1+\cos\beta)}{\cos\beta}\right]. \qquad (*)$$

Таким образом, задача свелась к определению величины AD. Пусть $AD = x$. Тогда $AD \cdot \operatorname{tg}\beta = x \cdot \operatorname{tg}\beta = AS$, $AE = \frac{x\operatorname{tg}\beta}{2}$, $AB = \frac{x}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Рассмотрим треугольник AO_1K, где $O_1K \perp AB$, $AK = KB = \frac{x}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$,

$AO_1 = \frac{AK}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{x}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Теперь в треугольнике AOO_1, где $AO = R$,

имеем $R^2 = \frac{x^2}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} + \frac{x^2\operatorname{tg}^2\beta}{4}$, откуда $x = \frac{2R\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^4\frac{\alpha}{2}}}$.

Возвращаясь к результату (*), окончательно получаем

$$S_{\text{полн.пир}} = \frac{2\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta} \cdot \frac{4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\beta\cdot\cos^4\frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{8R^2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\beta\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\cdot\cos^4\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Довольно просто находится радиус R шара, описанного около правильной пирамиды. Пусть r — радиус круга, описанного около ее основания и H — высота пирамиды. Рассмотрим сечение шара плоскостью, проходящей через высоту пирамиды и вершину ее основания (рис. 261). В треугольнике SAS_1 угол $A = 90°$, $SS_1 = 2R$, $SO_1 = H$. Величина $AO_1 = r$ есть средняя пропорциональная между SO_1 и O_1S_1. Поэтому $r^2 = H(2R - H)$ и

$$R = \frac{r^2 + H^2}{2H}. \qquad (1)$$

В частности, в правильном тетраэдре с ребром a имеем: $r=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$; следовательно, радиус описанного шара $R=\frac{3a}{2\sqrt{6}}$.

Формула (1) остается верной для любой пирамиды с равными боковыми ребрами. В этом случае высота пирамиды проходит через центр круга, описанного около основания, центр описанного шара лежит на высоте пирамиды и все рассуждения, приводящие к формуле (1), остаются неизменными.

Шар вписан в пирамиду, если он касается всех ее граней. Центр вписанного шара — точка, равноудаленная от всех граней пирамиды. Следовательно, она лежит внутри пирамиды на биссектральных плоскостях каждого из ее двугранных углов и является их точкой пересечения.

Отсюда вытекает, что шар можно вписать в такую и только в такую пирамиду, у которой все биссектральные плоскости двугранных углов пересекаются в одной точке. К числу таких пирамид, в частности, относятся правильные и любые треугольные пирамиды. В правильной пирамиде центр вписанного шара можно опреде-

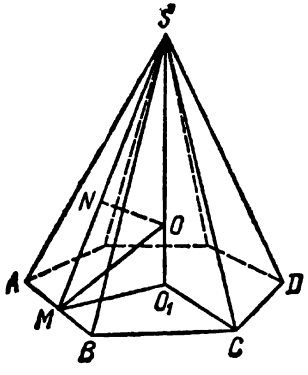


Рис. 262

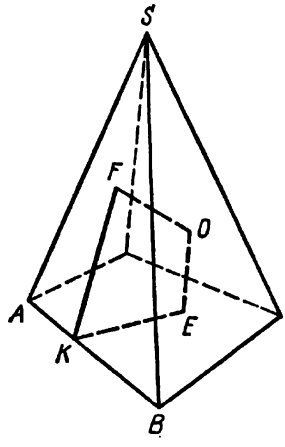


Рис. 263

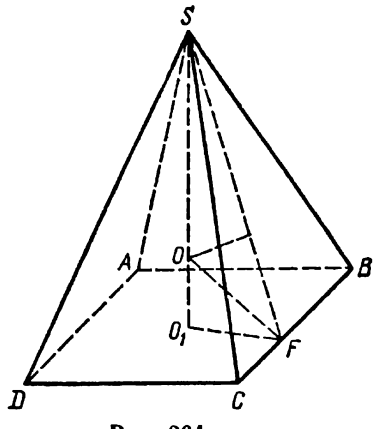


Рис. 264

лить как точку пересечения ее высоты с биссектральной плоскостью какого-нибудь двугранного угла при основании (на рис. 262 SO_1 — высота, SM — апофема, OM — биссектриса угла O_1MS).

Читателю нетрудно доказать, что полученная таким образом точка O равноудалена от всех граней правильной пирамиды. Точки касания вписанного шара с боковыми гранями правильной пирамиды лежат на ее апофемах. В общем случае это не всегда так, однако в любом случае плоскость, проходящая через центр вписанного шара и точки касания с боковой гранью и плоскостью основания перпендикулярна их общему ребру (рис. 263). Действительно, прямая AB, будучи перпендикулярной к OF и OE, перпендикулярна плоскости $EOFK$. В частности, $FK \perp AB$ и $EK \perp AB$. Най-

дем радиус шара, вписанного в правильную пирамиду. Пусть $O_1M=r$ — радиус круга, вписанного в ее основание, а $SO_1=H$ — высота пирамиды (рис. 262). Тогда в треугольнике O_1MS достаточно данных, чтобы найти отрезок $OO_1=R$. Пусть $\angle SMO_1=\varphi$. Так как OM — биссектриса угла SMO_1, то $OO_1=O_1M\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=r\cdot\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\varphi=\frac{H}{r}$, откуда $\sin\varphi=\frac{H}{\sqrt{H^2+r^2}}$, а $\cos\varphi=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}}$, получаем формулу для вычисления R:

$$R=\frac{Hr}{r+\sqrt{H^2+r^2}}. \qquad (2)$$

Например, в правильном тетраэдре со стороной a радиус r круга, вписанного в основание, равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, высота $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Поэтому

$$R=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}+\sqrt{\frac{6a^2}{9}+\frac{3a^2}{36}}}=\frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Формула (2) справедлива для любой пирамиды, боковые грани которой равнонаклонены к плоскости основания. В этом случае высота пирамиды проходит через центр круга, вписанного в основание, а центр вписанного шара лежит на высоте пирамиды и может быть получен как точка пересечения этой высоты с биссектральной плоскостью любого двугранного угла при основании.

Задача 11. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение. Центр O вписанного шара лежит на пересечении высоты пирамиды с биссектрисой FO линейного угла SFO_1 (рис. 264), O_1 — точка пересечения диагоналей ромба, $O_1F\perp BC$. В треугольнике OO_1F известны катет $OO_1=R$ и $\angle O_1FO=\frac{\varphi}{2}$. Следовательно, $O_1F=OO_1\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, $H_{\text{осн}}=2O_1F=2R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. Тогда $AB=\frac{H_{\text{осн}}}{\sin\alpha}=\frac{2R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}$ и $S_{\text{осн}}=AB\cdot H_{\text{осн}}=\frac{4R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}$.

Так как грани наклонены к плоскости основания под равными углами, то

$$S_{\text{полн.пир}}=S_{\text{осн}}+\frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}=\frac{8R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi\cdot\sin\alpha}.$$

Решение задачи существенно усложняется, если шар вписывается в произвольную пирамиду.

Задача 12. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ($AB=AC$). Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Найти объем пирамиды, если известно, что двугранные углы при ребрах SA и BC соответственно равны α и β и радиус шара, вписанного в пирамиду, равен R.

Решение. Биссектральная плоскость двугранного угла при ребре AS в сечении с пирамидой дает треугольник SAK, где $AK \perp BC$ (рис. 265); $\angle SKA$—линейный угол двугранного угла при ребре BC. Биссектриса KM угла SKA есть линия пересечения двух биссектральных плоскостей пирамиды. Следовательно, центр O вписанного в пирамиду шара лежит на прямой KM. Опустим из точки O перпендикуляры OO_1 и OE соответственно на основание ABC и грань SAB, а из точки O_1—перпендикуляр на ребро AB.

Прямая OO_1 и плоскость ABS, будучи перпендикулярными к основанию ABC, параллельны между собой: $OO_1 \parallel$ пл. ABS. Значит, расстояния от точек O и O_1 до плоскости ABS равны, т. е. $O_1F=OE=R$. Имеем

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\,BK\cdot AK\cdot AS.$$

Так как

$$BK=AK\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad AS=AK\cdot\operatorname{tg}\beta,$$

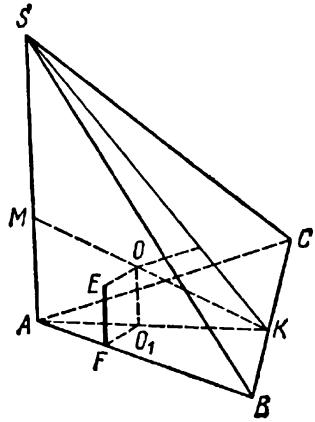


Рис. 265

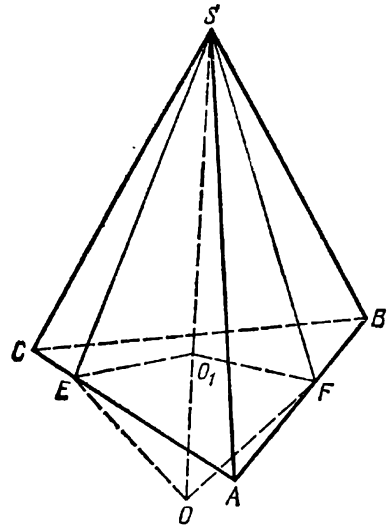


Рис. 266

то

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\,AK^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta, \qquad (*)$$

и задача сводится, таким образом, к определению отрезка AK. Последний есть сумма двух отрезков: $AK=AO_1+O_1K$. Но $AO_1=\dfrac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, а $O_1K=R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, поэтому $AK=R\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\right)$ и со-

гласно равенству (*)

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} R^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right)^3.$$

§ 5. ЗАДАЧИ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЕ КОМБИНАЦИИ ТЕЛ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели комбинации, в которых одно тело полностью вписывалось в другое. Однако нередко встречаются задачи, когда одно тело частично вписывается в другое, или специальным (указанным) образом помещено в другое, или в одно тело помещено несколько тел и т. д. Рассмотрим несколько подобных задач.

Задача 1. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13, 14, 15. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами в 75°. Определить радиус шара, касающегося пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания.

Решение. Высота пирамиды SO_1 проходит через центр круга, вписанного в ее основание. Пусть E, F, Q — точки касания шара с боковыми гранями пирамиды. Они лежат на ребрах основания. Плоскость основания в пересечении с шаром дает малый круг шара, вписанный в основание ABC. Центр шара лежит на продолжении высоты пирамиды в точке O. Соединим одну из точек касания, например F, с центром шара O (рис. 266).

Так как SF лежит в плоскости грани, касательной к шару, то радиус $OF \perp$ пл. ABS и, в частности, $SF \perp OF$; $\angle SFO_1 = 75°$ как линейный угол двугранного угла при ребре AB ($AB \perp O_1F$ и $AB \perp SF$).

В треугольнике OO_1F имеем $\angle FOO_1 = \angle SFO_1 = 75°$. Искомый отрезок $OF = R = \frac{O_1F}{\sin 75°}$, где O_1F находится из треугольника ABC по формуле

$$O_1F = r = \frac{S_{ABC}}{p}.$$

Но

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 21; \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84.$$

Поэтому $r = 4$ и, следовательно,

$$R = 4(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad \left(\sin 75° = \cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right).$$

Задача 2. Внутри правильной четырехугольной пирамиды расположен правильный тетраэдр так, что ребро CD тетраэдра лежит на диагонали основания пирамиды. Вершины A и B тетраэдра лежат на двух противоположных боковых ребрах пирамиды и ребро AB параллельно основанию пирамиды. Найти отношение объема пирамиды к объему тетраэдра, если известно, что ребро тетраэдра равно стороне основания пирамиды.

Решение. Так как $V_{\text{тетр}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, а $V_{\text{пир}}=\frac{a^2H}{3}$, то $\frac{V_{\text{тетр}}}{V_{\text{пир}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{a}{H}$, и задача сводится к отысканию отношения ребра тетраэдра a к высоте пирамиды H.

По условию CD и AB — скрещивающиеся ребра правильного тетраэдра. Ребро AB лежит в осевом сечении пирамиды EFS, причем $AB \parallel EF$ (рис. 267). Отрезок OO_1 равен расстоянию между скрещивающимися ребрами правильного тетраэдра и вычислен в задаче 1 § 2: $OO_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из подобия треугольников EFS и ABS имеем

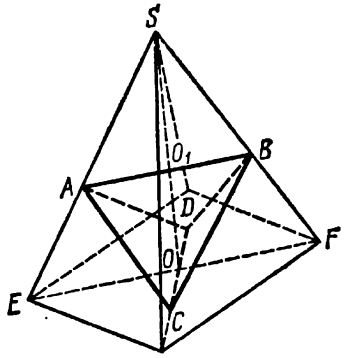


Рис. 267

$$\frac{EF}{AB}=\frac{SO}{SO_1},\quad \text{или}\quad \frac{EF-AB}{EF}=\frac{SO-SO_1}{SO},$$

где $EF=a\sqrt{2}$, $SO-SO_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AB=a$, $SO=H$. Поэтому $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{a\sqrt{2}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{H}$, откуда $\frac{a}{H}=\sqrt{2}-1$ и

$$\frac{V_{\text{тетр}}}{V_{\text{пир}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}-1).$$

Задача 3. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD взаимно перпендикулярны и соответственно равны a и b. Общий перпендикуляр к этим ребрам равен c. В тетраэдр вписан куб так, что четыре ребра куба параллельны этому общему перпендикуляру и на каждой грани тетраэдра лежат в точности две вершины куба. Найти ребро куба.

Решение. Из вершины C проведем $CE \perp AB$. Точку E соединим с D и в получившемся треугольнике CED проведем $EF \perp CD$ (рис. 268). Так как $AB \perp CE$ и $AB \perp CD$, то $AB \perp$ пл. CDE, в частности, $AB \perp DE$ и $AB \perp EF$. Последнее означает, что EF является общим перпендикуляром скрещивающихся ребер AB и CD: $EF=c$ (рис. 268).

По условию четыре ребра куба параллельны EF. Пусть это параллельные ребра MN, PQ в нижнем основании куба и M_1N_1, P_1Q_1 — в его верхнем основании. Основания куба, будучи параллельными FE, также параллельны AB (AB и FE лежат в одной плоскости). Боковые ребра куба MM_1, PP_1, QQ_1 и NN_1 параллельны CD (и, следовательно, перпендикулярны AB). На грани ABD лежат только две вершины куба — точки M_1 и P_1. Нетрудно показать, что $M_1P_1 \parallel AB$. Противоположное ребро основания MP лежит на грани ABC и $MP \parallel AB$. На гранях ACD и BCD будут лежать боковые ребра NN_1 и QQ_1 соответственно. Чтобы найти ребро куба, рассмотрим сечение ECD (рис. 269), сечение, проходящее через верхнее основание куба (рис. 270), и грань ADB.

В первом сечении $\triangle CDE \backsim \triangle KLE$. Следовательно,

$$\frac{CD}{KL}=\frac{FE}{FE-HG-GL}=\frac{DE}{LE}.$$

Обозначая сторону квадрата через x, HG через y и учитывая, что $CD=b$ и $FE=c$, имеем

$$\frac{b}{x}=\frac{c}{c-y-x}=\frac{DE}{LE}. \tag{1}$$

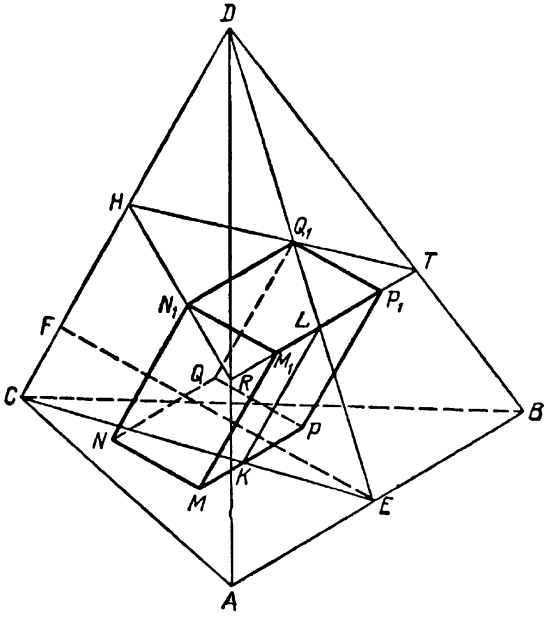


Рис. 268

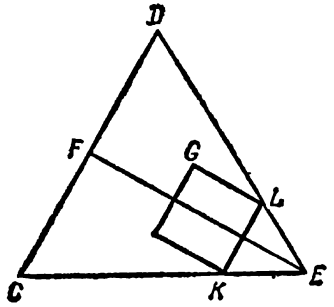


Рис. 269

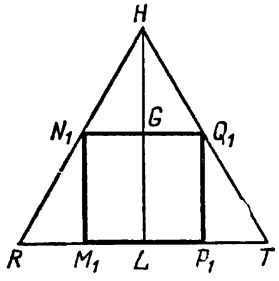


Рис. 270

Во втором сечении $\triangle RHT \backsim \triangle N_1HQ_1$:

$$\frac{RT}{N_1Q_1}=\frac{HL}{HG},$$

или

$$\frac{RT}{x}=\frac{x+y}{y}. \tag{2}$$

Наконец, для грани ABD имеем: $\triangle ABD \backsim \triangle RTD$. Отсюда $\frac{AB}{RT}=\frac{DE}{DL}$, или $\frac{AB-RT}{AB}=\frac{DE-DL}{DE}$, или $\frac{a-RT}{a}=\frac{LE}{DE}$.

Согласно равенству (1) $\frac{LE}{DE}=\frac{x}{b}$, поэтому

$$\frac{a-RT}{a}=\frac{x}{b}. \tag{3}$$

Мы получили систему трех уравнений (1), (2), (3), из которой находим x. Исключая RT, имеем

$$\left.\begin{aligned} b(c-x-y)&=cx,\\ bx(x+y)&=ay(b-x),\end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} c(b-x)&=b(x+y),\\ ay(b-x)&=bx(x+y).\end{aligned}\right\}$$

Отсюда $\frac{x}{y}=\frac{a}{c}$ и

$$x=\frac{abc}{ab+bc+ac}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}.$$

Задача 4. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый касается боковой поверхности конуса и остальные четырех шаров. Определить объем конуса, если радиус каждого шара равен R.

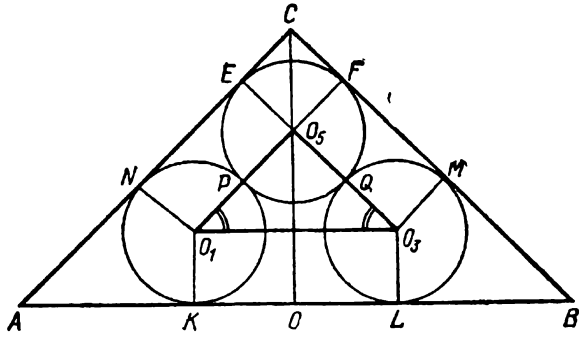


Рис. 271

Решение. Рассмотрим сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину и центры двух шаров, касающихся основания, но не касающихся друг друга (рис. 271). Это равнобедренный треугольник, в котором помещены три равных круга радиуса R: верхний круг с центром в точке O_5 касается боковых сторон треугольника (в точках E и F) и нижних кругов (в точках P и Q). Нижние круги касаются основания в точках K и L и боковых сторон в точках N и M. Очевидно, что

$$\triangle O_1O_3O_5 \sim \triangle ABC,\ O_1O_5=O_3O_5=2R.$$

Чтобы найти O_1O_3, соединим все центры нижних четырех шаров. Мы получим квадрат $O_1O_2O_3O_4$, стороны которого равны $2R$, следовательно, диагональ $O_1O_3=2R\sqrt{2}$.

Возвращаясь к треугольнику $O_1O_3O_5$, замечаем, что $\angle O_1O_5O_3 = 90°$ ($O_1O_3^2 = O_1O_5^2 + O_3O_5^2$). Поэтому $\angle ACB = 90°$, $\angle CAB = \angle CBA = 45°$.

Теперь легко находится радиус AO основания конуса:

$$AO = AK + KO = O_1K \operatorname{ctg} \frac{45°}{2} + R\sqrt{2} = R\left(\operatorname{ctg} \frac{45°}{2} + \sqrt{2}\right).$$

Учитывая, что $\operatorname{ctg} \frac{45°}{2} = \sqrt{2} + 1$, окончательно получим

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi \cdot AO^3 = \frac{1}{3}\pi R^3 (2\sqrt{2} + 1)^3.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная величина 28
Абсцисса 31
Алгебраическая дробь 50, 61
— система 154
— форма комплексного числа 39
Алгебраическое выражение 48
— уравнение 85
— число 20
Амплитуда 265
Аналитический способ 211, 212
Аргумент 211
— комплексного числа 39
Арифметическая прогрессия 178
— —, свойства 179, 180
Арифметический корень 23
— —, свойства 23, 24
Арккосинус 320, 321
Арккотангенс 323
Арксинус 318—320
Арктангенс 322
Асимптота 218
Асимптоты гиперболы 227

Безу теорема 54
Безусловное равенство 305
— тождество 69
Бесконечная десятичная дробь 13
— — — непериодическая 19
— — — периодическая 13
— — — смешанная 14
— — — чистая 14
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия 183
Бесконечный промежуток 210
Биквадратное уравнение 103, 104
Биномиальный коэффициент 200, 202
Боковая поверхность конуса 452
— — цилиндрического тела 448

Введение нового неизвестного 130, 141, 149, 151, 157
Вершина конической поверхности 451
— многогранника 446
— параболы 228
— трехгранного угла 437
Взаимно простые числа 9
Виета формулы 96, 100
Вогнутость 218
Возведение в степень 17, 22
— — — комплексного числа 37, 42
— — — обеих частей уравнения 144
Возвратное уравнение 105
Возрастающая последовательность 175
— функция 217
Вписанные тела, *см.* соотв. названия
Вспомогательный аргумент 301, 341
Входящая фигура 409
Входящее тело 459

Выделение полного квадрата 59, 131, 228
— целой части дроби 61, 127
Выпуклость 218
Выпуклый многогранный угол 437
Выходящая фигура 409
Выходящее тело 459
Вычитание алгебраических дробей 62
— чисел 7, 12, 20, 22, 35
Высота конуса 452
— усеченного конуса 455
— цилиндрического тела 448
— шарового сегмента 457
— — сектора 458
— — слоя 457

Гармоника 265, 266
Гаусса теорема 95
Гексаэдр 447
Геометрическая прогрессия 181
— —, свойства 181, 182
Герона формула 413
Гипербола 226
Горнера схема 53
Грань двугранного угла 437
— многогранника 446
— трехгранного угла 437
График 212
—, построение с помощью геометрических преобразований 369—377
— произведения двух функций 381—383
— суммы и разности двух функций 379—381
— функции, заданной разными формулами 377—379
— «функции от функции» 388—391
— — $1/f(x)$ 383—385
— частного двух функций 385—387
См. также по названиям функций
Графический способ 212, 213
Графическое решение уравнений 392—396
Группировка 59

Двугранный угол 436
Двучленное уравнение 101, 102
Действительная часть комплексного числа 34
Действительное число 22
Деление алгебраических дробей 62
— многочленов 52
— с остатком 8
— «углом» 52
— чисел 7, 12, 20, 22, 36, 42
Делимое 51, 52
Делитель 8, 51, 52
Десятичная дробь 12

Десятичное приближение 19
Десятичный логарифм 238
Диагональ многогранника 446
Диаметр шара 456
Дискриминант 100
Додекаэдр 447
Допустимое значение 48
Достаточное условие 5
Дробно-линейная функция 225—227
Дробное рациональное выражение 50

Знак квадратного трехчлена 119, 120
Знаки корней квадратного уравнения 101
— тригонометрических функций 258
Знаменатель геометрической прогрессии 181

Известная величина 84
Извлечение корня 18, 23
— — из комплексного числа 38, 42
Измерение объемов 459
— площадей 408
Измерения параллелепипеда 450
Икосаэдр 447
Интервал 210
Иррациональная система уравнений 154
— — —, методы решения 155—158
Иррациональное алгебраическое выражение 49
— неравенство 152—154
— уравнение 85
— —, методы решения 142—152
— число 19
Исследование функции 223

Каноническое разложение натурального числа на простые сомножители 8
Касательная плоскость к шару 457
Квадрант 255
Квадратичная функция 227, 228
Квадратное уравнение 98, 99
— —, свойства корней 100, 101
Квадратный трехчлен 227—229
Комплексная плоскость 35
Комплексные числа 34
— —, геометрическое изображение 34, 35
— —, действия в алгебраической форме 35—38
— —, — — тригонометрической форме 42, 43
Конечная сторона угла 254
Коническая поверхность 451
Конус 451, 452
— в комбинации с другими телами 491, 493, 496, 498
Координаты точки 30, 31
Корень из числа 18, 38
— многочлена 54
— уравнения 84
Косеканс 257
Косинус 257, 262
Косинусов теорема 403—405
Косинусоида 262
Кососимметрическое уравнение 106
Котангенс 257, 265
Котангенсоида 265
Кратное 8
Кратный корень 96
Круговая перестановка 51
— цилиндрическая поверхность 448
Круговой цилиндр 449
Куб 447, 450

Линейная функция 224
Линейное неравенство 118
— уравнение 98
Линейный угол 437
Логарифм 234
Логарифмирование 237
Логарифмическая функция 234
— —, свойства 235—237
Логарифмические уравнения 243, 245—247

Мантисса 238
Математическая индукция 6
Мнимая единица 34
— часть комплексного числа 34
Многогранник 446
Многогранный угол 437, 442, 443
Многозначная функция 211
Многочлен 50
Множество допустимых значений алгебраического выражения 48
— — — неравенства 73
— — — системы уравнений 89
— — — уравнения 84
Модуль 28
— комплексного числа 39, 41
— перехода 236
Монотонная последовательность 176
— функция 218
Муавра формула 42

Наибольшее значение квадратного трехчлена 83
Наибольший общий делитель 9
Наименьшее значение квадратного трехчлена 83
— общее кратное 9
Наклонная 436
Наклонное цилиндрическое тело 448
Направляющая конической поверхности 451
— цилиндрической поверхности 448
Натуральное число 7
Начальная сторона угла 254
— фаза 265
Независимая переменная 211
Неизвестная величина 84
Необходимое условие 5
— и достаточное условие 5

Неограниченная последовательность 175
— функция 217
Неопределенных коэффициентов метод 56, 61
Неполное квадратное уравнение 99, 100
— частное 8
Неправильная рациональная дробь 61
Неприводимый многочлен 55
Неравенства 73
— второй степени 118—120
—, доказательство неравенств 78—83
—, простейшие 76, 77
—, свойства 74—76
—, содержащие абсолютную величину 162, 163
—, — логарифмическую функцию 251
—, — показательную функцию 250
—, решение рациональных неравенств 121, 122
Нестрогое неравенство 73
Нечетная функция 214
Ньютона бином 200

Область изменения функции 211
— определения алгебраического выражения 48
— — функции 211
Образующая конической поверхности 451
— усеченного конуса 455
— цилиндрической поверхности 448
Обратная пропорциональная зависимость 225, 226
— функция 219, 220
Обратные тригонометрические функции, *см.* соотв. названия
— — —, доказательство тождеств 334—336
— — —, соотношения между ними 324
Обращение периодической дроби в обыкновенную 21
Общее кратное 9
Общий делитель 9
Объем 460
— конуса 465
— кругового конуса 467
— — цилиндра 463, 465
— пирамиды 467
— призмы 463, 464
— прямоугольного параллелепипеда 460
— усеченного конуса 467
— — кругового конуса 468
— усеченной пирамиды 468
— цилиндрического тела 462, 463, 465
— шара 470
— шарового сегмента 468
— — сектора 470
Обыкновенная дробь 12
Ограниченная последовательность 175
— функция 217
Однозначная функция 211
Однородная система 138
Однородное алгебраическое выражение 50
— уравнение 132
Одночлен 50
Октаэдр 447
Определитель 91
Ордината 31
Осевое сечение конуса 453
Основание конуса 452
— усеченного конуса 455
— цилиндрического тела 448
Основной период 215
Остаток 8, 52
Ось абсцисс 30
— ординат 30
— цилиндра 449
Отрезок 210
Отрицательный угол 254

Парабола 228
Параллелепипед 450
Параллельность двух плоскостей 439, 440
— прямой и плоскости 436, 439
Параллельные сечения конуса 453, 454
— — пирамиды 453
Параллельный сдвиг 221
Параметр 84
Переменная величина 210
Перестановки 196, 197
Период дроби 13
— функции 215
Периодическая функция 215
Перпендикулярность двух плоскостей 437, 441, 442
— — прямых 436, 438
— прямой и плоскости 436, 437, 441
Пирамида 452
— в комбинации с другими телами 491, 493, 496, 499, 502
Плоскость 435
Площадь 410
— боковой поверхности пирамиды с равными апофемами боковых граней 471, 472
— — — прямого кругового конуса 471, 473
— — — — — цилиндра 471, 472
— — — прямой призмы 471
— — — усеченного конуса 473
— параллелограмма 414, 415
— поверхности шара 474
— — шарового сегмента 473
— — — слоя 473
— правильного многоугольника 416

Площадь проекции плоской фигуры 443
— прямоугольника 410
— ромба 414
— трапеции 415
— треугольника 411—413
— четырехугольника 414
Подбор рационального корня многочлена с целыми коэффициентами 108
Подвижный радиус 255
Подобные радикалы 24
Подстановка 93, 94, 133
Показательная функция 232
— —, свойства 232—234
Показательные уравнения 242—245
Положительный угол 254
Полуинтервал 210
Полый шаровой сектор 458
Последовательность 174
Посторонний корень 86
Постоянная величина 210
Потенцирование 238
Потеря корня 86
Правильная десятичная дробь 13
— пирамида 452
— призма 450
— рациональная дробь 61
— усеченная пирамида 456
Правильный многогранник 446
Преобразования графиков 221—223, 369, 370
Предел последовательности 176
— —, свойства 178
Приближенное значение корня 18
Приводимый многочлен 55
Призма 450
— в комбинации с другими телами 490, 491, 494, 495
Призматическая цилиндрическая поверхность 448
Признаки делимости 10, 11
Продолжения секущей плоскости метод 487, 488
Проекция 436
Производная пропорция 63
Пропорция 63
Простое гармоническое колебание 265, 266
— число 8
Простой корень 96
— шаровой сектор 458
Противоречивая система уравнений 89
Противоречивое неравенство 73
— уравнение 85
Прямая 224, 225, 435
— призма 450
— пропорциональная зависимость 224
Прямое цилиндрическое тело 448
Прямой круговой конус 452
— — цилиндр 449
Прямоугольный параллелепипед 450
Равенство 48
— алгебраических дробей 62
— бесконечной десятичной и обыкновенной дроби 14
— двугранных углов 437
— иррациональных чисел 19
— комплексных чисел 34
— многочленов 51
— одноименных тригонометрических функций 287, 288
— рациональных чисел 11
— углов 254
Равновеликие тела 460
Равносильность системы уравнений совокупности двух систем 90
— уравнения и системы уравнений 90
— — совокупности двух уравнений 87
Равносильные неравенства 118
— системы уравнений 89
— уравнения 86
— —, решение вопроса о сохранении равносильности 147—149
Радиус шара 456
Разложение бинома 200, 201
— на множители квадратного трехчлена 60, 100
— — — многочлена 55, 59—61, 95, 97
— — — — вида $x^m \pm c^m$ 56
— — — при решении уравнений 128—130
— трехчлена 201, 202
Размещения 196, 197
Разность 7, 35
— арифметической прогрессии 178
— углов 255
Радикал 18, 231
Расстояние между двумя точками 30, 31
— — скрещивающими прямыми 481
Растяжение 222
Рациональная дробь 61
— система уравнений 133
— — —, методы решения 133—142
Рациональное алгебраическое выражение 49
— неравенство 121, 122
— уравнение 85
— —, методы решения 126—133
— число 11
Ребро двугранного угла 437
— многогранника 446
— трехгранного угла 437
Рекуррентное соотношение 174
Решение косоугольных треугольников 406—408
— неравенства 117
— прямоугольных треугольников 402
— системы неравенств 124
— — уравнений 89
— уравнения 84
См. также соотв. названия

Сдвиг 221
Секанс 257
Сечение 485
Сжатие 222
Симметрическое выражение 51
— уравнение 106
Симметричная система 136
Симметричное отображение 223, 369, 370
Синус 257, 261, 262
Синусов теорема 402
Синусоида 261
Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными 108—112
— — уравнений второй степени с двумя неизвестными 114, 115
— неравенств 124
— логарифмических и показательных уравнений 248—250
—, состоящая из одного линейного уравнения и одного уравнения второй степени с двумя неизвестными 112, 113
— тригонометрических уравнений 358—361
— уравнений 88
— —, основные свойства 90—93
— —, содержащих абсолютную величину 164—166
Система-следствие 89
Скрещивающиеся прямые 435
Сложение алгебраических дробей 62
— чисел 7, 12 20, 22, 35
Смежные грани 446
Смешанная десятичная дробь 13
Соединения 196
Соотношения между элементами прямоугольного треугольника 401
— — — треугольника 400—406
Сопряженные комплексные числа 34
Сопряженный множитель 64
Составное число 8
Сочетания 196, 198, 199
Среднее арифметическое 77
— геометрическое 77
Степенная функция 229, 230
Степень многочлена 50
— одночлена 50
— с дробным показателем 26
— — иррациональным показателем 27
— — натуральным показателем 17, 22
— — отрицательным показателем 26
Строгое неравенство 73
Сумма n членов арифметической прогрессии 181
— — — геометрической прогрессии 183
— углов 254, 255
— членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии 184
Суммирование выражений, содержащих биномиальные коэффициенты 208, 209
— последовательностей 192—195
— — тригонометрических выражений 314—317
Сфера 456

Табличный способ 212
Тангенс 257, 263, 264
Тангенсов теорема 405, 406
Тангенсоида 264
Тетраэдр 447
Тождественное неравенство 74
— преобразование 49
— — алгебраических выражений 67—73
— — — —, вычисление выражений 72, 73
— — — —, доказательство тождеств 69—72
— — — —, упрощение выражений 67—69
— — выражений, содержащих логарифмическую и показательную функции 238—242
— — —, — обратные тригонометрические функции 325—331
— — тригонометрических выражений 289—317
— — — —, вычисление без таблиц 292—295
— — — —, — значений выражений по известным значениям других выражений 295—300
— — — —, доказательство неравенств 312—314
— — — —, — тождеств 303—305
— — — —, — условных равенств 305—309
— — — —, исключение аргументов из системы равенств 310—312
— — — —, преобразование в произведение 300—302
— — — —, суммирование последовательностей 314—317
— — — —, упрощение выражений 289—292
Тождество 48
Трансцендентное неравенство 367, 368
— уравнение 85
— —, методы решения 365—367
— число 20
Трехгранный угол 437
Трехчленное уравнение 104
Тригонометрическая единица 290, 344
— замена 150
— форма комплексного числа 39
Тригонометрические неравенства 312—314, 361—365
— тождества 260

Тригонометрические уравнения 337—360
— —, общий метод рационализации 351—353
— — однородные и приводящиеся к ним 353—355
— — простейшие 337—339
— —, рациональные относительно $\sin x+\cos x$ и $\sin x\cdot\cos x$ 355—357
— —, сведение к простейшим 339—350
— функции, *см.* соотв. названия
— — действительного аргумента 258
— — острого угла 267, 268
— — угла 257
— — углов $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ 282—284
Тригонометрический круг 255

Убывающая последовательность 176
— функция 218
Угловой коэффициент прямой 224
Угол в тригонометрии 254
— между прямой и плоскостью 436
— — скрещивающимися прямыми 435, 481
Умножение алгебраических дробей 62
— чисел 7, 12, 20, 22, 36, 42
Уничтожение иррациональности 65, 66
Уравнение 49, 84
—, основные свойства 87, 88
—, содержащее абсолютную величину 158
—, — обратные тригонометрические функции 332—334
См. также соотв. названия
Уравнение-следствие 86
Условное равенство 305
— тождество 69
Усеченная пирамида 456
Усеченный конус 455
— прямой круговой конус 456

Факториал 197
Формула для выражения радиуса шара, вписанного в правильную пирамиду 501
— — — — —, описанного около правильной пирамиды 502
— — — через стороны треугольника его биссектрис 419
— — — — — — — — высот 417
— — — — — — — — медиан 417
— — — — — — — — радиуса вписанной окружности 406
— — — — — — — — описанной окружности 413
— — нахождения решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными 109
— корней квадратного уравнения 99, 100
— общего члена арифметической прогрессии 179, 189
— — — геометрической прогрессии 181, 189
— — — разложения бинома Ньютона 200
— перехода от одного основания логарифмов к другому 236
— преобразования сложного квадратного радикала 25
Формулы понижения степени 279
— преобразования произведения в сумму 278, 279
— — суммы в произведение 285, 286
— приведения 275—277
— сложения 273—275
— тригонометрических функций кратных аргументов 277, 278
— — — половинного аргумента 280—282
Функция 211
— натурального аргумента 211
— от функции 388
См. также по названиям функций

Характеристика 238
Хорда 456

Целое рациональное выражение 50
— число 7
Центр шара 456
— —, вписанного в пирамиду 502, 503
— —, описанного около пирамиды 499
Цепочка функций 370
Цилиндр 449
— в комбинации с другими телами 490, 491, 494, 495
Цилиндрическая поверхность 448
Цилиндрическое тело 448

Частное 7, 36, 51, 52
Частота 265
Четверть 255
Четная функция 213, 214
Число корней многочлена 95
Числовая ось 29
Чисто мнимое число 34
Член последовательности 174

Шар 456
— в комбинации с другими телами 494—496, 498, 499, 502
Шаровая поверхность 456
Шаровой пояс 457
— сегмент 457
— сектор 458
— слой 457

Экспонента 234
Элементарная функция 223

Шувалова Эмма Зиновьевна
Агафонов Борис Григорьевич
Богатырев Геннадий Иванович

ПОВТОРИМ МАТЕМАТИКУ

Редактор А. М. Суходский
Художник С. А. Кравченко
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор Р. С. Родичева
Корректор И. А. Хлебникова

Сдано в набор 10/V 1973 г. Подп. к печати 22/X 1973 г. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Объем 32,5 печ. л. Уч.-изд. л. 28,26. Изд. № ФМ-518. Тираж 200 000 экз. Зак. 407. Цена 90 коп.
План выпуска литературы для вузов и техникумов издательства «Высшая школа» на 1974 г.
Позиция № 299

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Москва, М-54, Валовая, 28